А.Г. Кусраев
С.С. Кутателадзе

Введение в булевозначный анализ

НАУКА

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

А. Г. КУСРАЕВ
С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

ВВЕДЕНИЕ В БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ АНАЛИЗ

МОСКВА «НАУКА»
2005

УДК 517.98
ББК 22.162
К 94

Ответственный редактор
академик *Ю. Г. РЕШЕТНЯК*

Рецензенты: доктор физико-математических наук *Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ*,
доктор физико-математических наук *С. А. МАЛЮГИН*

Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.—526 с.

Булевозначный анализ — один из наиболее разработанных разделов, представляющих современные нестандартные методы анализа. В монографии детально излагается техника спусков и подъемов для булевозначных моделей теории множеств, позволяющая существенно расширить объем и область применимости математических утверждений. Основное внимание уделено изучению булевозначных изображений классических функционально-аналитических объектов: банаховых пространств и алгебр. Вскрывается имманентная связь последних с решеточно нормированными векторными пространствами, введенными Л. В. Канторовичем.

Книга ориентирована на студентов старших курсов, аспирантов и научных работников, интересующихся нестандартным анализом и его приложениями.

TTI 2005–1–118

ISBN 5-02-033710-2

Введение

Как следует из названия, настоящая книга посвящена *булевозначному анализу.* Так называют аппарат исследования произвольных математических объектов, основанный на сравнительном изучении их вида в двух моделях теории множеств, конструкции которых основаны на принципиально различных булевых алгебрах. В качестве этих моделей фигурируют классический канторов рай в форме универсума фон Неймана и специально построенный булевозначный универсум, в котором теоретико-множественные понятия и утверждения получают весьма нетрадиционные толкования. Одновременное использование двух моделей для изучения одного объекта — фамильная черта так называемых нестандартных методов современной математики. В этой связи булевозначный анализ принято относить к разновидностям нестандартного анализа.

Своим возникновением булевозначный анализ обязан выдающемуся достижению П. Дж. Коэна, установившему в начале 1960-х годов непротиворечивость добавления отрицания гипотезы континуума CH к аксиомам теории множеств Цермело — Френкеля ZFC. Вместе с более ранним результатом К. Гёделя о совместимости CH с ZFC, установленный П. Дж. Коэном факт означает независимость CH от обычных аксиом ZFC. Шаг, совершенный П. Дж. Коэном, связан с преодолением им принципиальной трудности, отмеченной Дж. Шепердсоном и отсутствующей в случае, разобранном К. Гёделем. Доказательство непротиворечивости (ZFC) + ($\neg$ CH) невозможно с помощью стандартных моделей. Точнее говоря, выбрав какую-либо реализацию универсума фон Неймана, мы не можем указать в ней подкласс, служащий моделью (ZFC) + ($\neg$ CH), если применять уже имеющуюся у нас интерпретацию предиката принадлежности. П. Дж. Коэну удалось предложить новый мощный способ построения невнутренних — нестандартных — моделей ZFC, названный им *методом форсинга* (см. [204]). Термин «форсинг» часто переводят как «вынуждение». Возможно, точнее говорить в этом контексте о методе принуждения. Использованные П. Дж. Коэном приемы — применение аксиомы существования стандартной транзитивной модели ZFC и насильственное превращение последней в принципиально нестандартную модель методом принуждения — вступают в противоречие с обычной математической интуицией, исходящей, по словам самого П. Дж. Коэна, «из нашей веры в естественную почти физическую модель математического мира» [84].

Трудности в восприятии результатов П. Дж. Коэна задолго до их появления прекрасно выразил Н. Н. Лузин в знаменитом докладе «Современное состояние теории функций действительного переменного», сделанном им на Всероссийском съезде математиков в 1927 г.: «Первое, что приходит на ум, это то, что установление мощности continuum'а есть дело свободной аксиомы, вроде аксиомы о параллелях для геометрии. Но в то же время, как при инвариантности всех прочих аксиом геометрии Евклида и при варьировании аксиомы о параллельных меняется самый смысл произнесенных или написанных слов: „точка“, „прямая“, etc. — смысл каких слов должен меняться, если мы делаем мощность continuum'а подвижной на алефической шкале, все время доказывая непротиворечивость этого движения? Мощность continuum'а, если только мыслить его как множество точек, есть единая некая реальность и она должна находиться на алефической шкале там, где она на ней есть; нужды нет, если определение этого места затруднительно или, как прибавил бы J. Hadamard, „даже невозможно для нас, людей“» [136].

Весьма характерный взгляд сформулировал П. С. Новиков: «...возможно (я сам придерживаюсь этого мнения), что результат Коэна имеет чисто отрицательное значение и обнаруживает конец развития „наивной“ теории множеств в духе Кантора» [152].

Стремление облегчить указанные трудности в восприятии результатов и методов П. Дж. Коэна привело Д. Скотта и Р. Соловея к построению булевозначных моделей ZFC, обладающих привлекательной наглядностью с точки зрения классических математиков и в то же время приспособленных для получения теорем о независимости. Аналогичные модели были построены в тот же период П. Вопенкой.

Из уже сказанного видно, что булевозначные модели, приводящие к тем же целям, что и построенные П. Дж. Коэном с помощью форсинга, должны быть в каком-то смысле нестандартными, обязаны обладать чертами, отсутствующими у общепринятых моделей.

Качественно говоря, *в понятии булевозначной модели присутствует новая концепция моделирования*, которую можно назвать заочным моделированием или моделированием по телефону. Поясним суть этой концепции ее сравнением с традиционными подходами. В классическом смысле, сталкиваясь с двумя моделями одной теории, мы пытаемся установить взаимно однозначное соответствие между фигурирующими в них универсумами. Если такую биекцию удается подобрать, переводя предикаты и операции одной модели в их аналоги в другой, мы говорим об изоморфности моделей. Таким образом, описанное представление об изоморфизме подразумевает очное сопоставление моделей — предъявление биекции универсумов.

Представим себе, что мы лишены возможности одновременного физического поэлементного сравнения моделей, однако можем обмениваться информацией с обладателем другой модели, например, по телефону. В процессе общения легко установить, что собеседник с помощью своей модели изучает объекты, которые он именует знакомыми нам словами, говоря о множествах, их сравнении и принадлежности. Поскольку нас интересует ZFC, мы спрашиваем у него — истинны ли аксиомы ZFC? Поработав в своей модели, он сообщает «да, истинны». Убедившись также, что он использует те же правила вывода, что приняты нами, мы должны признать, что имеющаяся у него модель — это модель интересующей нас теории. Полезно подчеркнуть, что сделав такой вывод, мы ничего не узнали ни об объектах, составляющих его модель, ни о процедурах, с помощью которых он отличает истинные утверждения от ложных[1].

Итак, *новая концепция моделирования связана как с отказом от отождествления предметных областей, так и с допуском новых процедур верификации утверждений.*

При построении булевозначной модели мы начинаем с выбора некоторой пол-

[1]“*E*, *Eir* и *Em*” из знаменитого Personal Pronoun Pronouncement представляются существенно более лучшим набором местоимений для данного абзаца (см. [380]).

ной булевой алгебры, краеугольного камня булевозначного универсума и области прибытия оценки истинности, сопоставляющей формуле ZFC некоторый элемент алгебры B. Точнее говоря, задав B, мы строим универсум $\mathbb{V}^{(B)}$, призванный служить универсумом рассмотрения теории ZFC. Каждой формуле φ, переменные которой теперь пробегают $\mathbb{V}^{(B)}$, сопоставляется элемент $[\![\varphi]\!]$, лежащий в исходной булевой алгебре B. Величину $[\![\varphi]\!]$ называют *оценкой истинности* формулы φ. Оценки истинности позволяют анализировать формулы ZFC. При этом оказывается, что теоремы ZFC получают наибольшую возможную оценку $\mathbb{1}_B$, и мы объявляем их верными внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Детальное изложение упомянутых конструкций занимает главы 1–6, составляющие первую часть этой книги. Мы начинаем с изложения необходимых нам сведений из теории множеств и булевых алгебр. Этому посвящены главы 1 и 2. Понятно, что подробности из названных разделов математики совершенно неизбежны для раскрытия выбранной нами темы. Глава 3 занимает несколько особое место. Она посвящена элементам теории категорий. Помимо изложения минимума сведений о категориях и функторах, мы отвели значительное место основам теории топосов. Нам представляется, что в связи с топосами читателю станет яснее место, которое занимают булевозначные модели в современных воззрениях на основания математики.

В главах 4–6 представлен инструментарий булевозначного анализа. Приводимые конструкции и, прежде всего, процедуры спуска и подъема, осуществляющие функторные связи между универсумом фон Неймана $\mathbb{V}$ и булевозначным универсумом $\mathbb{V}^{(B)}$, составляют техническую основу применений булевозначных моделей к задачам анализа.

Главы 7–12, составляющие вторую часть книги, посвящены демонстрации замечательных возможностей, которые булевозначный анализ предлагает для исследования разнообразных математических объектов. Здесь широко представлены способы превращений функциональных пространств в числовые множества, операторов — в функционалы, вектор-функций — в обычные отображения и т. п. Разумеется, отбор объектов анализа и круга приложений к функциональному анализу во многом обусловлен нашими личными научными интересами.

Мы начинаем с детального изучения булевозначных реализаций общих алгебраических систем, которому посвящена глава 7. Теория алгебраических систем, заложенная в трудах А. И. Мальцева и А. Тарского, относится к числу важнейших общематематических достижений. В этой связи ясно, что сведения о булевозначном изображении таких систем необходимы для приложений к любому содержательному разделу математики. Некоторые из таких приложений к анализу изображений групп, колец и полей в булевозначном универсуме собраны в главе 8.

Глава 9 посвящена анализу кардинальных чисел в булевозначных моделях. Особое место уделено так называемому эффекту «смещения кардиналов», обнаружение которого и позволило П. Дж. Коэну доказать непротиворечивость $(\mathrm{ZFC}) + (\neg\,\mathrm{CH})$.

Исключительно универсальное значение имеют конструкции, представленные в главе 10. Математика, понимаемая как наука о бесконечном, немыслима без вещественных чисел. Булевозначный анализ вскрыл имманентную связь поля вещественных чисел и расширенных пространств Канторовича. Обнаружилось, что каждое из таких пространств служит равноправной моделью поля вещественных чисел. Напомним, что условно полные векторные решетки, называемые также K*-пространствами* или *пространствами Канторовича*, были введены в 1930-е годы Л. В. Канторовичем как полезная абстракция поля вещественных чисел. Для новых объектов Л. В. Канторович выдвинул *эвристический принцип*, состоящий в том, что элементы K-пространства аналогичны вещественным числам, а утверждениям о функционалах отвечают теоремы об операторах со значениями в K-пространствах. Время позволило вложить точный смысл в принцип Канторовича. Соответствующий аппарат и, в первую очередь, основополагающая теорема Е. И. Гордона составляют ядро главы 10.

Глава 11 посвящена проблеме булевозначной реализации центрального объекта классического функционального анализа — банахова пространства. Оказывается, что изображениями традиционных нормированных пространств служат так называемые решеточно нормированные векторные пространства, также открытые при зарождении теории K-пространств. Здесь речь идет о нормировании элементов векторного пространства не с помощью чисел, как это традиционно делается, а с привлечением в качестве эталонов положительных векторов из какого-нибудь пространства Канторовича.

Глава 12 посвящена теории операторных алгебр. Булевозначный анализ таких алгебр — направление исследований, инициированное пионерскими работами Г. Такеути, — интенсивно развивается в последние десятилетия. Изложение строится на основе булевозначной реализации решеточно нормированных пространств. На этом пути возникает единый метод исследования таких аналитических объектов, как инволютивные банаховы алгебры, банаховы модули, алгебры Йордана — Банаха, алгебры неограниченных операторов и т. п.

Настоящая книга — плод наших размышлений и исследований в области булевозначного анализа, появившийся в результате длительной эволюции из учебного пособия «Записки по булевозначному анализу», написанного нами для студентов Новосибирского государственного университета в далеком 1984 году. Непосредственным предшественником данного издания послужила книга «Булевозначный анализ», выпущенная двумя изданиями Институтом математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН в 1999 и 2003 годах. Издание 1999 года было одновременно воспроизведено Kluwer Academic Publishers на английском языке. Лежащая перед читателем книга полностью переработана и столь существенно расширена новыми материалами, что мы сочли возможным дать этому варианту новое более обязывающее название.

Монография ориентирована на широкий круг читателей, интересующихся современными теоретико-модельными методами в их приложении к функциональному анализу. Мы старались сделать книгу возможно более независимой, хотя полностью осуществить замысел не удалось ввиду большого количества математических идей и объектов, вовлеченных в изложение. Надеемся, что читатель поймет наши проблемы и простит пробелы и неточности.

Выполняя приятный долг, мы выражаем благодарность за помощь в подготовке книги своим коллегам по Институту математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН и Институту прикладной математики и информатики Владикавказского научного центра РАН и Правительства Республики Северная Осетия-Алания.

А. Кусраев
С. Кутателадзе

Часть I
ОСНОВЫ

Глава 1
Элементы теории множеств

В кредо наивной теории множеств входит мечта о «канторовом рае» — об универсуме — мире множеств, содержащем все мыслимые в обособленном виде образования, каждое из которых представляет собой «соединение в некое целое M определенных хорошо различимых предметов m нашего созерцания или нашего мышления» [65, с. 173].

Реалистические приближения к недостижимому идеалу — адекватные формальные схемы, позволяющие предъявлять весьма богатый спектр конкретных множеств, оставаясь в комфортных условиях достаточной логической строгости, — являются предметом современной теории множеств.

Наиболее существенной частью современных аксиоматических теорий множеств является построение универсумов, дающих удовлетворительные для тех или иных нужд аппроксимации мира наивных множеств снизу. В рамках соответствующих аксиоматик удается точно обосновать и детально осмыслить качественные феноменологические принципы, закладываемые в стандартные и нестандартные математические модели.

В настоящее время наиболее разработанной и общеупотребительной является теория множеств Цермело — Френкеля. В ее рамках мы и ведем изложение. С не меньшей тщательностью мы анализируем статус классов множеств в рамках формальной системы, восходящей к Дж. фон Нейману, К. Гёделю и П. Бернайсу и являющейся консервативным расширением теории Цермело — Френкеля.

В этой главе изложен формальный аппарат построения универсумов множеств как результата специфических трансфинитных процессов создания так называемых кумулятивных иерархий. Наиболее важным для дальнейшего является детальное описание конструкции универсума фон Неймана.

1.1. Формальные системы

В текущем параграфе мы дадим краткое определение формальной системы и выделим класс языков первого порядка. В качестве иллюстраций мы обсудим классические исчисления высказываний и предикатов.

1.1.1. Аксиоматический метод — один из наиболее сильных и популярных инструментов современной математики. Он включает два аспекта — *синтаксический* и *семантический*. Синтаксический аспект аксиоматического метода состоит в изучении логической структуры формальных символических текстов безотносительно к их смыслу; основное понятие синтаксиса — *выводимость* в формальной системе, соответствующий раздел математической логики принято называть *теорией доказательств.* Семантический аспект аксиоматического метода состоит в изучении смысла формальных текстов теоретико-множественными средствами; основным понятием семантики является *истинность в модели*, а соответствующий раздел математической логики называют *теорией моделей.*

Стержнем формальной системы является ее язык. Точное описание и изучение последнего по необходимости производится средствами некоторого, вообще говоря, другого языка, который принято называть *метаязыком.* Обычно в качестве метаязыка употребляются определенным образом ограниченные и регламентированные фрагменты естественных языков, обогащенные разными техническими терминами. Средства, допускаемые в метаязык, важны с точки зрения оснований математики. С тех же позиций представляют специальный интерес математические методы, используемые при построении *метаматематики*, т. е. теории, исследующей математику или какие-то ее разделы как некоторый самостоятельный объект. Учитывая, что в этой книге нас интересуют не основания математики, а прикладные теоретико-модельные аспекты формальной теории множеств, мы не предъявляем к метаязыку чрезмерно жесткие требования. В частности, в дальнейшем мы широко используем общепринятые выразительные средства и уровень строгости обычной — содержательной — математики.

1.1.2. В качестве алфавита языка рассматривают фиксированный набор A символов произвольной природы — канторово множество. Конечные последовательности символов (= элементов A) называют *выражениями*, иногда — *текстами* и записывают в виде $a_1a_2\dots a_n$, где $a_k \in A$ при $k := 1,\dots,n$. Один и тот же символ может появляться в тексте несколько раз, и всякий раз говорят о *вхождении* этого символа в рассматриваемое выражение. Если каким-либо способом (предписаниями, алгоритмами и т. п.) выделено некоторое множество «правильно составленных» выражений $\Phi(A)$, то говорят, что задан *язык с алфавитом* A. При этом выделенные выражения называют *формулами.*

Далее, фиксируют некоторую конечную или бесконечную совокупность формул, именуемых *аксиомами*, а также явно описывают допускаемые *правила вывода* — отношения в $\Phi(A)$ и степенях $\Phi(A)$. Таким образом, формальная система полностью определена, если заданы ее язык, аксиомы и правила вывода.

Если $R \subset \Phi(A)^n$ — правило вывода, а $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ — формулы, то включение $(\varphi_1,\dots,\varphi_n) \in R$ символизирует тот факт, что φ_n выводится из $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}$. Формулы, получаемые из аксиом за конечное число шагов с помощью имеющихся правил вывода, называют *теоремами.* Для формальной системы $\mathscr{F}$ и формулы φ запись $\vdash_{\mathscr{F}} \varphi$ символизирует выражение «φ есть теорема системы $\mathscr{F}$».

Часто используют (и мы будем поступать так же) более вольный и удобный способ выражения. Именно, говорят, что теоремы формальной системы составляют наименьшее множество формул, содержащее все аксиомы и замкнутое относительно правил вывода. Это множество называют также *формальной теорией* или *аксиоматической системой.*

1.1.3. В качестве простого примера формальной системы рассмотрим *исчисление высказываний* или *пропозициональное исчисление* PL. Алфавит языка исчисления высказываний содержит бесконечную последовательность символов Φ_0, называемых *пропозициональными переменными*, *логические связки* $\{\neg, \vee, \wedge, \to\}$ и *скобки* (,). Множество формул Φ языка PL — наименьшее множество текстов в алфавите PL, содержащее Φ_0 и удовлетворяющее условию: если $\varphi, \psi \in \Phi$, то $\neg\varphi$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, и $(\varphi \to \psi)$ также входят в Φ.

Рассмотрим две разные аксиоматические системы CL и IL для PL, называемые соответственно *классической логикой* и *интуиционистской логикой.*

Аксиоматика системы CL содержит следующие двенадцать схем (φ, ψ и ω — произвольные формулы языка PL):

(1) $\varphi \to (\varphi \wedge \varphi)$;

(2) $(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$;

(3) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \wedge \omega) \to (\psi \wedge \omega))$;

(4) $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \omega)) \to (\varphi \to \omega)$;

(5) $\psi \to (\varphi \to \psi)$;

(6) $(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) \to \psi$;

(7) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$;

(8) $(\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \varphi)$;

(9) $((\varphi \to \omega) \wedge (\psi \to \omega)) \to ((\varphi \wedge \psi) \to \omega)$;

(10) $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$;

(11) $((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi)) \to \neg\varphi$;

(12) $\varphi \vee \neg\varphi$.

Система CL имеет единственное правило вывода, называемое *правилом отделения* или, чаще, *modus ponens*:

(MP) если φ и $\varphi \to \psi$ — теоремы теории CL, то ψ также теорема CL.

1.1.4. Система IL получается из CL путем удаления из нее схемы аксиом 1.1.3 (12). Таким образом, в IL приняты схемы аксиом 1.1.2 (1–11) и только они, а также правило отделения (MP). Как видно из определения, все IL-теоремы являются теоремами CL. Обратное, разумеется, неверно: CL-теоремы $\neg(\neg\varphi) \to \varphi$ и $(\neg\varphi) \vee \neg(\neg\varphi)$ не являются теоремами IL. В то же время $\varphi \to \neg(\neg\varphi)$ и $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ являются IL-теоремами. Отметим также, что в IL ни одна из логических связок, $\vee$, $\wedge$, $\to$ не может быть выражена через другие.

1.1.5. Далее нас будет интересовать специальный тип формального языка — *язык первого порядка* исчисления предикатов (с равенством). *Сигнатурой* σ называют тройку (F, P, a), где F и P — некоторые непересекающиеся множества, называемые множеством *символов операций* и множеством *символов предикатов* соответственно, а a — отображение $F \cup P$ в множество целых неотрицательных чисел, называемое отображением *арности* или *местности.* Говорят, что $u \in F \cup P$ есть *n-арный* или *n-местный символ*, если $a(u) = n$. Отметим, что 0-местный функциональный символ называют также *символом константы* или просто, *константой. Алфавит* языка первого порядка сигнатуры σ состоит из следующих символов:

(1) *множество символов* сигнатуры σ, т. е. множество $F \cup P$;

(2) *множество переменных*: строчные или прописные латинские буквы, возможно с индексами;

(3) *логические связки*: $\wedge$ — конъюнкция, $\vee$ — дизъюнкция, $\to$ — импликация, $\neg$ — отрицание;

(4) *кванторы*: $\forall$ — квантор общности и $\exists$ — квантор существования;

(5) *символ равенства* $=$;

(6) *вспомогательные символы*: (— открывающая скобка,) — закрывающая скобка, , — запятая.

Отметим, что символы кванторов и логических связок вместе именуют *логическими символами*. Кроме того, в языке первого порядка принято выделять формулы и термы.

1.1.6. *Термы* сигнатуры σ составляют наименьшее множество выражений языка (той же сигнатуры), удовлетворяющее условиям:

(1) всякая переменная есть терм;

(2) всякий нульместный символ операции есть терм;

(3) если $f \in F$, $a(f) = n$ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.

Если в сигнатуре нет функциональных символов (как, например, в случае исчисления предикатов), то термами являются только переменные и символы констант.

1.1.7. *Атомные* или *атомарные формулы* сигнатуры σ — это выражения вида

$$t_1 = t_2, \quad p(y_1, \ldots, y_n), \quad q,$$

где $t_1, t_2, y_1, \ldots, y_n$ — термы сигнатуры σ, буква p обозначает n-местный предикатный символ, а q — нульместный предикатный символ.

Формулы сигнатуры σ составляют наименьшее множество выражений, удовлетворяющее условиям:

(1) атомарные формулы сигнатуры σ являются формулами сигнатуры σ;

(2) если φ и ψ — формулы сигнатуры σ, то $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$ также формулы сигнатуры σ;

(3) если φ — формула сигнатуры σ, а x — переменная, то $(\forall\, x)\varphi$, $(\exists\, x)\varphi$ также формулы сигнатуры σ.

1.1.8. Множество $\mathrm{FV}(\varphi)$ *свободных переменных* формулы φ определяют следующим образом:

(1) если φ — атомарная формула, то $\mathrm{FV}(\varphi)$ совпадает с множеством всех переменных, содержащихся в φ;

(2) $\mathrm{FV}(\neg\varphi) = \mathrm{FV}(\varphi)$;

(3) $\mathrm{FV}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{FV}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{FV}(\varphi \to \psi) = \mathrm{FV}(\varphi) \cup \mathrm{FV}(\psi)$;

(4) $\mathrm{FV}(\exists\, x\varphi) = \mathrm{FV}(\forall\, x\varphi) = \mathrm{FV}(\varphi) \setminus \{x\}$.

Переменные, не являющиеся свободными в формуле φ, называют *связанными* в φ. При желании подчеркнуть, что в формуле φ свободными являются переменные $x_1, \ldots, x_n$ (и, возможно, не только они) пишут $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ или просто $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Терм t называют *свободным для переменной x в формуле φ*, если никакое свободное вхождение x в φ не принадлежит области действия никакого квантора $\mathrm{Q}\ y$, где y — переменная, входящая в t. (В выражении $(\mathrm{Q}\ x)\varphi$ формулу φ называют *областью действия* квантора Q.)

Формулу без свободных переменных называют *замкнутой формулой* или *высказыванием*. Говоря об истинности или ложности формулы φ, имеют в виду *универсальное замыкание* формулы φ, которое получается навешиванием квантора общности на каждую свободную переменную формулы φ.

Стоит обратить внимание на то, что квантификация допустима лишь по отношению к переменным. Слова «первый порядок» подчеркивают именно эту синтаксическую особенность рассматриваемого класса языков.

1.1.9. Одной из важнейших функций метаязыка является введение новых сокращающих символов и установление соответствующих синтаксических правил. Дело в том, что формализация даже несложных фрагментов содержательной математики приводит к громоздким текстам, запись и прочтение которых проблематичны по физическим и психологическим причинам. Это обстоятельство вынуждает вводить большое количество сокращений и, по сути дела, просто строить более удобный сокращенный вариант исходного символического языка. При этом необходимым требованием является принципиальная возможность однозначного перевода сокращенного изложения на формализованный язык. В соответствии с нашими планами мы не будем останавливаться подробно на способах введения сокращений, точных описаний, функциональных выражений и т. п. Например, в дальнейшем, как и ранее, мы применяем *символ присваивания* $:=$, не вдаваясь в сопутствующие тонкости. Другие примеры общепринятых сокращений будут приведены ниже.

1.1.10. *Теория первого порядка* или *элементарная теория* сигнатуры σ возникает, если в языке первого порядка сигнатуры σ выделено некоторое множество аксиом и правил вывода. При этом аксиомы делятся на две группы — *логические аксиомы* и *специальные* или *нелогические* аксиомы.

Специальные аксиомы различны у различных теорий. Теорию первого порядка без специальных аксиом называют *исчислением предикатов*. Тем самым исчисление предикатов содержит только логические аксиомы.

Аксиомы классического исчисления предикатов делятся на три группы:

(1) *пропозициональные аксиомы* — все формулы сигнатуры σ, получающиеся из схем 1.1.3 (1–12);

(2) *кванторные аксиомы* — для любой формулы $\varphi(x)$ и терма t аксиомами будут формулы $(\forall\, x)\varphi \to \varphi(t)$ и $\varphi(t) \to (\exists\, x)\varphi$;

(3) *аксиомы равенства* — для произвольного терма t формула $t = t$ является аксиомой; для произвольных термов t_1 и t_2 и формулы $\varphi(x)$ аксиомой будет формула $(t_1 = t_2) \wedge \varphi(t_1) \to \varphi(t_2)$.

Здесь необходимо пояснить, что $\varphi(t)$ (иногда пишут $\varphi(t/x)$) означает результат замены всевозможных свободных вхождений переменной x в формуле $\varphi(x)$ термом t. При этом предполагается, что t является свободной для x переменной в формуле φ. В рассматриваемой ситуации это означает, что либо t есть константа, либо t — переменная, которая не становится связанной в φ после подстановки t вместо каждого свободного вхождения переменной x в формулу φ.

Правил вывода исчисления предикатов всего три — modus ponens и два закона квантификации:

(MP) правило отделения (modus ponens) (см. 1.1.3);

$(\forall)$ если x не входит свободно в φ, то из $\varphi \to \psi$ выводится $\varphi \to (\forall\, x)\psi$;

$(\exists)$ если x не входит свободно в ψ, то из $\varphi \to \psi$ выводится $(\exists\, x)\varphi \to \psi$.

Отметим здесь же, что используемое в настоящей книге исчисление предикатов принято именовать *классическим*, *узким* или *исчислением первого порядка.* По аналогии с 1.1.3 классическое исчисление предикатов мы обозначим символом CL. Запись $\vdash_{\mathrm{CL}} \varphi$ как и в 1.1.2 будет означать, что формула φ доказуема в CL.

Если из CL удалить схему аксиом 1.1.3 (12), то возникнет система, которую называют *интуиционистским исчислением предикатов* и обозначают IL. Смысл обозначения $\vdash_{\mathrm{IL}} \varphi$ очевиден из 1.1.2.

1.2. Язык теории множеств

Аксиоматические теории множеств точно регламентируют корректные способы формирования множеств. Образно говоря, аксиоматики описывают миры — универсумы — множеств, которые призваны служить адекватными отображениями наших интуитивных представлений о «канторовом рае» — универсуме наивной теории множеств. Интересующие нас аксиоматики принято строить и изучать как формальные теории.

1.2.1. Аксиоматическая теория множеств — это *формальная система. Язык теории множеств* — язык первого порядка, сигнатура которого содержит лишь один бинарный предикатный символ $\in$ и не имеет прочих предикатных или функциональных символов. Теория множеств — это простой пример *теории первого порядка.* Обычно пишут $x \in y$ вместо $\in(x, y)$ и говорят, что x — *элемент* y или x *принадлежит* y. Таким образом, формулы теории множеств суть формальные тексты, составленные из атомарных формул вида $x \in y$ и $x = y$ посредством пропозициональных связок и кванторов.

Теория множеств, точнее говоря, та теория множеств, которую мы излагаем в настоящей книге, строится на основе законов классической логики. Иными словами, в ней действуют обычные логические аксиомы и правила вывода классического исчисления предикатов, которое схематически представлено в предыдущем параграфе. Подробности можно найти почти в любом руководстве по математической логике (см., например, учебники Ю. Л. Ершова, Е. А. Палютина [60], С. Клини [77], Э. Мендельсона [113], Дж. Шенфильда [175]).

Помимо этого в теории множеств принимают некоторое количество специальных аксиом, отражающих содержательные представления о множествах или классах. Варьируя в разумных пределах специальные аксиомы, получают различные по своим выразительным возможностям аксиоматические системы для теории множеств. В следующих двух параграфах описаны две аксиоматические системы: теория Цермело — Френкеля и теория фон Неймана — Гёделя — Бернайса.

1.2.2. Как уже было отмечено, введение новых сокращающих символов и установление соответствующих синтаксических правил является обычной практикой при изучении формального языка.

Приведем примеры сокращения некоторых формальных текстов языка теории множеств. Словесные толкования этих текстов апеллируют к интуитивным наивным представлениям о множествах. Прежде всего отметим следующие общепринятые сокращения:

$$(\exists!\, x)\ \varphi(x) := (\exists\, x)\varphi(x) \wedge (\forall\, x)(\forall\, y)(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \to x = y);$$
$$(\exists\, x \in y)\varphi := (\exists\, x)(x \in y \wedge \varphi);$$
$$(\forall\, x \in y)\varphi := (\forall\, x)(x \in y \to \varphi),$$

где φ — некоторая формула. Полагают также $x \neq y := \neg(x = y)$ и $x \notin y := \neg(x \in y)$. Для простейших теоретико-множественных операций приняты обычные соглашения:

$$x \subset y := (\forall\, z)(z \in x \to z \in y);$$
$$u = \bigcup x = \bigcup(x) := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (\exists\, y \in x) z \in y);$$
$$u = \bigcap x = \bigcap(x) := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (\forall\, y \in x) z \in y);$$
$$u = y - x = y \setminus x := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (z \in y \wedge z \notin x)).$$

Если φ — формула, то совокупность $\mathscr{P}_\varphi(x)$ всех подмножеств x, удовлетворяющих условию φ, описывают выражением

$$u = \mathscr{P}_\varphi(x) := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (z \subset x) \wedge \varphi(z)).$$

Пустое множество $\varnothing$ не содержит элементов, так что

$$u = \varnothing := (\forall\, x)(x \in u \leftrightarrow x \neq x).$$

В приведенных выше текстах использован весьма употребительный прием сокращения — пропуск части скобок. Отметим также, что запись $x \subset y$ вербализуют выражениями «x — подмножество y», «x — множество в y», «x — лежит в y» и т. п. Подчеркнем, что по уже вековой традиции большого педантизма в словесном различении фактов принадлежности и включения множеств в математике не наблюдается.

1.2.3. Утверждение о том, что x есть *неупорядоченная пара* элементов y и z, формализуют следующим образом:

$$(\forall\, u)(u \in x \leftrightarrow u = y \vee u = z).$$

При этом полагают $\{y, z\} := x$. Отметим, что фигурные скобки отсутствуют в исходном алфавите и, стало быть, суть метасимволы.

Упорядоченную пару и *упорядоченную* n*-ку* вводят приемом Куратовского:

$$(x, y) := \langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\};$$
$$(x_1, \dots, x_n) := \langle x_1, \dots, x_n\rangle := \langle\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle,$$

где $\{x\} := \{x, x\}$. Элементы $x_1, \dots, x_n$ именуют *координатами* n-ки $(x_1, \dots, x_n)$. Стоит обратить внимание на перегруженность круглых скобок. Это обстоятельство неизбежно и его не следует воспринимать как повод для обязательного введения новых символов.

С помощью заключенных соглашений можно придать формальный смысл предложению «X — *декартово произведение* $Y \times Z$». Именно, по определению считают: $X := \{(y, z) : y \in Y \wedge z \in Z\}$.

1.2.4. Рассмотрим утверждения:

(1) $\mathrm{Rel}\,(X)$;

(2) $Y = \mathrm{dom}(X)$;

(3) $Z = \mathrm{im}(X)$.

Соответствующие формальные тексты имеют вид

(1′) $(\forall\, u)(u \in X \to (\exists\, v)(\exists\, w)\, u = (v, w))$;

(2′) $(\forall\, u)(u \in Y \leftrightarrow (\exists\, v)(\exists\, w)\, w = (u, v) \wedge w \in X)$;

(3′) $(\forall\, u)(u \in Z \leftrightarrow (\exists\, v)(\exists\, w)\, w = (v, u) \wedge w \in X)$.

Таким образом, в (1)–(3) речь идет о том, что элементами X служат упорядоченные пары, причем Y — *область определения* X, а Z — *это область значений* X. При этом X иногда называют *абстрактным отношением.*

Ограничение X на U есть по определению $X \cap (U \times \mathrm{im}(X))$. Его обозначают $X \restriction U$. Если существует и притом единственное z, для которого $(y, z) \in X$, то полагают $X`y := z$. В остальных случаях считают $X`y := \varnothing$. Наконец, по определению $X``y := \mathrm{im}(X \restriction y)$. Вместо $X``\{z\}$ пишут $X(x)$ или даже Xx, если это не приводит к недоразумениям.

Однозначность X, или сокращенно $\mathrm{Un}(X)$, выражают формулой

$$\mathrm{Un}(X) := (\forall\, u)(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)((u, v_1) \in X \wedge (u, v_2) \in X \to v_1 = v_2).$$

Полагают $\mathrm{Fnc}\,(X) := \mathrm{Func}\,(X) := \mathrm{Un}(x) \wedge \mathrm{Rel}\,(X)$. Если выполнено $\mathrm{Fnc}\,(X)$, то по очевидным причинам X часто именуют *функцией* или *отображением*, реже *морфизмом.* При этом для выражения $(u, v) \in X$ приняты записи $v = X(u)$, $X : u \mapsto v$ и т. п. Далее, фраза F — *отображение* или *функция* из X в Y означает, что $F \subset X \times Y$, при этом выполнено $\mathrm{Fnc}\,(F)$ и область определения F совпадает с X:

$$F : X \to Y := F \subset X \times Y \wedge \mathrm{Fnc}\,(F) \wedge \mathrm{dom}(F) = X.$$

Чтобы подчеркнуть тот факт, что рассматривается функция F с областью определения X, используют и другие широко распространенные выражения: «функция F определена на X» или «F действует на всем X» и т. п. В некоторых разделах математики, в частности, в теории категорий, о которой пойдет речь в главе 3, по умолчанию абстрактная запись $F : X \to Y$ не подразумевает, вообще говоря, что область определения F есть весь объект X. Эта маленькая тонкость и небольшая коллизия в обозначениях традиционны для современной математики и обычно не вызывают затруднений.

Стоит подчеркнуть, что здесь и в дальнейшем мы с неизбежностью придерживаемся свободной точки зрения, заключая математические соглашения с читателем об обозначениях и сокращениях и, в частности, о способах расстановки и опускания скобок. Иначе говоря, появление и ликвидация скобок, как правило, подчинены соображениям удобства и легкости понимания в большей мере, чем требованиям педантичной формализации текущего фрагмента текста.

1.2.5. Абстрактные отношения достойны особого внимания. Приведем уместные подробности.

Соответствием из множества X в множество Y называют упорядоченную тройку $\Phi := (F, X, Y)$, где F — некоторое подмножество произведения $X \times Y$. Отметим, что для F выполнено $\mathrm{Rel}\,(F)$. Часто говорят, что F — *график*, X — область отправления и Y — область прибытия соответствия Φ. При этом пишут $\mathrm{Gr}(\Phi) = F$. Напомним, что *отношением* или *бинарным отношением* на X называют соответствие, у которого область отправления и область прибытия есть X.

Образом множества $A \subset X$ *относительно соответствия* Φ называют проекцию на Y множества $(A \times Y) \cap\ F$, обозначаемую символом $\Phi(A)$ или даже $F(A)$. Итак,

$$\Phi(A) := F(A) := \{y \in Y : (\exists\, x \in A)((x, y) \in F)\}.$$

Задание соответствия Φ равносильно указанию отображения

$$\widetilde{\Phi} : x \to \Phi(\{x\}) \in \mathscr{P}(Y) \quad (x \in X),$$

где $\mathscr{P}(Y)$ — совокупность всех подмножеств множества Y. На этом основании соответствие Φ иногда отождествляется с отображением $\widetilde{\Phi}$. Более того, часто не различают отображение $\widetilde{\Phi}$, соответствие Φ и график Φ, используя одну и ту же букву для их обозначения. Пишут также $\Phi(x)$ вместо $\Phi(\{x\})$.

Область определения соответствия Φ — это область определения его графика F. Иначе говоря,

$$\mathrm{dom}(\Phi) := \{x \in X : \Phi(x) \neq \varnothing\}.$$

Аналогично, область значений или образ соответствия $\mathrm{im}(\Phi) := \mathrm{im}(F)$ — это образ его графика.

1.2.6. Предположим, что X и Y — абстрактные отношения, т. е. $\mathrm{Rel}\,(X)$ и $\mathrm{Rel}\,(Y)$. Можно организовать *суперпозицию* (или *композицию*) X и Y, обозначаемую символом $Y \circ X$, собирая в единое целое в точности те упорядоченные пары (x, z), для которых $(x, y) \in X$ и $(y, z) \in Y$ при подходящем y:

$$(\forall\, u)(u \in Y \circ X \leftrightarrow (\exists\, x)(\exists\, y)(\exists\, z)(x, y) \in X \wedge (y, z) \in Y \wedge u = (x, z)).$$

Имея абстрактное отношение X, определяют обратное абстрактное отношение X^{-1} по правилу:

$$(\forall\, u)(u \in X^{-1} \leftrightarrow (\exists\, x)(\exists\, y)(x, y) \in X \wedge u = (y, x)).$$

Символом I_X обозначают *тождественное отношение* на X, т. е.

$$(\forall\, u)(u \in I_X \leftrightarrow (\exists\, x)(x \in X \wedge u = (x, x))).$$

Детализируем сказанное для соответствий.

Итак, пусть $\Phi := (F, X, Y)$ — это соответствие из X в Y. Положим $F^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in F\}$. Соответствие $\Phi^{-1} := (F^{-1}, Y, X)$ называют *обратным* для Φ. Рассмотрим еще одно соответствие $\Psi := (G, Y, Z)$, и пусть H — образ множества $(F \times Z) \cap (X \times G)$ при отображении $(x, y, z) \mapsto (x, z)$. Ясно, что

$$H = \{(x, z) \in X \times Z : (\exists\, y \in Y)((x, y) \in F \wedge (y, z) \in G)\},$$

т. е. H совпадает с суперпозицией $G \circ F$ графиков G и F. Соответствие $\Psi \circ \Phi := (G \circ F, X, Z)$ называют *композицией соответствий* Φ и Ψ. Справедливы следующие очевидные равенства:

$$(\Psi \circ \Phi)^{-1} = \Phi^{-1} \circ \Psi^{-1}, \quad \Theta \circ (\Psi \circ \Phi) = (\Theta \circ \Psi) \circ \Phi.$$

1.2.7. Остановимся еще на одном понятии, связанном с соответствиями. Рассмотрим соответствие $\Phi := (F, X, Y)$. *Полярой* $\pi_\Phi(A)$ *множества* $A \subset X$ *относительно соответствия* Φ называют совокупность таких $y \in Y$, что $A \times \{y\} \subset F$. Таким образом,

$$\pi_\Phi(A) := \pi_F(A) := \{y \in Y : (\forall\, x \in A)\,((x, y) \in F)\}.$$

Если соответствие Φ фиксировано, то для простоты пишут $\pi(A)$ вместо $\pi_\Phi(A)$ и $\pi^{-1}(A)$ вместо $\pi_{\Phi^{-1}}(A)$.

Простейшие свойства поляр таковы:

(1) если $A \subset B \subset X$, то $\pi(A) \supset \pi(B)$;

(2) для любого $A \subset X$ выполнены включения

$$A \subset \pi^{-1}(\pi(A)), \qquad A \times \pi(A) \subset F;$$

(3) если $A \times B \subset F$, то $B \subset \pi(A)$ и $A \subset \pi^{-1}(B)$;

(4) если $(A_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — это непустое семейство подмножеств множества X, то

$$\pi\Big(\bigcup\nolimits_{\xi \in \Xi} A_\xi\Big) = \bigcap\nolimits_{\xi \in \Xi} \pi(A_\xi);$$

(5) если $A \subset X$ и $B \subset Y$, то

$$\pi(A) = \pi(\pi^{-1}(\pi(A))), \qquad \pi^{-1}(B) = \pi^{-1}(\pi(\pi^{-1}(B))).$$

1.2.8. В случае $\mathrm{Rel}\,(X) \wedge ((X \cap Y^2) \circ (X \cap Y^2) \subset X)$ говорят, что X — *транзитивное* отношение на Y. Если $\mathrm{Rel}\,(X) \wedge (I_Y \subset X)$, то X называют *рефлексивным* (на Y). Если $X = X^{-1}$, то X называют *симметричным* (на Y). Наконец, при $\mathrm{Rel}\,(X) \wedge ((X \cap X^{-1}) \cap Y^2 \subset I_Y)$ используют термин «X — *антисимметричное* отношение на Y». Здесь, конечно же, использовано стандартное сокращение: $Y^2 := Y \times Y$.

Рефлексивное и транзитивное отношение называют *предпорядком* (или отношением предпорядка). Антисимметричный предпорядок — это *порядок*. Симметричный предпорядок — это *эквивалентность*. Используют и другую стандартную в данной ситуации терминологию. Напомним, в частности, что порядок X на Y называют *линейным*, а само Y — *цепью* (относительно X), если $Y^2 \subset X \cup X^{-1}$. Если всякое непустое подмножество множества Y имеет наименьший (относительно порядка X) элемент, то говорят, что X *вполне упорядочивает* Y или что Y *вполне упорядочено* (подразумеваемым порядком X).

1.2.9. Кванторы называют *ограниченными* или, точнее, ограниченными y, если они входят в текст в виде $(\forall\, x \in y)$ или $(\exists\, x \in y)$. Существует классификация формул теории множеств (и вообще любой теории первого порядка), основанная на характере использования ограниченных и неограниченных (т. е. не являющихся ограниченными) кванторов. В дальнейшем особую роль будут играть два класса формул — ограниченные формулы, называемые иначе Σ_0-*формулами,* а также Σ_1-формулы. Говорят, что формула φ *ограничена*, если всякий квантор присутствует в φ в виде $(\forall\, x \in y)$ или $(\exists\, x \in y)$ (см. сокращения в 1.2.2). Формулу φ относят к классу Σ_1 или называют Σ_1-*формулой*, если φ строится из атомарных формул и их отрицаний с помощью только логических операций $\wedge$, $\vee$, $(\forall\, x \in y)$ и $(\exists\, x)$. Ясно, что всякая ограниченная формула попадает в класс Σ_1. Однако не всякая Σ_1-формула ограничена и существуют формулы, не содержащиеся в классе Σ_1. Соответствующие примеры мы рассмотрим ниже в 1.2.10 и 1.2.11.

1.2.10. Запись $z = \{x, y\}$ эквивалентна ограниченной формуле

$$x \in z \wedge y \in z \wedge (\forall\, u \in z)(u = x \vee u = y).$$

Отсюда видно, что упорядоченная пара введена ограниченной формулой. То же самое можно сказать и о декартовом произведении, так как $Z = X \times Y$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}(\forall\, z \in Z)(\exists\, x \in X)(\exists\, y \in Y)(z = (x, y))\wedge&\\ \wedge\, (\forall\, x \in X)(\forall\, y \in Y)\ (\exists\, z \in Z)\ (z = (x, y)).&\end{aligned}$$

Еще одну ограниченную формулу доставляет понятие «отображение F из X в Y» (см. 1.2.4). Действительно, из сказанного выше следует, что $F \subset X \times Y$ — ограниченная формула, а кроме того, выражения $\mathrm{dom}(F) = X$ и $\mathrm{Un}(F)$, эквивалентные соответственно формулам

$$(\forall\, x \in X)(\exists\, y \in Y)(\exists\, z \in F)z = (x, y),$$
$$(\forall\, z \in F)(\forall\, x \in X)(\forall\, y_1 \in Y)(\forall\, y_2 \in Y)z = (x, y_1) \wedge z = (x, y_2) \to y_1 = y_2,$$

также являются ограниченными формулами.

1.2.11. Утверждение «множества x и y *равномощны*», означающее, что «существует биекция между x и y» или символически $x \simeq y$, можно записать Σ_1-формулой так:

$$(\exists\, f)(f : x \to y \wedge \mathrm{im}(f) = y \wedge \mathrm{Un}(f^{-1})).$$

Важно помнить, что это обстоятельство не может быть выражено никакой ограниченной формулой. Еще одну Σ_1-формулу дает понятие абстрактного отношения:

$$\mathrm{Rel}\,(X) := (\forall\, u \in X)(\exists\, v)(\exists\, w)u = (v, w).$$

Следующая формула, утверждающая, что множество y не равномощно никакому своему элементу, в класс Σ_1 не входит:

$$(\forall\, x \in y)\ \neg(x \simeq y).$$

1.3. Аксиоматика Цермело — Френкеля

Как уже было отмечено в 1.2.1, аксиомы теории множеств включают в себя логические аксиомы теорий первого порядка, фиксирующие классические правила умозаключений. Ниже будут перечислены специальные аксиомы теории множеств ZF_1–ZF_6 и AC. Если принять в качестве специальных аксиом ZF_1–ZF_6, то возникнет аксиоматическая система, которую называют *теорией множеств Цермело — Френкеля* и обозначают ZF. Добавление к ZF аксиомы выбора AC приводит к более широкой теории, которую по-прежнему именуют теорией Цермело — Френкеля, но обозначают символом ZFC. Отметим, что приводимые ниже параллельные словесные формулировки аксиом отражают первичные канторовы представления о множествах.

1.3.1. При изучении ZFC часто используют термины *свойство* и *класс*. Уточним их формальный статус. Рассмотрим формулу $\varphi = \varphi(x)$, построенную в рамках ZFC (символически: $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$). Вместо текста $\varphi(y)$ пишут $y \in \{x : \varphi(x)\}$. Таким образом, действует так называемая *схема Чёрча* для классификации

$$y \in \{x : \varphi(x)\} := \varphi(y).$$

Встречая запись $y \in \{x : \varphi(x)\}$, на языке ZFC говорят, что y обладает свойством φ, или y принадлежит классу $\{x : \varphi(x)\}$. В этом смысле свойство, формула и класс в ZFC — одно и то же. Схемой Чёрча мы фактически уже пользовались в 1.2.2 и 1.2.3. При работе с ZFC удобны и другие широко распространенные сокращения:

$$\mathbb{U} := \{x : x = x\} \text{ — } \textit{универсум} \text{ или } \textit{класс всех множеств};$$

$$\{x : \varphi(x)\} \in \mathbb{U} := (\exists\, z)(\forall\, y)\varphi(y) \leftrightarrow y \in z;$$

$$\{x : \varphi(x) \wedge \psi(x)\} := \{x : \varphi(x), \psi(x)\} := \{x : \varphi(x)\} \cap \{x : \psi(x)\};$$

$$x \cup y := \bigcup \{x, y\}, \quad x \cap y \cap z := \bigcap \{x, y, z\}, \ldots$$

Перейдем теперь к формулировкам специальных аксиом ZFC.

1.3.2. Аксиома экстенсиональности $\mathbf{ZF_1}$: *два множества совпадают в том (и только в том) случае, если они состоят из одних и тех же элементов:*

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y.$$

Отметим, что вторую эквивалентность без изменения объема аксиомы можно заменить на $\rightarrow$, ибо обратная импликация является теоремой исчисления предикатов.

1.3.3. Аксиома объединения $\mathbf{ZF_2}$: *объединение множества множеств — также множество:*

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(\exists\, u)(z \in u \wedge u \in x) \leftrightarrow z \in y.$$

Используя сокращения из 1.2.2 и 1.3.1, аксиому ZF_2 переписывают в виде

$$(\forall\, x) \bigcup x \in \mathbb{U}.$$

1.3.4. Аксиома степени $\mathbf{ZF_3}$: *все подмножества данного множества составляют некоторое множество*, т. е.

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(z \in y \leftrightarrow (\forall\, u)(u \in z \rightarrow u \in x)),$$

или в краткой записи

$$(\forall\, x)\mathscr{P}(x) \in \mathbb{U}.$$

1.3.5. Аксиома подстановки $\mathbf{ZF}_4^{\varphi}$: *образ множества относительно функции — снова множество:*

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)(\varphi(x,y)) \wedge \varphi(x,z) \to y = z) \to$$
$$\to (\forall\, u)(\exists\, v)(\forall\, y)(y \in v \leftrightarrow (\exists\, x \in u)\varphi(x,y)).$$

Здесь φ — формула ZFC, не содержащая свободных вхождений v. В несколько сокращенной записи:

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)(\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \to y = z) \to$$
$$\to (\forall\, u)(\{y :\, (\exists\, x \in u)\varphi(x,y)\} \in \mathbb{U}).$$

Отметим, что ZF_4^{φ} является схемой для бесконечного набора аксиом, так как для каждой подходящей $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ формулируется своя аксиома. Тем не менее для краткости и единообразия говорят просто об аксиоме подстановки, имея в виду отмеченную ее особенность.

Сформулируем полезные следствия ZF_4^{φ}.

1.3.6. Пусть $\psi = \psi(z)$ — формула ZFC. Тогда для любого множества x можно составить его подмножество, отбирая элементы x со свойством ψ, т. е.

$$(\forall\, x)\{z \in x :\, \psi(x)\} \in \mathbb{U}.$$

Это утверждение — аксиома ZF_4^{φ}, где в качестве φ фигурирует формула $\psi(x) \wedge (x = y)$. Приведенное положение часто именуют *аксиомой выделения* или *аксиомой свертывания.*

1.3.7. Применяя аксиому ZF_4^{φ} для формулы

$$\varphi(u,v) := (u = \varnothing \to v = x) \wedge (u \neq \varnothing \to v = y)$$

и множества $u := \mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$, мы убеждаемся в том, что неупорядоченная пара $\{x,y\}$ двух множеств (ср. 1.2.3) — снова множество. Последнее утверждение часто именуют *аксиомой неупорядоченной пары.*

1.3.8. Аксиома бесконечности $\mathbf{ZF_5}$: *существует по крайней мере одно бесконечное множество*:

$$(\exists\, x)(\varnothing \in x \wedge (\forall\, y)(y \in x \to y \cup \{y\} \in x)).$$

Значит, существует такое множество x, что $\varnothing \in x$, $\{\varnothing\} \in x$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in x$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \in x$ и т. д. Внимательный читатель заметит некоторую щель между формальной и неформальной формулировками аксиомы бесконечности. Бдительный читатель может заподозрить злоупотребление термином «бесконечность». На самом деле аксиома бесконечности относится к основополагающим доктринам канторианства. В этой связи некоторое таинство здесь неизбежно и должно приветствоваться.

1.3.9. Аксиома фундирования $\mathbf{ZF_6}$: *всякое непустое множество имеет непересекающийся со всем этим множеством элемент*

$$(\forall\, x)(x \neq \varnothing \to (\exists\, y)(y \in x \wedge y \cap x = \varnothing)).$$

Применив аксиому ZF_6 к одноэлементному множеству $x := \{y\}$, получим $y \notin y$. Несколько забегая вперед, отметим, что по аналогичной причине (на этот раз нужно взять $x := \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$) не существуют бесконечно убывающие $\in$-последовательности $x_1 \ni x_2 \ni \ldots \ni x_n \ni \ldots$

1.3.10. Аксиома выбора AC: *произведение непустого множества непустых множеств не пусто*:

$$(\forall\, x)(\exists\, f)(\mathrm{Fnc}\,(f) \wedge x \subset \mathrm{dom}(f)) \wedge (\forall\, y \in x) y \neq \varnothing \to f(y) \in y.$$

Функцию f в описанной ситуации называют *выбирающей* для x.

Известно большое количество утверждений, эквивалентных аксиоме выбора в рамках рассматриваемой нами теории, см., например, книгу Т. Йеха [254]. Приведем формулировки двух наиболее популярных из них.

Теорема Цермело (принцип полного упорядочения). *Всякое множество может быть вполне упорядочено.*

Лемма Куратовского — Цорна (принцип максимальности). *Пусть M — (частично) упорядоченное множество, в котором любое линейное упорядоченное множество имеет верхнюю границу. Тогда любой элемент M мажорируется некоторым максимальным элементом.*

1.3.11. На основе приведенной аксиоматики возникает точное представление о классе всех множеств как об «универсуме фон Неймана». Исходным объектом построения выступает пустое множество. Элементарный шаг введения новых множеств из уже построенных состоит в формировании объединения множеств подмножеств имеющихся множеств. Трансфинитное повторение таких шагов исчерпывает класс всех множеств. Классы (в «платонистском» стиле) можно мыслить как внешние объекты по отношению к элементам универсума фон Неймана. Класс в этом понимании есть совокупность множеств, удовлетворяющих теоретико-множественному свойству, описываемому формулой теории Цермело — Френкеля. Поэтому класс, состоящий из элементов некоторого множества (по аксиоме подстановки) сам является множеством. Формально корректное определение универсума фон Неймана требует предварительного знакомства с понятиями ординала и кумулятивной иерархии. Подробнее об этом будет сказано в параграфе 1.5.

1.4. Теория фон Неймана — Гёделя — Бернайса

Схема аксиом подстановки ZF_4^{φ} теории множеств Цермело — Френкеля ZFC охватывает бесконечное число аксиом из-за произвола в выборе формулы φ. Стоит попытаться ввести новые примитивные объекты, определяемые формулами φ из ZF_4^{φ}. Тогда множество утверждений, содержащихся в схеме ZF_4^{φ}, предстанет в форме одной аксиомы о таких объектах. При этом потребуются аксиомы, из которых вытекало бы существование объекта, соответствующего формуле. Поскольку все формулы строятся по единой процедуре за конечное число шагов, то не исключено, что можно достичь желаемого с помощью конечного числа аксиом. Это основное соображение, идущее от Дж. фон Неймана, заложено в аксиоматику теории множеств, развитой К. Гёделем и П. Бернайсом и обозначаемой NGB.

Первоначальным неопределяемым объектом (понятием) NGB является *класс*. Класс, служащий элементом какого-либо класса, называют *множеством*. Прочие классы именуют *собственными*. Объективизация классов составляет коренное отличие NGB от ZFC, в метаязыке которой «класс» и «свойство» принято воспринимать как синонимы.

При аксиоматическом изложении NGB принято использовать, как правило, одну из двух различных модификаций языка ZFC. Первая из них состоит в добавлении к языку ZFC нового одноместного предикатного символа M. Содержательно $M(X)$ означает, что X есть множество. Вторая модификация использует два разных типа переменных для множеств и классов. Стоит подчеркнуть, что указанные приемы не являются обязательными для описания NGB и использованы лишь из соображений удобства.

1.4.1. Система NGB — это теория первого порядка (с равенством). Строго говоря, язык NGB ничем не отличается от языка ZFC. Однако в качестве переменных принято употреблять прописные латинские буквы X, Y, Z, $\dots$ (с индексами). Строчные латинские буквы мы оставляем для argo, возникающего в результате введения сокращающих символов, отсутствующих в языке NGB.

Пусть $M(X)$ служит сокращением для формулы $(\exists\, Y)(X \in Y)$ (читается «X есть множество»). Строчные латинские буквы x, y, z, $\dots$ (с индексами) будут обозначать переменные для множеств. Точнее, формулы $(\forall\, x)\varphi(x)$ и $(\exists\, x)\varphi(x)$ являются сокращениями для формул $(\forall\, X)(M(X) \to \varphi(X))$ и $(\exists\, X)(M(X) \wedge \varphi(X))$ соответственно. Содержательно эти формулы означают: «для любого множества верно φ» и «существует множество, для которого верно φ». При использовании указанных сокращений переменная X не должна входить в формулу φ, а также в те формулы, частями которых являются эти сокращения. Впрочем, установленных правил употребления строчных и прописных букв мы будем придерживаться лишь в пределах текущего параграфа. Убедившись же в принципиальной формализуемости теории классов, мы постепенно вернемся к общепринятому — более свободному — математическому языку. Например, перенося теоретико-множественную концепцию отображения в новый мир, мы обычно говорим о *класс-функциях* F, подразумевая, что такое F может уже и не быть множеством, но тем не менее обладает привычными свойствами функции. Такая практика представляет собой неотъемлемую привилегию работающего математика.

Приступим к формулировке специальных аксиом NGB.

1.4.2. Аксиома экстенсиональности $\mathbf{NGB_1}$: *два класса совпадают, если (и только если) они состоят из одних и тех же элементов*

$$(\forall\, X)(\forall\, Y)(X = Y \leftrightarrow (\forall\, Z)(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y)).$$

1.4.3. Аксиомы для множеств:

(1) аксиома (неупорядоченной) пары $\mathbf{NGB_2}$:

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\exists\, z)(\forall\, u)(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y);$$

(2) аксиома объединения $\mathbf{NGB_3}$:

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(z \in y \leftrightarrow (\exists\, u)(u \in x \wedge z \in u));$$

(3) аксиома степени $\mathbf{NGB_4}$:

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(z \in y \leftrightarrow z \subset x);$$

(4) аксиома бесконечности $\mathbf{NGB_5}$:

$$(\exists\, x)(\varnothing \in x \wedge ((\forall\, y)(y \in x \leftrightarrow y \cup \{y\} \in x))).$$

Как видно, эти аксиомы совпадают с одноименными аналогами из ZFC, сформулированными в 1.3.3, 1.3.4, 1.3.7 и 1.3.8. Следует только иметь в виду, что в словесных формулировках слово множество здесь уже означает класс, являющийся элементом класса. В символической же записи аксиом малые латинские буквы свидетельствуют о сокращениях (см. 1.4.1). Так, например, частично развернутая аксиома степени NGB_4 имеет вид

$$(\forall\, X)(M(X) \to (\exists\, Y)(M(Y) \wedge (\forall\, Z)(M(Z) \to (Z \in Y \leftrightarrow Z \subset X)))).$$

В записи аксиомы бесконечности NGB_5 использовано сокращение

$$\varnothing \in x := (\exists\, y)(y \in x \wedge (\forall\, u)(u \notin y)).$$

Существование пустого множества в NGB заранее не предполагается, как и в ZFC, а вытекает из аксиом. Тем не менее иногда это утверждение включают в список NGB в качестве отдельной аксиомы:

(5)$(\exists\, y)(\forall\, u)(u \notin y)$.

1.4.4. Аксиома подстановки $\mathbf{NGB_6}$: *если класс X однозначен, то для любого множества y класс вторых координат тех пар из X, первые координаты которых входят в y, является множеством:*

$$(\forall\, X)(\mathrm{Un}(X) \to (\forall\, y)(\exists\, z)(\forall\, u)(u \in z \leftrightarrow (\exists\, v)((v, u) \in X \wedge v \in y))),$$

где $\mathrm{Un}(X) := (\forall\, u)(\forall\, v)(\forall\, w)((u, v) \in X \wedge (u, w) \in X \to v = w)$.

Как и предполагалось, схема ZF_4^{φ} превратилась в одну аксиому. Здесь же отметим, что схеме аксиом выделения из ZF (см. 1.3.6) также соответствует одна аксиома — *аксиома выделения*. Она утверждает, что для любых множества x и класса Y существует множество, состоящее из элементов, общих для x и Y, т. е.

$$(\forall\, x)(\forall\, Y)(\exists\, z)(\forall\, u)(u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in Y).$$

Эта аксиома слабее аксиомы подстановки (она выводится из NGB_6 и нижеследующей теоремы 1.4.14), но в некоторых случаях более удобна в обращении.

Следующая группа из аксиом NGB_7–NGB_{13} предназначена для формирования классов. Эти аксиомы утверждают, что для некоторых свойств, выраженных формулами, существуют классы всех множеств, обладающих соответствующими свойствами. Единственность при этом вытекает, как это обычно бывает, из аксиомы экстенсиональности NGB_1.

1.4.5. Аксиома $\in$-отношения $\mathbf{NGB_7}$: *существует класс, состоящий в точности из тех упорядоченных пар множеств, у которых первая координата служит элементом второй*:

$$(\exists\, X)(\forall\, y)(\forall\, z)((y, z) \in X \leftrightarrow y \in z)).$$

1.4.6. Аксиома пересечения $\mathbf{NGB_8}$: *для любых двух классов существует их пересечение*:

$$(\forall\, X)(\forall\, Y)(\exists\, Z)(\forall\, u)(u \in Z \leftrightarrow u \in X \wedge u \in Y).$$

1.4.7. Аксиома дополнения $\mathbf{NGB_9}$: *для каждого класса существует дополнительный ему класс*:

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(u \in Y \leftrightarrow u \notin X).$$

Отсюда вытекает существование *универсального класса* $\mathbb{U} := \overline{\varnothing}$ — дополнения *пустого класса* $\varnothing$.

1.4.8. Аксиома области определения $\mathbf{NGB_{10}}$: *для каждого класса X упорядоченных пар существует класс $Y := \mathrm{dom}(X)$, элементами которого являются в точности первые координаты элементов класса X*:

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(u \in Y \leftrightarrow (\exists\, v)((u, v) \in X)).$$

1.4.9. Аксиома декартова произведения $\mathbf{NGB_{11}}$: *для всякого класса X существует класс $Y := X \times \mathbb{U}$, состоящий из всевозможных упорядоченных пар, первые координаты которых являются элементами класса X*:

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(\forall\, v)((u, v) \in Y \leftrightarrow u \in X).$$

1.4.10. Аксиомы перестановки $\mathbf{NGB_{12}}$ и $\mathbf{NGB_{13}}$. *Пусть $\sigma := (\imath_1, \imath_2, \imath_3)$ — перестановка множества $\{1, 2, 3\}$. Класс Y называют σ-транспонированием класса X, если $(x_1, x_2, x_3) \in Y$ тогда и только тогда, когда $(x_{\imath_1}, x_{\imath_2}, x_{\imath_3}) \in X$.*

Для любого класса X существуют его $(2, 3, 1)$- и $(1, 3, 2)$-транспонирования:

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(\forall\, v)(\forall\, w)((u, v, w) \in Y \leftrightarrow (v, w, u) \in X);$$
$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(\forall\, v)(\forall\, w)((u, v, w) \in Y \leftrightarrow (u, w, v) \in X).$$

1.4.11. Аксиома фундирования $\mathbf{NGB_{14}}$: *в произвольном непустом классе есть элемент, не имеющий с ним общих элементов*:

$$(\forall\, X)(X \neq \varnothing \rightarrow (\exists\, y)(y \in X \wedge y \cap X = \varnothing)).$$

1.4.12. Аксиома выбора $\mathbf{NGB_{15}}$: *для каждого класса X существует выбирающая функция, т. е. однозначный класс, сопоставляющий всякому непустому множеству из X некоторый его элемент*:

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall u)(u \neq \varnothing \wedge u \in X \rightarrow (\exists!\, v)(v \in u \wedge (u, v) \in Y)).$$

Это очень сильная форма аксиомы выбора. Она равносильна существованию одновременного выбора по одному элементу из каждого непустого множества.

На этом список специальных аксиом NGB исчерпан. Как видно, аксиоматика NGB, в отличие от ZFC, конечна. Другое удобное качество системы NGB состоит в том, что она фактически оперирует и с множествами, и со свойствами множеств как с формальными объектами, осуществляя объективизацию, недоступную выразительным средствам ZFC.

1.4.13. Из группы аксиом формирования классов мы выведем несколько утверждений, которые потребуются нам при доказательстве общей теоремы о существовании классов.

(1) *Для любого класса существует его $(2,1)$-транспонирование*:

$$(\forall X)(\exists Z)(\forall u)(\forall v)((u, v) \in Z \leftrightarrow (v, u) \in X).$$

$\triangleleft$ Аксиома декартова произведения гарантирует существование класса $X \times \mathbb{U}$.

Последовательное применение аксиом $(2,3,1)$- и $(1,3,2)$-транспонирования к классу $X \times \mathbb{U}$ дает класс Y всех троек (v, u, w) таких, что $(v, u) \in X$. Воспользовавшись аксиомой области определения, заключаем, что $Z := \operatorname{dom}(Y)$ — искомый класс. $\triangleright$

(2) *Для любых двух классов существует их декартово произведение*:

$$(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)(\forall w)\big(w \in Z \leftrightarrow (\exists\, u \in X)(\exists\, v \in Y)(w = (u, v))\big).$$

$\triangleleft$ Нужно воспользоваться последовательно аксиомой декартова произведения, утверждением (1), аксиомой пересечения и положить $Z := (\mathbb{U} \times Y) \cap (X \times \mathbb{U})$. $\triangleright$

Для $n \geqslant 2$ в силу (2) определен класс $\mathbb{U}^n$ всех упорядоченных n-ок.

(3) *Для любого класса X существует класс $Z := (\mathbb{U}^n \times \mathbb{U}^m) \cap (X \times \mathbb{U}^m)$*:

$$(\forall X)(\exists Z)(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\forall y_1)\ldots(\forall y_m)$$
$$((x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in Z \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) \in X).$$

(4) *Для любого класса X существует класс $Z := (\mathbb{U}^m \times \mathbb{U}^n) \cap (\mathbb{U}^m \times X)$*:

$$(\forall X)(\exists Z)(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\forall y_1)\ldots(\forall y_m)$$
$$((y_1, \ldots y_m, x_1, \ldots, x_n) \in Z \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) \in X).$$

$\triangleleft$ Для доказательства (3) и (4) нужно применить аксиому декартова произведения и аксиому пересечения. $\triangleright$

(5) *Для любого класса X существует класс Z такой, что*

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\forall y_1)\ldots(\forall y_m)$$
$$((x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_m, x_n) \in Z \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) \in X).$$

◁ Следует применить аксиомы перестановки и аксиому декартова произведения. ▷

1.4.14. Теорема. *Пусть φ — формула, в построении которой участвуют только переменные из числа $X_1, \dots, X_n$, $Y_1, \dots, Y_m$, причем φ предикативна, т. е. в φ связаны лишь переменные для множеств. Тогда в* NGB *доказуемо утверждение*

$$(\forall\, Y_1)\dots(\forall\, Y_m)(\exists\, Z)(\forall\, x_1)\dots(\forall\, x_n)$$
$$((x_1, \dots, x_n) \in Z \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)).$$

◁ Пусть формула φ записана с учетом принятых сокращений в таком виде, что связанными в ней являются только переменные для множеств. Достаточно рассмотреть те φ, которые не содержат подформул вида $Y \in W$ и $X \in X$, ибо последние можно заменить на эквивалентные: $(\exists\, x)(x = Y \wedge x \in W)$ и $(\exists\, u)(u = X \wedge u \in X)$. Кроме того, можно исключить из φ символ равенства, подставив в соответствии с аксиомой экстенсиональности вместо $X = Y$ выражение $(\forall\, u)(u \in X \leftrightarrow u \in Y)$. Доказательство проводится индукцией по *длине k формулы* φ, т. е. по числу k логических связок и кванторов, входящих в φ.

При $k = 0$ формула φ атомарна и имеет вид $x_\imath \in x_\jmath$, или $x_\jmath \in x_\imath$, или $x_\imath \in Y_l$ ($\imath < \jmath \leqslant n,\ l \leqslant m$). Если $\varphi := x_\imath \in x_\jmath$, то по аксиоме $\in$-отношения существует класс W_1, для которого

$$(\forall\, x_\imath)(\forall\, x_\jmath)((x_\imath, x_\jmath) \in W_1 \leftrightarrow x_\imath \in x_\jmath).$$

Если же $\varphi := x_\jmath \in x_\imath$, то вначале, воспользовавшись той же аксиомой, мы находим класс W_2 со свойством

$$(\forall\, x_\imath)(\forall\, x_\jmath)((x_\jmath, x_\imath) \in W_2 \leftrightarrow x_\jmath \in x_\imath),$$

а затем применяем 1.4.13 (1). В результате мы подберем класс W_3, для которого будет

$$(\forall\, x_\imath)(\forall\, x_\jmath)((x_\imath, x_\jmath) \in W_3 \leftrightarrow x_\jmath \in x_\imath).$$

Итак, в любом из этих двух случаев существует такой класс W, что справедлива формула

$$\Phi := (\forall\, x_\imath)(\forall\, x_\jmath)((x_\imath, x_\jmath) \in W \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)).$$

На основании 1.4.13 (4) в формуле Φ можно заменить подформулу $(x_\imath, x_\jmath) \in W$ на $(x_1, \dots, x_{\imath-1}, x_\imath) \in Z_1$ для некоторого другого класса Z_1 и добавить кванторы $(\forall\, x_1)\dots(\forall\, x_{\imath-1})$ в начале. Пусть Ψ — получаемая при этом формула. В силу 1.4.13 (5) в формуле Ψ вместо подформулы $(x_1, \dots, x_{\imath-1}, x_\imath, x_\jmath) \in Z_1$ допустимо написать $(x_1, \dots,\ x_\imath,\ x_{\imath+1}, \dots, x_\jmath) \in Z_2$ для некоторого другого класса Z_2 и добавить кванторы $(\forall\, x_{\imath+1})\dots(\forall\, x_{\jmath-1})$ в начале формулы Ψ. Наконец, применив 1.4.13 (3) к Z_2, найдем класс Z, для которого верна формула

$$(\forall\, x_1)\dots(\forall\, x_n)((x_1, \dots, x_n) \in Z \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)).$$

Для оставшегося случая $x_\imath \in Y_l$ требуемое утверждение следует из существования декартовых произведений $W := \mathbb{U}^{\imath-1} \times Y_l$ и $Z := W \times \mathbb{U}^{n-\imath}$. Тем самым теорема установлена при $k = 0$.

Допустим, что для всех $k < p$ теорема доказана и формула φ имеет p логических связок и кванторов. Достаточно рассмотреть случаи, когда φ получается из каких-то формул с помощью отрицания, импликации и квантора общности.

Пусть $\varphi := \neg\psi$. По индукционному предположению существует класс V такой, что

$$(\forall\, x_1) \dots (\forall\, x_n)\big((x_1, \dots, x_n) \in V \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)\big).$$

По аксиоме дополнения имеется класс $Z := \mathbb{U} - V := \mathbb{U} \setminus V$, удовлетворяющий нужным условиям.

Пусть $\varphi := \psi \to \theta$. Вновь по индукционному предположению найдутся классы V и W такие, что для V и ψ выполнено отмеченное выше и, кроме того,

$$(\forall\, x_1) \dots (\forall\, x_n)((x_1, \dots, x_n) \in W \leftrightarrow \theta(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)).$$

Искомый класс $Z := \mathbb{U} \setminus (V \cap (\mathbb{U} \setminus W))$ существует ввиду аксиомы пересечения и аксиомы дополнения.

Пусть $\varphi := (\forall\, x)\psi$, а V и ψ те же, что и выше. Если применить аксиому области определения к классу $X := \mathbb{U} \setminus V$, то получим класс Z_1, для которого

$$(\forall\, x_1) \dots (\forall\, x_n)\big((x_1, \dots, x_n) \in Z_1 \leftrightarrow (\exists\, x)\neg\psi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)\big).$$

Класс $Z := \mathbb{U} \setminus Z_1$, который существует по аксиоме дополнения, будет искомым, ибо формула $(\forall\, x)\, \psi$ эквивалентна $\neg(\exists\, x)(\neg\psi)$. $\rhd$

1.4.15. Каждая аксиома формирования классов NGB_7–NGB_{13} является следствием теоремы 1.4.14 при подходящем выборе формулы φ. С другой стороны, сама эта теорема, как видно из доказательства, выводится из аксиом формирования классов. Замечательно, что вместо бесконечного числа утверждений, содержащихся в 1.4.14, можно обойтись конечным числом аксиом NGB_7–NGB_{13}.

Теорема 1.4.14 позволяет доказывать существование самых разнообразных классов. Так, для всякого класса Y существуют класс всех его подмножеств $\mathscr{P}(Y)$ и объединение всех элементов класса $\bigcup Y$, определяемые обычными формулами

$$(\forall\, u)(u \in \mathscr{P}(Y) \leftrightarrow u \subset Y),$$
$$(\forall\, u)\left(u \in \bigcup Y \leftrightarrow (\exists\, v)(v \in Y \wedge u \in v)\right).$$

В этом можно легко убедиться, если взять $\varphi(X, Y) := X \subset Y$ и $\varphi(X, Y) := (\exists\, V)(X \in V \wedge V \in Y)$. По аналогичным соображениям возможны определения Z^{-1}, $\mathrm{im}(Z)$, $Z \restriction Y$, $Z``Y$, $X \cup Y$ и т. п., где X, Y и Z — некоторые классы.

1.4.16. Теорема. *Всякая теорема* ZFC *является теоремой* NGB.

$\lhd$ Все аксиомы ZF являются теоремами NGB. Докажем единственную неочевидную часть этого утверждения, касающуюся аксиомы подстановки ZF_4^{φ}. Пусть формула φ не содержит свободных вхождений переменной y и $\{x, t, z_1, \dots, z_m\}$ — полный набор переменных, использованных в построении φ. Далее предположим, что для всех x, u, v, $z_1, \dots, z_m$ выполняется

$$\varphi(x, u, z_1, \dots, z_m) \wedge \varphi(x, v, z_1, \dots, z_m) \to u = v.$$

Формула φ предикативна, если в ней связанными являются лишь переменные для множеств. По теореме 1.4.14 существует класс Z такой, что

$$(\forall\, x)(\forall\, u)\big((x,u)\in Z\leftrightarrow\varphi(x,u,z_1,\dots,z_m)\big).$$

Из указанного выше свойства φ видно, что класс Z однозначен, т. е. в NGB доказуема $\mathrm{Un}(Z)$. По аксиоме подстановки NGB_6 существует множество y, для которого

$$(\forall\, v)\big(v\in y\leftrightarrow(\exists\, u)((u,v)\in Z\wedge u\in x)\big).$$

Ясно, что для y выполняется нужное соотношение

$$(\forall\, z_1)\dots(\forall\, z_m)(\forall\, v)\big(v\in y\leftrightarrow(\exists\, u\in x)\varphi(u,v,z_1,\dots,z_m)\big).\ \rhd$$

1.4.17. Теорема. *Каждая теорема* NGB, *в которой говорится о множествах, является теоремой* ZFC.

$\lhd$ Доказательство можно найти, например, в книге П. Дж. Коэна [84]. Оно требует привлечения некоторых фактов из теории моделей, выходящих за рамки настоящей книги. $\rhd$

Теоремы 1.4.16 и 1.4.17 часто формулируют в следующем виде.

1.4.18. Теорема. *Теория множеств фон Неймана — Гёделя — Бернайса* NGB *служит консервативным расширением теории множеств Цермело — Френкеля* ZFC.

1.5. Ординалы

Концепция ординала является ключевой при изучении бесконечных множеств. Она предназначена для трансфинитного итерирования различных математических построений или рассуждений, а также служит для измерения мощностей. Как именно это делается — тема текущего параграфа.

1.5.1. Рассмотрим классы X и Y. Скажем, что X есть *отношение порядка* или просто *порядок* на Y, если X является антисимметричным, рефлексивным и транзитивным отношением на Y. Антисимметричность, рефлексивность и транзитивность отношения можно записать так же, как и на языке ZFC (см. 1.2.8). Порядок X на Y называют *линейным*, если $Y\times Y\subset X\cup X^{-1}$. Говорят, что отношение X *вполне упорядочивает* Y или что Y — *вполне упорядоченный класс*, если X — порядок на Y и всякий непустой подкласс класса Y имеет наименьший элемент (относительно X). Классы X_1 и X_2, упорядоченные отношениями R_1 и R_2 соответственно, именуют *подобными*, если существует биекция h из X_1 на X_2 такая, что $(x,y)\in R_1\leftrightarrow(h(x),h(y))\in R_2$ для всех $x,y\in X_1$.

1.5.2. Введем отношение E формулой

$$(x,y)\in E\leftrightarrow(x\in y)\vee x=y.$$

Класс E существует в силу аксиомы $\in$-отношения NGB_7 и теоремы 1.4.14. Как видно, E — отношение порядка на универсальном классе $\mathbb{U}$.

Класс X называют *транзитивным* (это понятие не следует путать с понятием транзитивного отношения), если каждый его элемент является также и его подмножеством:

$$\mathrm{Tr}\,(X) := (\forall\, y)(y \in X \to y \subset X).$$

Ординальным классом мы будем именовать всякий транзитивный класс, вполне упорядоченный отношением E. Запись $\mathrm{Ord}\,(X)$ означает, что X — ординальный класс. Ординальный класс, являющийся множеством, называют *ординалом* (или *порядковым числом*, или *трансфинитным числом*). Класс всех ординалов обозначают символом On. Напомним, что ординалы символизируют, как правило, малыми греческими буквами. При этом приняты следующие сокращения:

$$\alpha < \beta := \alpha \in \beta, \quad \alpha \leqslant \beta := (\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta), \quad \alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}.$$

Если $\alpha < \beta$, то говорят, что α *предшествует* β, а β *следует* за α. Привлекая аксиому фундирования NGB_{14}, легко установить следующий факт.

1.5.3. *Класс является ординальным в том и только в том случае, если он транзитивен и линейно упорядочен отношением E.*

$\lhd$ Пусть транзитивный класс X линейно упорядочен отношением E. Возьмем непустой подкласс $Y \subset X$ и покажем, что Y имеет наименьший элемент. Существует по меньшей мере один элемент $y \in Y$. Если $y = \varnothing$, то y — искомый наименьший элемент в Y. Если же $y \neq \varnothing$, то по аксиоме фундирования можно подыскать элемент $x \in y$ такой, что $x \cap y = \varnothing$. Тогда x — наименьший элемент множества y, так как y линейно упорядочено. Ввиду линейной упорядоченности класса Y отношением E элемент x будет наименьшим и в классе Y. Значит, X — ординальный класс и достаточность указанного условия обоснована. Необходимость его очевидна. $\rhd$

Итак, в NGB или ZFC можно пользоваться более простым определением ординала:

$$\mathrm{Ord}\,(X) \leftrightarrow \mathrm{Tr}\,(X) \wedge (\forall\, u \in X)(\forall\, v \in X)(u \in v \vee u = v \vee v \in u).$$

Полезно подчеркнуть, что эквивалентность приведенных определений ординала не использует аксиому выбора.

Большинство приводимых ниже свойств ординалов можно вывести, не прибегая к аксиоме фундирования, пользуясь только первоначальным определением ординала. Это обстоятельство, важное, например, для обоснования совместимости аксиомы фундирования с остальными аксиомами ZF, для наших дальнейших целей несущественно.

1.5.4. Ниже нам потребуются несколько вспомогательных фактов.

(1) *Пусть X и Y — произвольные классы. Если X ординален, Y транзитивен и $X \neq Y$, то равносильны соотношения $Y \subset X$ и $Y \in X$.*

$\lhd$ При $Y \in X$ класс Y — множество и $Y \subset X$ из-за транзитивности X. Допустим, в свою очередь, что $Y \subset X$. Так как $X \neq Y$, то $Z := X - Y \neq \varnothing$. Класс Z имеет наименьший элемент $x \in Z$ (в смысле отношения порядка E). Это означает, что $x \cap Z = \varnothing$ или $x \subset Y$. Кроме того, $x \subset X$, ибо $x \in X$ и класс X

транзитивен. Возьмем элемент $y \in Y$. Так как X линейно упорядочен, то $x \in y$ или $x = y$, или, наконец, $y \in x$. Первые два соотношения с учетом транзитивности Y дают $x \in Y$, что противоречит вхождению $x \in Z$. Следовательно, $y \in x$. Значит, $Y \subset x$. Принимая в расчет уже доказанное включение $x \subset Y$, получаем $x = Y$. Окончательно мы заключаем, что $x = Y \wedge x \in X \to Y \in X$. $\triangleright$

(2) *Пересечение любых двух ординальных классов есть ординальный класс.*

$\triangleleft$ Очевидно. $\triangleright$

(3) *Если X и Y — ординальные классы, то*

$$X \in Y \vee X = Y \vee Y \in X.$$

$\triangleleft$ Пусть пересечение $X \cap Y = Z$ не совпадает ни с одним из классов X и Y. Тогда согласно (1) и (2) $Z \in X$ и $Z \in Y$, т. е. $Z \in X \cap Y = Z$. Однако для множества $Z \in X$ соотношение $Z \in Z$ невозможно. Следовательно, либо $Z = X$ и тогда $Y \subset X$, либо $Z = Y$ и тогда $X \subset Y$. Осталось сослаться на (1). $\triangleright$

1.5.5. Теорема. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) *элементами любого ординального класса могут быть только ординалы*;

(2) *класс* On *— единственный ординальный класс, не являющийся ординалом*;

(3) *для каждого ординала α множество $\alpha + 1$ служит ординалом, причем наименьшим из всех следующих за α ординалов*;

(4) *объединение $\bigcup X$ непустого класса ординалов $X \subset \mathrm{On}$ — ординальный класс*; *если X — множество, то $\bigcup X$ есть верхняя граница множества X в упорядоченном классе* On.

$\triangleleft$ (1): Возьмем ординальный класс X и элемент $x \in X$. Так как X транзитивен, то $x \subset X$. Следовательно, множество x линейно упорядочено отношением E. Установим $\mathrm{Tr}\,(x)$. Если $z \in y \in x$, то $z \in X$ ввиду транзитивности X. Из возможных трех случаев $z = x$, $x \in z$ и $z \in x$, первые два приводят к замкнутым циклам $z \in y \in z$ и $z \in y \in x \in z$, противоречащим аксиоме фундирования. Стало быть, $z \in x$. Итак, $z \in y \to z \in x$, т. е. $y \subset x$. Это доказывает $\mathrm{Tr}\,(x)$, а заодно и $\mathrm{Ord}\,(x)$.

(2): Линейная упорядоченность класса On следует из 1.5.4 (3), а его транзитивность — из (1). Таким образом, $\mathrm{Ord}\,(\mathrm{On})$. Если On — множество, то On — ординал и получается противоречие: $\mathrm{On} \in \mathrm{On}$. Следовательно, On — это ординальный класс, но не ординал. Для произвольного ординального класса X из $X \notin \mathrm{On}$ вытекает $X = \mathrm{On}$. Действительно, утверждение 1.5.4 (3) допускает кроме этой еще только одну возможность — $\mathrm{On} \in X$, которая, однако, противоречит тому, что On — собственный класс.

(3): Если α — ординал, то множество $\alpha+1$ линейно упорядочено по очевидным соображениям. Для $x \in \alpha + 1$ либо $x \in \alpha$, либо $x = \alpha$, причем в обоих случаях $x \subset \alpha$. Но $\alpha \subset \alpha + 1$. Стало быть, $x \subset \alpha + 1$, что и доказывает транзитивность $\alpha + 1$. Окончательно выводим, что $\alpha + 1$ — ординал и $\alpha < \alpha + 1$. Если $\alpha < \beta$ для некоторого ординала β, то $\alpha \in \beta$ и $\alpha \subset \beta$, т. е. $\alpha \cup \{\alpha\} \subset \beta$. Согласно 1.5.4 (1) верно либо $\alpha \cup \{\alpha\} \in \beta$, либо $\alpha \cup \{\alpha\} = \beta$. Значит, $\alpha + 1 \leqslant \beta$.

(4): Предположив, что $X \subset \mathrm{On}$ и $y \in Y := \bigcup X$, подыщем такой элемент $x \in X$, что $y \in x$. Поскольку x — ординал, то $y \subset x$ и, тем более, $y \subset Y$. Ввиду транзитивности класса On (см. (2)) из $x \in X$ следует $x \subset \mathrm{On}$, а потому $Y \subset \mathrm{On}$. Итак, Y — транзитивный подкласс On и, стало быть, Y — ординал. Если $\alpha \in X$, то $\alpha \subset Y$ и согласно 1.5.4 (1) $\alpha \leqslant Y$. Если же β — ординал и $\beta \geqslant \alpha$ для всех $\alpha \in X$, то $Y \subset \beta$ и вновь по 1.5.4 (1) $Y \leqslant \beta$. Следовательно, $Y = \sup(X)$. $\triangleright$

1.5.6. Точную верхнюю границу множества ординалов x принято обозначать $\lim(x)$. Ординал α называют *предельным*, если $\alpha \neq \varnothing$ и $\lim(\alpha) = \alpha$. Эквивалентно, α — предельный ординал, если он не представим в виде $\alpha = \beta + 1$ с каким-либо $\beta \in \mathrm{On}$. Обозначим символом K_{II} класс всех предельных ординалов. Ординалы, не входящие в K_{II}, образуют класс непредельных ординалов $K_{\mathrm{I}} := \mathrm{On} - K_{\mathrm{II}} = \{\alpha \in \mathrm{On} : (\exists\, \beta \in \mathrm{On})(\alpha = \beta + 1)\}$. Обозначим буквой ω наименьший предельный ординал (существование которого обеспечено теоремой 1.5.5 и аксиомой бесконечности). Можно показать, что ω совпадает с классом непредельных ординалов α таких, что каждый предшественник α также является непредельным:

$$\omega = \{\alpha \in \mathrm{On} :\ \alpha \cup \{\alpha\} \in K_{\mathrm{I}}\}.$$

Элементы ω называют *конечными ординалами* или *положительными целыми числами*. Наименьший ординал — нулевое множество $0 := \varnothing$ — принадлежит ω. Отличные от нуля элементы ω именуют *натуральными числами*. Следующий ординал $1 := 0 + 1 = 0 \cup \{0\} = \{\varnothing\}$ содержит единственный элемент 0. Далее, $2 := 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{0, \{0\}\}$, $3 := 2 \cup \{2\} = \{0, \{0\}, \{\{0, \{0\}\}\}$ и т. д. Итак,

$$\omega := \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}, \dots\} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Подчеркнем, что по давней онтологической традиции термин «натуральное число» принято применять только к элементам $\omega \setminus \{0\}$. Нуль в системе счета возник значительно позднее единицы и исторически «менее» натурален. Впрочем, в наше время термин «множество натуральных чисел» часто относят и ко всему ω, в чем нет большого греха. Для обозначения множества натуральных чисел используют специальный символ:

$$\mathbb{N} := \omega \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}.$$

В следующей теореме перечислены основные свойства множества целых положительных чисел ω. Собранные в систему, они известны под названием *аксиом Пеано*.

1.5.7. Теорема. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) $0 \in \omega$;

(2) *для каждого* $\alpha \in \omega$ *непосредственно следующий за ним ординал* $\alpha + 1$ *— натуральное число;*

(3) $0 \neq \alpha + 1$ *ни для какого целого положительного числа* α;

(4) *для положительных целых чисел* α *и* β *из* $\alpha + 1 = \beta + 1$ *следует* $\alpha = \beta$;

(5) *если класс* X *содержит пустое множество и с каждым ординалом содержит также непосредственно следующий за ним ординал, то* $\omega \subset X$.

1.5.8. Теорема (принцип трансфинитной индукции)**.** *Пусть* X *— некоторый класс, обладающий свойствами:* (1) $0 \in X$; (2) *если* α *— ординал и* $\alpha \in X$, *то* $\alpha + 1 \in X$; (3) *если* x *— множество ординалов, содержащееся в* X, *то* $\lim(x) \in X$. *Тогда* $\mathrm{On} \subset X$.

$\lhd$ Предположим, что $\mathrm{On} \not\subset X$. Тогда непустой подкласс $\mathrm{On} \setminus X$ вполне упорядоченного класса On имеет наименьший элемент $\alpha \in \mathrm{On} \setminus X$, причем это означает, что $\alpha \cap (\mathrm{On} \setminus X) = 0$ или $\alpha \subset X$ и $\alpha \neq 0$ ввиду (1). Если $\alpha \in K_{\mathrm{I}}$, т. е. $\alpha = \beta + 1$ для некоторого $\beta \in \mathrm{On}$, то $\beta \in \alpha \subset X \to \beta \in X$ и по условию (2) $\alpha = \beta + 1 \in X$. Если же $\alpha \in K_{\mathrm{II}}$, то из условия (3) выводим $\alpha = \lim(\alpha) \in X$. В обоих случаях имеем $\alpha \in X$, что противоречит вхождению $\alpha \in \mathrm{On} \setminus X$. $\rhd$

1.5.9. Теорема (принцип трансфинитной рекурсии). *Пусть G — некоторая класс-функция. Тогда существует единственная функция F, для которой*

(1) $\mathrm{dom}(F) = \mathrm{On}$*;*

(2) *$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$ при любом $\alpha \in \mathrm{On}$, где $F \restriction \alpha := F \cap (\alpha \times \mathbb{U})$ — ограничение F на α.*

$\lhd$ Определим класс Y соотношением

$$f \in Y \leftrightarrow \mathrm{Fnc}\,(f) \wedge \mathrm{dom}(f) \in \mathrm{On} \wedge (\forall\, \alpha \in \mathrm{dom}(f))\ (f(\alpha) = G(f \restriction \alpha)).$$

Если f, $g \in Y$, то либо $f \subset g$, либо $g \subset f$. Действительно, если $\beta := \mathrm{dom}(f)$ и $\gamma := \mathrm{dom}(g)$, то $\beta \leqslant \gamma$ или $\gamma \leqslant \beta$. Считая, например, что $\gamma < \beta$, положим $z := \{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha < \gamma \wedge f(\alpha) \neq g(\alpha)\}$. Если $z \neq 0$, то имеется наименьший элемент $\delta \in z$. Тогда для всех $\alpha < \delta$ будет $f(\alpha) = g(\alpha)$, т. е. $f \restriction \delta = g \restriction \delta$. Но по определению класса Y верно также $f(\delta) = G(f \restriction \delta)$ и $g(\delta) = G(g \restriction \delta)$. Следовательно, $f(\delta) = g(\delta)$ и $\delta \notin z$. Это противоречит выбору δ. Значит, $z = 0$, т. е. $f(\alpha) = g(\alpha)$ при всех $\alpha < \gamma$. Отсюда получаем требуемое включение $g \subset f$. Положим $F := \bigcup Y$. Легко видеть, что F — функция, $\mathrm{dom}(F) \subset \mathrm{On}$ и $F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$ для всех $\alpha \in \mathrm{dom}(F)$. Если $\alpha \in \mathrm{dom}(F)$, то $(\alpha, G(F \restriction \alpha)) \in f$ при некотором $f \in Y$. Тогда $\alpha \in \beta := \mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(F)$ и ввиду транзитивности β будет $\alpha \subset \mathrm{dom}(F)$. Итак, класс $\mathrm{dom}(F)$ транзитивен и по 1.5.4 (1) либо $\mathrm{dom}(F) = \mathrm{On}$, либо $\mathrm{dom}(F) \in \mathrm{On}$. Однако последнее включение невозможно. В самом деле, из $\delta := \mathrm{dom}(F) \in \mathrm{On}$ следует, что функция $f := F \cup \{(\delta, G(F))\}$ входит в Y. Стало быть, $f \subset F$, откуда вытекает противоречие: $f \subset F \to \mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(F) \to \delta \in \mathrm{dom}(F) = \delta$. $\rhd$

1.5.10. Бинарное отношение R называют *вполне фундированным*, если для всякого $x \in \mathbb{U}$ класс $R^{-1}(x)$ — множество и для любого непустого $x \in \mathbb{U}$ существует элемент $y \in x$ такой, что $x \cap R^{-1}(y) = 0$. Последнее условие (в предположении аксиомы выбора) равносильно тому, что не существует бесконечной последовательности (x_n) со свойством $x_n \in R(x_{n+1})$ для всех $n \in \omega$. Примером вполне фундированного отношения служит отношение $\in$. Принципы трансфинитной индукции и рекурсии удобно применять в следующем виде.

1.5.11. Теорема. *Пусть R — вполне фундированное отношение. Тогда справедливы утверждения*:

(1) (*индукция по R*) *если класс X таков, что для каждого $x \in \mathbb{U}$ соотношение $R^{-1}(x) \subset X$ влечет $x \in X$, то $X = \mathbb{U}$;*

(2) (*рекурсия по R*) *для любой функции $G : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ существует такая функция F, что $\mathrm{dom}(F) = \mathbb{U}$ и $F(x) = G(F \restriction R^{-1}(x))$ для всех $x \in \mathbb{U}$.*

1.5.12. Два множества называют *равномощными*, если существует взаимно однозначное отображение одного из них на другое. Ординал, который не равномощен никакому предшествующему ординалу, называют *кардиналом*. Любое целое положительное число служит кардиналом. Кардинал, не являющийся целым положительным числом, называют *бесконечным.* Значит, ω — наименьший бесконечный кардинал. Для любого ординала α обозначим символом ω_α бесконечный кардинал, для которого упорядоченное множество всех бесконечных кардиналов, меньших ω_α, подобно α. Если такой кардинал существует, то он единствен.

1.5.13. Теорема (принцип измерения мощностей). *Справедливы следующие утверждения*:

(1) *бесконечные кардиналы образуют некоторый вполне упорядоченный собственный класс*;

(2) *для любого ординала α существует кардинал ω_α, причем отображение $\alpha \mapsto \omega_\alpha$ является подобием класса ординалов и класса бесконечных кардиналов*;

(3) *существует отображение $|\cdot|$ из универсального класса $\mathbb{U}$ на класс всех кардиналов такое, что множества x и $|x|$ равномощны для любого $x \in \mathbb{U}$.*

$\lhd$ Доказательство см., например, в книге Э. Мендельсона [146]. $\rhd$

Кардинал $|x|$ называют *мощностью* или *кардинальным числом множества x*. Итак, всякое множество равномощно единственному кардиналу, а именно своему кардинальному числу. Множество *x счетно*, если $|x| = \omega_0 := \omega$, и *не более чем счетно*, если $|x| \leqslant \omega_0$.

1.5.14. Взяв произвольный ординал α, мы обозначим символом 2^{ω_α} мощность множества $\mathscr{P}(\omega_\alpha)$, т. е. $2^{\omega_\alpha} := |\mathscr{P}(\omega_\alpha)|$. Такое обозначение оправдано тем, что 2^x и $\mathscr{P}(X)$ равномощны для любого x, где 2^x — класс всех отображений из x в 2. Теорема, установленная Г. Кантором, утверждает, что $|x| < |2^x|$, каково бы ни было множество x. В частности, $\omega_\alpha < 2^{\omega_\alpha}$ для любого ординала α. Тогда по теореме 1.5.13 будет $\omega_{\alpha+1} \leqslant 2^{\omega_\alpha}$. Вопрос о том, имеются или нет промежуточные мощности между $\omega_{\alpha+1}$ и 2^{ω_α}, т. е. выполнено ли равенство $\omega_{\alpha+1} = 2^{\omega_\alpha}$, составляет содержание *обобщенной проблемы континуума.* При $\alpha = 0$ это классическая *проблема континуума.* Под *гипотезой континуума* CH (*обобщенной гипотезой континуума* GCH) понимают равенство $\omega_1 = 2^\omega$ (соответственно равенство $\omega_{\alpha+1} = 2^{\omega_\alpha}$ для всех $\alpha \in \mathrm{On}$). Иногда в литературе на английский манер говорят о *континуум-гипотезе* и *обобщенной континуум-гипотезе.*

1.5.15. Введем порядок в классе $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$, который мы будем называть *каноническим.* Рассмотрим α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in \mathrm{On}$. Будем считать, что $(\alpha_1, \alpha_2) \leqslant (\beta_1, \beta_2)$, если выполнено любое из следующих условий:

(1) $\alpha_1 = \beta_1$ и $\alpha_2 = \beta_2$;

(2) $\sup\{\alpha_1, \alpha_2\} < \sup\{\beta_1, \beta_2\}$;

(3) $\sup\{\alpha_1, \alpha_2\} = \sup\{\beta_1, \beta_2\}$ и $\alpha_1 < \beta_1$;

(4) $\sup\{\alpha_1, \alpha_2\} = \sup\{\beta_1, \beta_2\}$ и $\alpha_1 = \beta_1$ и $\alpha_2 < \beta_2$.

Таким образом, пары (α, β) сравнивают по $\sup\{\alpha, \beta\}$, а в множестве упорядоченных пар (α, β), имеющих одинаковый $\sup\{\alpha, \beta\}$, вводят лексикографический порядок.

Можно легко проверить, что класс $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$ с каноническим порядком есть вполне упорядоченный класс. Аналогично определяют каноническое вполне упорядочение класса $\mathrm{On} \times \mathrm{On} \times \mathrm{On}$ и т. д.

1.6. Иерархии множеств

Рекурсивные определения, основанные на теореме 1.5.9 или ее вариантах, доставляют, в частности, возрастающие (или убывающие) трансфинитные последовательности множеств, называемые кумулятивными иерархиями. Особый интерес для нас представляют иерархии, приводящие к моделям теории множеств.

1.6.1. Рассмотрим некоторое множество x_0 и два однозначных класса Q и R. Исходя из них, построим новый однозначный класс G. Прежде всего, положим $G(0) := x_0$. Далее, если x — функция и $\mathrm{dom}(x) = \alpha + 1$ для некоторого $\alpha \in \mathrm{On}$, то $G(x) := Q(x(\alpha))$. Если же $\mathrm{dom}(x) = \alpha$ — предельный ординал, то для получения $G(x)$ сначала «накопим» множество из значений $x(\beta)$ при $\beta < \alpha$, а затем к полученному множеству применим R, т. е. $G(x) := R(\bigcup \mathrm{im}(x))$. Во всех остальных случаях мы будем считать, что $G(x) = 0$. В силу теоремы 1.5.9 о трансфинитной рекурсии существует однозначный класс F, удовлетворяющий условиям

$$F(0) = x_0,$$
$$F(\alpha + 1) = Q(F(\alpha)),$$
$$F(\alpha) = R\biggl(\bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta)\biggr) \quad (\alpha \in K_{\mathrm{II}}).$$

Такую функцию F часто называют *кумулятивной иерархией*. Объединение элементов класса $\mathrm{im}(F)$, т. е. класс

$$\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} F(\alpha) := \bigcup \mathrm{im}(F),$$

называют *пределом кумулятивной иерархии* $(F(\alpha))_{\alpha\in\mathrm{On}}$.

1.6.2. В дальнейшем нас интересует только тот специальный случай, когда x_0 — пустое множество, R — тождественное отображение универсального класса $\mathbb{U}$ и Q — некоторая класс-функция, $\mathrm{dom}(Q) = \mathbb{U}$. При этом кумулятивные иерархии строятся индуктивно, начиная с пустого множества, последовательным применением операции Q. Варьируя Q, можно получать различные кумулятивные иерархии.

Наименьший ординал α, для которого $x \in F(\alpha+1)$, называют (*ординальным*) *рангом множества x относительно иерархии* $(F(\alpha))_{\alpha\in\mathrm{On}}$ и обозначают $\mathrm{rank}(x)$. Понятно, что это определение оправдано теоремой 1.4.14, в полном соответствии с которой существует класс rank, удовлетворяющий условию

$$(\forall\, x)(\forall\, y)((x, y) \in \mathrm{rank} \leftrightarrow \varphi(x, y, F, \mathrm{On})),$$

где φ — предикативная формула

$$(\exists\, \alpha \in \mathrm{On})(y = \alpha \wedge x \in F(\alpha + 1) \wedge (\forall\, \beta \in \mathrm{On})\ (x \in F(\beta + 1) \to \alpha \leqslant \beta)).$$

При этом верно $\mathrm{Un}(\mathrm{rank})$, $\mathrm{dom}(\mathrm{rank}) = \bigcup \mathrm{im}(F)$ и $\mathrm{im}(\mathrm{rank}) \subset \mathrm{On}$, т. е. rank — функция из $\bigcup \mathrm{im}(F)$ в On. В обозначении ранга нет указания на F, так как ниже всегда ясно, о какой иерархии идет речь.

1.6.3. В качестве простейшего примера рассмотрим случай, когда $x_0 = 0$, $R = I_{\mathbb{U}}$ и $Q := \mathscr{P}_{\mathrm{tr}}$, где $\mathscr{P}_{\mathrm{tr}}$ любому $x \in \mathbb{U}$ сопоставляет класс $\mathscr{P}_{\mathrm{tr}}(x)$ всех транзитивных подмножеств множества x. Так как транзитивное подмножество ординала есть ординал, то $Q(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$ или $F(\alpha + 1) = \alpha + 1$ для каждого ординала α. Если α пределен, то

$$F(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta) = \bigcup_{\beta+1<\alpha} F(\beta+1) = \bigcup_{\beta+1<\alpha} \beta + 1 = \alpha.$$

Поэтому предел возникающей кумулятивной иерархии — это класс ординалов On.

1.6.4. Если на роль Q пригласить операцию образования множества всех подмножеств $\mathscr{P}$, считая, что $x_0 = 0$, $R = I_{\mathbb{U}}$, получится общеизвестная кумулятивная иерархия

$$\begin{aligned} V_0 &:= 0, \\ V_{\alpha+1} &:= \mathscr{P}(V_\alpha) \quad (\alpha \in \mathrm{On}), \\ V_\alpha &:= \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \quad (\alpha \in K_{\mathrm{II}}). \end{aligned}$$

Класс $\mathbb{V} := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha$ — классический *универсум фон Неймана.* Ясно, что его нижние уровни имеют вид $V_1 = \mathscr{P}(0) = \{0\} = 1$, $V_2 = \mathscr{P}(1) = \{0, \{0\}\} = 2$, $V_3 = \mathscr{P}(V_2) = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \{0, \{0\}\}\} \neq 3$ и т. д.

1.6.5. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) V_α — *транзитивное множество для каждого* $\alpha \in \mathrm{On}$;
(2) $V_\beta \in V_\alpha$ *и* $V_\beta \subset V_\alpha$ *при любых* $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$, $\beta < \alpha$;
(3) *если* $x \in y \in \mathbb{V}$, *то* $\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$;
(4) *класс ординалов* On *лежит в универсуме* $\mathbb{V}$;
(5) $\mathrm{rank}(\alpha) = \alpha$ *для* $\alpha \in \mathrm{On}$;
(6) *если* x — *множество и* $x \subset \mathbb{V}$, *то* $x \in \mathbb{V}$.

$\triangleleft$ (1): Применим трансфинитную индукцию. При $\alpha = 0$ класс $V_0 = 0$ — транзитивное множество. Допустим, что множество V_α транзитивно. Так как $V_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V_\alpha)$, то $V_{\alpha+1}$ — множество и для любых x и y из $x \in y \in V_{\alpha+1}$ вытекает, что $y \subset V_\alpha$ и $x \in V_\alpha$. По индукционному предположению $x \subset V_\alpha$ или $x \in V_{\alpha+1}$. Значит, $y \subset V_{\alpha+1}$. Если $\alpha \in K_{\mathrm{II}}$ и V_β — транзитивное множество при всех $\beta < \alpha$, то для каждого $x \in V_\alpha$ будет

$$(\exists\, \beta < \alpha)\ (x \in V_\beta) \to (\exists\, \beta < \alpha)\ (x \subset V_\beta) \to x \subset V_\alpha.$$

Кроме того, V_α — это множество как объединение множества множеств.

(2): Транзитивность V_α уже установлена в (1). Поэтому достаточно показать, что $V_\beta \in V_\alpha$ при $\beta < \alpha$. Проведем трансфинитную индукцию по α. При $\alpha = 1$ доказывать нечего. Пусть $\alpha > 1$ и $V_\beta \in V_\alpha$ для всех $\beta < \alpha$. Неравенство $\beta < \alpha + 1$ выполняется лишь тогда, когда $\alpha = \beta$ или $\beta < \alpha$. Если $\alpha = \beta$, то

$$V_\beta = V_\alpha \in \mathscr{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}.$$

Если же $\beta < \alpha$, то по индукционному предположению $V_\beta \in V_\alpha$, а по (1) $V_\alpha \subset V_{\alpha+1}$. Следовательно, $V_\beta \in V_{\alpha+1}$. Осталось заметить, что для предельного ординала

$\alpha \in K_{\mathrm{II}}$ при $\beta < \alpha$ всегда верно $V_\beta \in V_\alpha$, так как

$$V_\beta \in V_{\beta+1} \subset \bigcup_{\gamma<\alpha} V_\gamma = V_\alpha.$$

(3): Нетрудно понять, что $\alpha = \operatorname{rank}(x)$ тогда и только тогда, когда $x \in V_{\alpha+1}$ и $x \notin V_\alpha$. Поэтому, если $x \in y$, то $y \not\subset V_\alpha$ и тем самым $y \notin V_{\alpha+1}$. По определению $\operatorname{rank}(y) > \alpha$.

(4), (5): Вновь привлекаем трансфинитную индукцию.

При $\alpha = 0$ имеем $0 \in V_0 \subset \mathbb{V}$ и $\operatorname{rank}(0) = 0$, ибо $0 \notin V_0$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{V}$ и $\operatorname{rank}(\alpha) = \alpha$. Тогда $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} \subset V_{\alpha+1}$ или $\alpha + 1 \in \mathscr{P}(V_{\alpha+1}) = V_{\alpha+2}$. С другой стороны, если $\alpha + 1 \in V_{\alpha+1}$, то $\alpha \cup \{\alpha\} \subset V_\alpha$ и получаем противоречие: $\alpha \in V_\alpha$. Значит, $\alpha+1 \notin V_{\alpha+1}$, а потому $\operatorname{rank}(\alpha+1) = \alpha+1$. Допустим, что $\alpha \in K_{\mathrm{II}}$ и для всех $\beta < \alpha$ имеем $\beta \in \mathbb{V}$ и $\operatorname{rank}(\beta) = \beta$. Тогда

$$\alpha = \{\beta \in \mathrm{On} : \beta < \alpha\} \subset \bigcup_{\beta<\alpha} V_{\beta+1} \subset V_\alpha,$$

откуда выводим: $\alpha \in V_{\alpha+1}$. Кроме того, соотношение $\alpha \in V_\alpha$ влечет, что $\alpha \in V_\beta$ для некоторого $\beta < \alpha$. Привлекая (3) и индукционное предположение, мы немедленно приходим к противоречию:

$$\beta = \operatorname{rank}(\beta) < \operatorname{rank}(\alpha) < \beta.$$

(6): Положим $\alpha := \sup\{\operatorname{rank}(y) : y \in x\}$. Ясно, что $x \subset V_{\alpha+1}$ и $x \in V_{\alpha+2} \subset \mathbb{V}$. $\triangleright$

1.6.6. Теорема. *Аксиома фундирования* NGB_{14} *равносильна равенству* $\mathbb{U} = \mathbb{V}$, *т. е. совпадению универсального класса с универсумом фон Неймана.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathbb{U} = \mathbb{V}$, и возьмем непустой класс X. Существует элемент $x \in X$, имеющий наименьший ранг α, т. е. $\operatorname{rank}(x) = \alpha$ и $\operatorname{rank}(x) \leqslant \operatorname{rank}(y)$ для всех $y \in X$. Если $u \in x \cap X$, то в силу 1.6.5 (3) $\operatorname{rank}(u) < \alpha = \operatorname{rank}(x)$, но это противоречит определению α. Стало быть, $x \cap X = 0$.

Докажем теперь, что $\mathbb{V} \neq \mathbb{U}$ противоречит аксиоме фундирования. Действительно, применив эту аксиому к непустому классу $\mathbb{U} \setminus \mathbb{V}$, найдем множество $y \in \mathbb{U} \setminus \mathbb{V}$, для которого $y \cap (\mathbb{U} \setminus \mathbb{V}) = 0$. Последнее соотношение дает $y \subset \mathbb{V}$, а из 1.6.5 (6) можно заключить, что $y \in \mathbb{V}$. Это противоречит выбору y. $\triangleright$

1.6.7. Теорема. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) ($\in$-*индукция*): *если класс* X *таков, что для всякого множества* x *из* $x \subset X$ *вытекает* $x \in X$, *то* $X = \mathbb{V}$;

(2) ($\in$-*рекурсия*): *если* G — *однозначный класс, то существует единственная функция* F, *определенная на всем* $\mathbb{V}$, *для которой* $F(x) = G(\operatorname{im}(F \restriction x))$ *при* $x \in \mathbb{V}$;

(3) (*индукция по рангу*): *если для класса* X *и каждого множества* x *из* $\{y \in \mathbb{V} : \operatorname{rank}(y) < \operatorname{rank}(x)\} \subset X$ *следует, что* $x \in X$, *то* $X = \mathbb{V}$.

$\triangleleft$ Как установлено в 1.6.6, универсум $\mathbb{V}$ совпадает с классом всех множеств $\mathbb{U}$. Поэтому требуемые утверждения вытекают непосредственно из 1.5.11 при условии, что отношения $\in := \{(x, y) \in \mathbb{V}^2 : x \in y\}$ и $R := \{(x, y) \in \mathbb{V}^2 : \operatorname{rank}(x) \leqslant$

$\operatorname{rank}(y)\}$ вполне фундированы. Для $\in$ нужное свойство следует из аксиомы фундирования (см. 1.5.10). Возьмем теперь такую последовательность $(x_n)_{n\in\omega}$ множеств $x_n \in \mathbb{V}$, что $x_{n+1} \in R(x_n)$ $(n \in \omega)$. Тогда последовательность ординалов $\alpha_n := \operatorname{rank}(x_n)$ удовлетворяет условию $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ $(n \in \omega)$ из-за 1.6.5 (3). Это противоречит тому, что класс On вполне упорядочен. Следовательно, R вполне фундированно. $\triangleright$

1.6.8. Пусть $\sim$ является отношением эквивалентности на классе W. Совокупность всех элементов W, эквивалентных данному $x \in W$, образует, вообще говоря, собственный класс, что и препятствует образованию фактор-класса. Эта трудность преодолевается с помощью следующей теоремы.

Теорема Фреге — Рассела — Скотта. *Существует функция $F : W \to \mathbb{V}$ такая, что при всех $x, y \in W$ выполняется*

$$F(x) = F(y) \leftrightarrow x \sim y.$$

$\triangleleft$ По теореме 1.4.14 существует класс F, для которого при всех $x, y \in W$ будет

$$(x, y) \in F \leftrightarrow \varphi(x, y, W, \sim, \operatorname{rank}),$$

где предикативная формула φ имеет вид

$$(\forall\, z)(z \in y \leftrightarrow z \in W \wedge x \sim z \wedge (\forall\, u)(x \sim u \to \operatorname{rank}(z) \leqslant \operatorname{rank}(u))).$$

Таким образом, F — функция и $y = F(x)$ — это класс множеств z, эквивалентных x и имеющих наименьший ординальный ранг среди всех таких множеств. Если $\alpha = \operatorname{rank}(x)$, то $F(x) \subset W \cap V_{\alpha+1}$. Поэтому $F(x)$ — множество. Кроме того, $\operatorname{dom}(F) = W$ и для любых $x, y \in W$ будет $x \sim y \leftrightarrow F(x) = F(y)$. В самом деле, если $F(x) = F(y)$, то найдется $w \in W$, для которого $x \sim w$ и $y \sim w$, т. е. $x \sim y$. Обратная импликация очевидна. $\triangleright$

Из аксиомы области определения NGB_{10} и из 1.4.13 (1) следует существование класса $\operatorname{im}(F) := \{F(x) :\ x \in W\}$. Этот класс мы и назовем *фактор-классом* W по отношению эквивалентности $\sim$, т. е. $W/{\sim} := \operatorname{im}(F)$. При этом принято говорить, что F — *канонический фактор-гомоморфизм* или *каноническая проекция*.

1.6.9. Пусть B — фиксированное множество, содержащее более одного элемента. Положим $Q := \mathscr{P}^{(B)} : x \mapsto B^x$ $(x \in \mathbb{V})$, где B^x, как обычно, — множество всех отображений из x в B. Возникающую при этом кумулятивную иерархию (см. 1.6.1, где $x_0 = 0$, $R = I_{\mathbb{V}}$) обозначают символом $(V_\alpha^{(B)})_{\alpha\in\mathrm{On}}$. Понятно, что *$B$-значный универсум*

$$\mathbb{V}^{(B)} := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha^{(B)}$$

служит подклассом класса $\mathbb{V}$ и состоит из B-значных функций, определенных на множествах B-значных функций. Стандартная интерпретация символа $\in$ в $\mathbb{V}^{(B)}$ не дает ничего интересного, ибо для B-значных функций u, v соотношение $u \in v$ верно лишь в тривиальных случаях. Однако иерархии (V_α) и $(V_\alpha^{(B)})$ существенно различны и это обстоятельство может служить основой нестандартных интерпретаций теории множеств в универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$. Подробнее об этом будет идти речь ниже в главе 4.

1.6.10. Ради полноты изложения укажем еще одну важную кумулятивную иерархию. Следующие операции над множествами называют *гёделевыми* (всего их восемь): образование неупорядоченной пары, теоретико-множественной разности, декартова произведения; $(2,3,1)$-, $(3,2,1)$- и $(1,3,2)$-транспонирование (см. 1.4.10), а также $X \mapsto X^2 \cap \in$ и $X \mapsto \operatorname{dom}(X)$. Для любого множества (множеств) X замыкание $\mathrm{cl}_G(X)$ есть наименьшее множество, содержащее X и замкнутое относительно гёделевых операций. Положим теперь $Q(x) := \mathscr{P}(x) \cap \mathrm{cl}_G(x \cup \{x\})$. Возникающую при этом иерархию называют *конструктивной иерархией* и обозначают $(L_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$. Конструктивный универсум — это класс $\mathbb{L} := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} L_\alpha$; элементы $\mathbb{L}$ — конструктивные множества. Подробности см. в книгах Т. Йеха [64] и А. Мостовского [148].

1.7. Комментарии

1.7.1. (1) Стремительный прогресс математической логики во многом связан с кризисом в основаниях математики, разразившимся в конце 19 столетия. Незадолго до этого возникло новое математическое направление — теория множеств, которая во все большей мере стала рассматриваться как идейная основа остальных математических дисциплин. В то же время в теории множеств были обнаружены противоречия, ограничивавшие претензии теоретико-множественного подхода на право стать прочным фундаментом всей математики. В надежде на их локальный характер и возможность легкого устранения, обнаруженные противоречия деликатно прозвали *парадоксами.* Математики предприняли громадные усилия к преодолению парадоксов теории множеств, но полностью их исключить не удалось.

(2) К началу 20 столетия наметились несколько направлений обоснования математики. Одно из них, называемое *логицизмом*, исходит из тезиса, что математика целиком и полностью следует из логики. Эта идея, восходящая к Г. В. Лейбницу, была впоследствии подхвачена Р. Дедекиндом и Г. Фреге. Наиболее полное воплощение позиции логицизма получили в фундаментальном трактате Б. Рассела и А. Н. Уайтхеда [363]. Не достигнув своей утопической цели — построения математики на чисто логической основе, логицизм стал важным стимулом ускоренного развития математической логики.

(3) В 1920-х годах Д. Гильберт выдвинул программу финитарного обоснования математики. Она состояла в том, чтобы сформулировать математику или хотя бы ее значительные фрагменты в виде формальной аксиоматической теории, после чего вопросы, относящиеся к бесконечным множествам, можно было бы свести к комбинаторному анализу конечных последовательностей символов. Допуская для целей такого анализа лишь элементарные и интуитивно ясные средства, Д. Гильберт полагал, что на этом пути можно будет доказать непротиворечивость математики. Знаменитые работы К. Гёделя показали тщетность этих надежд. Установленный в 1931 году результат, называемый обычно *теоремой Гёделя о неполноте*, утверждает, что если формальная теория непротиворечива, то в ней невыводима некоторая формула, содержательно утверждающая непротиворечивость самой теории. Таким образом, если теория непротиворечива, то доказательство ее непротиворечивости обязательно будет использовать невыразимые в этой теории и выходящие за ее пределы идеи и методы.

(4) Несмотря на то, что гильбертова программа обоснования математики оказалась неосуществимой, она сыграла значительную роль в формировании современной парадигмы математики и, в особенности, в становлении, развитии и стремительном прогрессе математической логики. В то же время необходимо помнить, что формальный подход, ставший весьма совершенным математическим инструментом, по-прежнему весьма ограничен в своих возможных применениях, ибо содержательная математика никогда не сводилась, не сводится и не будет сводиться к синтаксическому анализу своих текстов. Однако именно благодаря этой своей ограниченности формальный подход, эксплицирующий проблему смысла, доказал свою исключительную плодотворность, породив такие замечательные вещи, как теоремы Гёделя, доказательства независимости гипотезы континуума и аксиомы выбора и, наконец, булевозначный анализ, о котором идет речь в настоящей книге.

(5) Другое направление обоснования математики связано с конструктивистской позицией, восходящей к Л. Кронекеру и А. Пуанкаре. В весьма полной форме воззрения конструктивизма выражены в философии интуиционизма, основы которой были заложены Л. Э. Я. Брауэром. Интуиционистский подход приводит к ограничению не только чисто математических средств исследования, но также и используемых логических принципов. На этом пути возникает иное истолкование пропозициональных связок и, вообще, новая логическая система, называемая интуиционистской логикой (см. 1.1.4). На основе идей интуиционизма Л. Э. Я. Брауэр и его последователи построили новое математическое направление, называемое *конструктивной математикой*. Некоторые подробности можно узнать, например, из книг Э. Бишопа и Д. Бриджеса [196], А. Гейтинга [37].

(6) При построении теории первого порядка допустимо варьировать не только специальные аксиомы, но также и логическую часть теории, т. е. логические аксиомы и правила вывода (см. 1.1.4). Получающиеся при этом наборы теорем могут существенно отличаться друг от друга. Наряду с интуиционистской логикой исследовано и исследуется большое число других неклассических логик. В частности, при построении таких логик может быть изменен сам язык, например, путем удаления некоторых пропозициональных связок из 1.1.5. (3) или же введения новых, см., например, книгу Е. Расёвой и Р. Сикорского [155].

Стоит подчеркнуть, что исследование разных логических систем, отличных от классической логики, восходящей к аристотелевой силлогистике, представляет не только теоретический интерес, но имеет известное прикладное значение. Различные логические системы изобретались еще в древнейшие времена. Историки науки отмечают, что одна из древних индийских логик имела три типа отрицаний: чего-то никогда не было и не может быть; что-то было, но сейчас отсутствует; что-то сейчас есть, но скоро исчезнет.

(7) Как видно из 1.2.2 и 1.2.4, сокращения могут участвовать в формулах, в сокращениях, в сокращениях сокращений и т. п. Изобретение и введение символов во многом является искусством и, как всякое искусство, не может быть формализовано полностью. Тем не менее систематизация и кодификация правил осуществления сокращений необходимы как с теоретической, так и с практической точек зрения. Некоторые такие своды правил (точные описания, методы введения функциональных букв и т. п.) можно найти в книгах Д. Гильберта и П. Бернайса [38], С. Клини [77], А. Чёрча [172].

1.7.2. (1) Наивная теория множеств, созданная Георгом Кантором, — романтический гимн бесконечности. Теория множеств Кантора основана на интуитивных представлениях о том, какими могут быть бесконечные множества, и на неограниченном применении средств обычной логики в мире этих представлений. Героически отважное обращение с бесконечностью, создавшее феномен «канторова рая», привело не только к блестящим и неожиданным открытиям, но и к глубоким противоречиям и труднейшим проблемам в основаниях математики.

(2) Канторова теория множеств была встречена с глубоким недоверием и подвергнута разносторонней критике. Однако уже в 1897 году она была официально признана на Первом международном конгрессе математиков, на котором Ж. Адамар и А. Гурвиц привели многочисленные примеры применения теории множеств в математическом анализе. Стоит при этом подчеркнуть, что работы Г. Кантора появились спустя двести лет после открытия математического анализа. Так что многие шедевры математической мысли появились совершенно независимо от теоретико-множественной установки. За истекшее столетие теория множеств распространилась столь широко, что создала универсальный мир объектов, вместивший почти всю математику. Вместе с тем математика, основанная на канторовой теории множеств, связана с серьезными и содержательными трудностями, позволяющими многим говорить о продолжающемся кризисе в основаниях современной математики и (с некоторой натяжкой) даже в ней самой.

(3) Попытки изгнать противоречия из наивной теории множеств привели к формированию аксиоматической теории множеств, служащей фундаментом современной математики. Формальная теория множеств служит надежной основой большинства математических построений наших дней.

Имеется много изложений теории множеств. Упомянем только некоторые: Н. Бурбаки [19], Ван Хао и Р. Мак-Нотон [28], Д. Гильберт и П. Бернайс [38], Р. Голдблатт [40], Ю. Л. Ершов и Е. А. Палютин [60], Т. Йех [64, 258], Г. Кантор [65], П. Дж. Коэн [84], А. Леви [288], Ю. И. Манин [145], Э. Мендельсон [146], Г. Такеути и У. М. Заринг [394]. А. Френкель и И. Бар-Хиллел [167], М. Хэллет [242], К. Цизельский [202].

(4) П. Вопенка и его последователи построили так называемую альтернативную теорию множеств, см. книгу П. Вопенки [34]. В ней использованы идеи инфинитезимального анализа, но в отличие от робинсонова нестандартного анализа упор делается на формирование радикально новых математических понятий и конструкций.

1.7.3. (1) Первая (наряду с теорией типов Б. Рассела) система аксиом для теории множеств, предложенная Е. Цермело в 1908 г., совпадает, по существу, с набором ZF_1–ZF_3, ZF_5, 1.3.6, 1.3.7. Аксиомы экстенсиональности ZF_1 и объединения ZF_2 предложены ранее Г. Фреге (1883 г.) и Г. Кантором (1899 г.) соответственно. Идея аксиомы бесконечности ZF_5 восходит к Р. Дедекинду.

(2) Теория множеств Цермело возникла в начале 1920-х годов. Тем самым был завершен важный этап формализации языка теории множеств, устранивший расплывчатые описания свойств, допускаемых для выделения множеств. Однако аксиомы Цермело не позволяют вывести в качестве следствия эвристическое представление Г. Кантора о том, что взаимно однозначный образ множества снова будет множеством. Указанную трудность преодолели А. Френкель в 1922 г. и Т. Сколем в 1923 г., предложившие варианты аксиомы подстановки. Этот момент можно считать рождением теории ZFC.

(3) Аксиому фундирования ZF_6 указали в 1941 году К. Гёдель и П. Бернайс; она заменила аксиому регулярности, предложенную Дж. фон Нейманом в 1925 г. Эта аксиома не зависит от остальных аксиом ZFC.

(4) Аксиома выбора AC неявно использовалась, по-видимому, давно (например, Кантором в 1887 году при доказательстве того, что всякое бесконечное множество содержит счетное множество), но замечена она Дж. Пеано в 1890 г. и Б. Леви в 1902 г. Эта аксиома введена Е. Цермело в 1904 г. и была наиболее оспариваемой и дискутируемой в течение довольно многих лет. Однако развитие «конкретной» математики, показало, что возможность виртуального выбора воспринимается как очевидная неотъемлемая часть многих содержательных фрагментов современной математики. Неудивительно, что в настоящее время аксиома выбора принята подавляющим большинством ученых. Обсуждение места и роли аксиомы выбора в различных разделах математики можно найти у К. Гёделя [36], Т. Йеха [254], П. Дж. Коэна [84], А. Леви [288], А. Френкеля и И. Бар-Хиллела [167].

(5) Система аксиом ZFC является бесконечной, как это было отмечено в 1.2.4. Отсутствие конечной аксиоматизируемости ZFC установил Р. Монтэг в 1960 г., см. работы Ван Хао и Р. Мак-Нотона [28], А. Леви [288], А. Френкеля и И. Бар-Хиллела [167], М. Хэллета [242].

(6) В рамках текущих воззрений и современной парадигмы непротиворечивость теории множеств Цермело — Френкеля не может быть доказана. Однако эту теорию широко используют как надежный фундамент математики, поскольку критический анализ, которому она была подвергнута на протяжении десятилетий, подтвердил ее доброкачественность. Напомним, что аксиоматические теории множеств были вызваны к жизни желанием избежать противоречий при обосновании математики. К этой идеальной цели обычно приближаются путем ограничения набора канторовых множеств, допускаемых к рассмотрению. В то же время таких легитимных множеств в математике должно быть достаточно для того, чтобы представлять весь универсум объектов, интересующих исследователя.

1.7.4. (1) В середине 1930-х годов Дж. фон Нейман предложил свой вариант аксиоматики теории множеств. Позже этот подход был развит К. Гёделем и П. Бернайсом. Возникшая при этом система известна как теория NGB или теория фон Неймана — Гёделя — Бернайса. Теория NGB (наряду с теорией ZFC) является одной из наиболее простых и удобных аксиоматических систем теории множеств. Относительно других аксиоматических систем см. у Н. Бурбаки [19], Ван Хао и Р. Мак-Нотона [28], Е. Расёвой и Р. Сикорского [155], Дж. Р. Шенфильда [176].

(2) Из разнообразия теорий множеств мы выделим *теорию Бернайса — Морса*, расширяющую NGB. Эта теория имеет специальные аксиомы NGB_1–NGB_5,

NGB_{14} и следующую схему аксиом выделения:

$$(\exists X)(\forall Y)\big(Y \in X \leftrightarrow M(Y) \wedge \varphi(Y, X_1, \dots, X_n)\big),$$

где φ — произвольная формула, не содержащая вхождений переменной X.

(3) Теорема 1.4.17 принадлежит А. Мостовскому. Из нее, в частности, следует, что теория ZF непротиворечива в том и только в том случае, если непротиворечива теория NGB. Этот факт получили И. Новак и Дж. Шенфильд (см. [28, 175]).

Из 1.4.14 видно, что если в формуле φ область действия кванторов ограничена множеством, то схема аксиом выделения есть теорема NGB. Теория множеств Бернайса — Морса допускает в схеме аксиом выделения квантификацию по произвольным классам. К теории множеств Бернайса — Морса можно также добавить аксиому выбора NGB_{15}.

1.7.5. (1) Идея трансфинитных чисел относится к числу наиболее фундаментальных и оригинальных открытий Г. Кантора. На этой основе он далеко проник в глубинные аспекты бесконечности, разработав принципиально новый количественный инструментарий. Общее понятие бесконечности присутствует в религиозных и философских учениях с древнейших времен. Хотя уже с 17 века математический анализ рассматривали как науку о бесконечном, до Г. Кантора представления о бесконечном составляли в основном предмет вербальных гуманитарных дисциплин, близких к теологии. Г. Кантору принадлежит заслуга превращения бесконечности в предмет рядового математического исследования в рамках канторовой арифметики ординальных и кардинальных чисел. Призванная и вдохновленная бесконечным математика навсегда стала «наукой о бесконечности». Таково одно из наиболее распространенных нынешних воззрений на предмет математики, свидетельствующее бессмертное величие идей Г. Кантора.

(2) Проблема континуума была впервые поставлена Г. Кантором в 1878 г. Он был убежден, что гипотеза континуума является теоремой и всю жизнь тщетно пытался ее доказать. В 1900 г. в Париже состоялся Второй международный конгресс математиков. На нем выступил Давид Гильберт со своим знаменитым докладом «Математические проблемы», см. [154]. Он сформулировал 23 проблемы, решение которых, по его мнению, девятнадцатое столетие завещало двадцатому. Доклад Д. Гильберта сыграл выдающуюся роль в математике 20 века. Стоит подчеркнуть, что первой в этом докладе была сформулирована проблема континуума. Оставаясь открытой до 1961 г., она дала толчок глубоким исследованиям в основаниях математики, см. монографии Т. Йеха [64] и П. Дж. Коэна [84, 85].

(3) В 1939 г. К. Гёдель установил совместимость обобщенной гипотезы континуума с ZFC [36]. В 1963 г. П. Дж. Коэн [84] показал, что отрицание обобщенной гипотезы континуума также совместимо с ZFC, см. § 9.5. Оба приведенных результата устанавливаются путем построения соответствующих моделей, т. е. выбором универсума множеств и интерпретацией аксиом их теории в этом универсуме. Эти замечательные исследования принесли с собой в математику целый букет новых идей, методов и проблем.

(4) По Г. Кантору ординал есть порядковый тип некоторого вполне упорядоченного множества x, т. е. класс всех упорядоченных множеств, подобных x.

Однако все порядковые типы, кроме порядкового типа пустого множества, являются собственными классами. Указанное обстоятельство делает невозможным развить теорию порядковых типов (в рамках NGB), ибо нельзя рассматривать классы порядковых типов. Определение 1.5.2 выделяет по одному каноническому представителю из каждого порядкового типа. Такое определение ординала принадлежит Дж. фон Нейману.

(5) Здесь мы привели лишь самые основные факты об ординалах. Подробности и дальнейшие сведения можно найти в книгах К. Куратовского и А. Мостовского [89], Э. Мендельсона [146].

1.7.6. (1) Кумулятивная иерархия $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$ была впервые рассмотрена Дж. фон Нейманом. Релятивизация аксиомы фундирования на класс $\mathbb{V}$ доказуема в $\mathrm{NGB}\setminus\{\mathrm{NGB}_{14}\}$. Из этого факта вытекает совместимость NGB_{14} с остальными аксиомами NGB. Другие средства показывают, что утверждение $\neg\,\mathrm{NGB}_{14}$, отрицание аксиомы NGB_{14}, также совместимо с прочими аксиомами NGB, т. е. NGB_{14} — это независимая от других аксиома теории NGB.

(2) Если B — полная гейтингова алгебра (см. ниже 2.6), то универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ можно превратить в модель интуиционистской теории множеств, используя структуру B и иерархию $(V_\alpha^{(B)})$. В частности, если B — полная булева алгебра, то возникает булевозначная модель теории множеств. Подробнее об этом см. в четвертой главе.

(3) Если $B := [0,1]$ — отрезок чисел вещественной прямой, заключенных между нулем и единицей, то класс $\mathbb{V}^{(B)}$ естественно назвать *универсумом нечетких множеств* по Л. Заде [61] (см. также работы Зэнь Жи-веня [411, 412]) и Р. Ловена [294]. Этот универсум может служить моделью для некоторой теории множеств с подходящей многозначной логикой и составить известную базу для изучения нечетких множеств.

(4) Конструктивный универсум $\mathbb{L}$ служит наименьшей транзитивной моделью ZF, содержащей все ординалы. Класс $\mathbb{L}$ удовлетворяет аксиоме выбора и обобщенной гипотезе континуума. Таким образом, AC и GCH совместимы с ZF. Утверждение о том, что все множества конструктивны, называют *аксиомой конструктивности* и записывают в виде $\mathbb{V} = \mathbb{L}$. Релятивизация формулы $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ на класс $\mathbb{L}$ доказуема в ZF. Значит, аксиома $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ совместима с ZF. Все эти результаты, а также определение конструктивных множеств принадлежит К. Гёделю [36] (см. также [64, 148]). Соответствующие утверждения о совместимости аксиомы выбора и GCH верны и для NGB (см. у Т. Йеха [64], П. Дж. Коэна [84], Э. Мендельсона [146] и А. Мостовского [148]).

(5) В [387] Г. Такеути показал, что если B представляет собою квантовую логику (см. ниже 2.7.3 (3)), то универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ служит моделью для определенной квантовой теории множеств в смысле, аналогичном указанному ниже в 4.4. Изучение квантовых теорий как логических систем, построение квантовой теории множеств и развитие соответствующей квантовой математики — интересная и актуальная проблематика, хотя в этом направлении сделано пока немного. Адекватные математические средства и правильные ориентиры намечаются, возможно, в теории алгебр фон Неймана и выросших из нее различных «некоммутативных» направлений (некоммутативная теория вероятностей, некоммутативное интегрирование и т. п.).

Глава 2
Элементы теории булевых алгебр

Исключительная роль булевых алгебр в настоящей книге видна уже из самого ее названия. На самом деле, значение булевых алгебр далеко выходит за пределы избранной нами темы. Булевы алгебры пронизывают не только всю математику, но и практически все иные духовные кладовые человечества. Есть веские основания утверждать, что в концепции булевой алгебры отражено нечто общее, присутствующее во всех сферах нашей жизни.

К этому есть одна достойная особого упоминания причина. Дело в том, что булевы алгебры связаны с осмыслением одного из наиболее фундаментальных понятий науки — понятия «события». Термин «событие» играет фундаментальную роль в физике, где под «событием» принято понимать точку четырехмерного пространства-времени. В терминах отношения порядка на множестве событий наука осмысливает причинно-следственные связи. Без понятия «события» немыслимо излагать идеи современных теории вероятностей и статистики.

На обыденном уровне событие — это то, что может случиться, а может и не произойти. Особенность абстрактного «события» в том, что оно никогда не мыслится само по себе, а воспринимается в социуме других в некотором роде аналогичных «событий». Между «событиями» физики и теории вероятностей и «высказываниями» логики имеется удивительная имманентная связь, вскрытая Джорджем Булем (1815–1864), чье имя увековечено в самом термине «булева алгебра». Дж. Буль алгебраизировал социумы событий и высказываний, причем сделал это в лапидарной и элегантной форме, уже более ста пятидесяти лет радующей как начинающего исследователя, так и зрелого мастера.

Невозможно оценить вклад Дж. Буля в человеческую культуру ярче и полнее, чем это сделал его знаменитый соотечественник, современник и старший товарищ Аугустас Де Морган (1806–1871): «В то, что символические процессы алгебры, изобретенные как орудия численного расчета, должны стать столь компетентными, чтобы выразить каждый акт мышления и чтобы составить грамматику и словарь всеобъемлющей системы логики, невозможно было бы и поверить до того, как это было доказано». Доказано же это было Дж. Булем...

Истории, значению и многочисленным аспектам теории булевых алгебр посвящены многотомные справочники и объемистые монографии. В этой главе мы собрали лишь необходимый для дальнейшего минимум сведений из теории булевых алгебр. Более детальное изложение затронутых тем имеется в книгах Д. А. Владимирова [33], Дж. Д. Монка и Р. Боннэ [316], Р. Сикорского [160], П. Халмоша [243].

2.1. Основные понятия

В текущем параграфе будет эскизно очерчен круг нужных для дальнейшего элементарных сведений. Мы также напомним некоторые хорошо известные понятия, чтобы зафиксировать терминологию и обозначения.

2.1.1. *Упорядоченным* (*предупорядоченным*) *множеством* называют пару $(X, \leqslant)$, где $\leqslant\ \subset X \times X$ — порядок (предпорядок) на непустом множестве X (см. 1.2.8). Упорядоченное множество также называют *частично упорядоченным*. Для пары элементов $(x, y) \in\ \leqslant$ принято писать $x \leqslant y$. Часто в обозначении (пред)упорядоченного множества опускают знак $\leqslant$ и говорят о (пред)упорядоченном множестве X. В дальнейшем подобные сокращения и вольности мы будем употреблять без дополнительных пояснений, если из контекста ясно, о чем идет речь, и они не приводят к путанице.

Верхней границей подмножества M упорядоченного множества X называют элемент $a \in X$ такой, что $x \leqslant a$ для всех $x \in M$. При этом пишут $M \leqslant a$. Если множество M содержит свою верхнюю границу, то последнюю именуют *наибольшим элементом* M. Двойственным образом, переходя от данного порядка $\leqslant$ на множестве M к *обратному* или *противоположному* порядку $\geqslant\ :=\ \leqslant^{-1}$, где $x \leqslant^{-1} y \leftrightarrow y \leqslant x$, определяют *нижнюю границу* и *наименьший элемент* подмножества X упорядоченного множества M. Точнее, $a \in M$ будет нижней границей множества X в упорядоченном множестве $(M, \leqslant)$ в том и только в том случае, если $a \in M$ — верхняя граница множества X в $(M, \leqslant^{-1})$.

Наименьший элемент множества верхних границ X называют *точной верхней границей*, верхней гранью или *супремумом* X и обозначают символом $\sup(X)$ или $\sup X$. Другими словами, $a = \sup(X)$ тогда и только тогда, когда $a \in M$ — верхняя граница множества X и $a \leqslant b$ для каждой верхней границы $b \in M$ множества X. Двойственным образом определяют *точную нижнюю границу* множества X, также называемую *нижней гранью* или *инфимумом* X и обозначаемую $\inf X$ (или $\inf(X)$). Тем самым точная нижняя граница — это наибольшая нижняя граница. Иными словами, $a \in M$ будет нижней (точной нижней) границей множества X в упорядоченном множестве $(M, \leqslant)$ в том и только в том случае, если $a \in M$ — верхняя (точная верхняя) граница множества X в $(M, \leqslant^{-1})$. Если точная верхняя (или точная нижняя) граница множества существует, то она единственна.

Легко проверить, что следующие ниже законы коммутативности ((1) и (2)) и ассоциативности ((3) и (4)) для точных границ выполнены в произвольном упорядоченном множестве M, если соответствующие супремумы и инфимумы существуют ($x_{\alpha,\beta} \in M$, $X_\alpha \subset M$ при $\alpha \in \mathrm{A}$ и $\beta \in \mathrm{B}$):

(1) $\sup\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} \sup\limits_{\beta\in\mathrm{B}} x_{\alpha,\beta} = \sup\limits_{\beta\in\mathrm{B}} \sup\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} x_{\alpha,\beta}$;

(2) $\inf\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} \inf\limits_{\beta\in\mathrm{B}} x_{\alpha,\beta} = \inf\limits_{\beta\in\mathrm{B}} \inf\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} x_{\alpha,\beta}$;

(3) $\sup\Big(\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} X_\alpha\Big) = \sup\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} \sup X_\alpha$;

(4) $\inf\Big(\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} X_\alpha\Big) = \inf\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} \inf X_\alpha$.

2.1.2. Упорядоченное множество M называют *решеткой*, если любое двухэлементное подмножество $\{x, y\}$ множества M имеет точные границы $x \vee y := \sup\{x, y\}$ и $x \wedge y := \inf\{x, y\}$. Использование символов конъюнкции и дизъюнкции для обозначения точных границ отвечает современной практике, не приводит к недоразумениям и вполне мотивировано общими идеями теории булевых алгебр.

Для подмножества X решетки L приняты следующие обозначения:

$$\bigvee X := \sup(X), \quad \bigwedge X := \inf(X),$$

$$\bigvee_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha := \bigvee\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}, \quad \bigwedge_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha := \bigwedge\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\},$$

$$\bigvee_{k=1}^{n} x_k := x_1 \vee \ldots \vee x_n := \sup\{x_1, \ldots, x_n\},$$

$$\bigwedge_{k=1}^{n} x_k := x_1 \wedge \ldots \wedge x_n := \inf\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Здесь X — подмножество L, а $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — семейство элементов L; наконец, $x_1, \ldots, x_n$ — некоторые элементы L.

В решетке L возникают бинарные операции $(x, y) \mapsto x \vee y$ и $(x, y) \mapsto x \wedge y$, для которых наблюдается

(1) *коммутативность*:

$$x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x;$$

(2) *ассоциативность*:

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$$

Из (2) индукцией выводится, что *в решетке всякое непустое конечное множество имеет точные границы*. Если же точные границы существуют у каждого подмножества решетки L, то L называют *полной решеткой*.

Говорят, что решетка L *дистрибутивна*, если в ней выполнены два следующих соотношения (каждое из которых следует из другого в любой решетке):

(3) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

(4) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Наименьший или наибольший элемент решетки (если такой элемент существует), называют соответственно *нулем* и *единицей* этой решетки. Нуль и единицу решетки L обозначают символами $\mathbb{0}_L$, $\mathbb{1}_L$ или просто $\mathbb{0}$, $\mathbb{1}$, если ясно, о какой решетке L идет речь. Отметим, что $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$ являются нейтральными элементами:

(5) $\mathbb{0} \vee x = x, \quad \mathbb{1} \wedge x = x$.

В соответствии с общими определениями $\bigvee \varnothing = \sup \varnothing := \mathbb{0}$, $\bigwedge \varnothing = \inf \varnothing := \mathbb{1}$. *Дополнение* x^* элемента x в решетке L с нулем и единицей определяют как такой элемент $x^* \in L$, что

(6) $x \wedge x^* = \mathbb{0}, \quad x \vee x^* = \mathbb{1}$.

Если в решетке L имеются наибольший и наименьший элементы и всякий элемент в L обладает хотя бы одним дополнением, то об L говорят как о *решетке с дополнениями.* Само собой, далеко не всякая решетка есть решетка с дополнениями.

2.1.3. *Булевой алгеброй* называют дистрибутивную решетку с дополнениями. В частности, в булевой алгебре B по определению имеются нуль $\mathbb{0} := \mathbb{0}_B$ и единица $\mathbb{1} := \mathbb{1}_B$.

Отметим, что формальный пример булевой алгебры дает одноэлементная решетка, т. е. множество вида $\{x\}$ с очевидным порядком $x \leqslant x$. Эту алгебру называют *вырожденной.* Вырожденная булева алгебра естественна как алгебраическая система, но представляется нелепой простушкой в интересующем нас контексте булевозначного анализа. Простейшей невырожденной булевой алгеброй служит *двухэлементная решетка* $2 := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$, $\mathbb{0} \neq \mathbb{1}$, с порядком: $\mathbb{0} \leqslant \mathbb{1}$, $\mathbb{0} \leqslant \mathbb{0}$, $\mathbb{1} \leqslant \mathbb{1}$. Двухэлементная решетка играет существенную роль в последующих главах. В связи со сказанным условимся, говоря о булевой алгебре B, всегда считать, что $\mathbb{0}_B \neq \mathbb{1}_B$, т. е. исключим из рассмотрения вырожденные алгебры.

(1) *В булевой алгебре B каждый элемент $x \in B$ имеет единственное дополнение, обозначаемое символом x^*. Возникающее при этом отображение $x \mapsto x^*$ $(x \in B)$ идемпотентно, т. е. $x^{**} := (x^*)^* = x$ для любого $x \in B$, и осуществляет дуальный изоморфизм или антиизоморфизм B на себя* (*т. е. является изоморфизмом упорядоченных множеств* $(B, \leqslant)$ *и* $(B, \leqslant^{-1})$).

(2) *Из* (1) *вытекает, в частности, что справедливы формулы Моргана:*

$$\Big(\bigvee_{\alpha\in\mathrm{A}} x_\alpha\Big)^* = \bigwedge_{\alpha\in\mathrm{A}} x_\alpha^*, \qquad \Big(\bigwedge_{\alpha\in\mathrm{A}} x_\alpha\Big)^* = \bigvee_{\alpha\in\mathrm{A}} x_\alpha^*,$$

где $x_\alpha \in B$ $(\alpha \in \mathrm{A})$.

2.1.4. Три операции $\vee$, $\wedge$ и $*$, определяемые в произвольной булевой алгебре B, называют *булевыми.* Можно дать эквивалентное определение булевой алгебры B, охарактеризовав ее как универсальную алгебру $(B, \vee, \wedge, *, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ с двумя бинарными операциями $\vee$ и $\wedge$, одной унарной операцией $*$ и двумя выделенными элементами — «0-арными» операциями — $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$, удовлетворяющими условиям:

(1) операции $\vee$ и $\wedge$ коммутативны и ассоциативны (2.1.2 (1, 2));

(2) операции $\vee$ и $\wedge$ двояко дистрибутивны относительно друг друга (2.1.2 (3, 4));

(3) элементы x и x^* взаимно дополнительны (2.1.2 (6));

(4) $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$ являются нейтральными элементами для операций $\vee$ и $\wedge$ соответственно (2.1.2 (5)).

Определив такую универсальную алгебру B, можно ввести в ней отношение порядка, полагая $x \leqslant y$, если $x \wedge y = x$. При этом окажется, что $(B, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с дополнениями, в которой $\vee$ и $\wedge$ совпадают с решеточными операциями, $*$ — с дополнением, а $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$ — наименьший и наибольший элементы. В литературе можно встретить немало эквивалентных систем аксиом, характеризующих булевы алгебры.

2.1.5. Используя основные булевы операции $\vee$, $\wedge$ и $*$, вводят и другие:

$$x - y := x \wedge y^*, \quad x \Rightarrow y := x^* \vee y,$$
$$x \triangle y := (x - y) \wedge (y - x) = (x \wedge y^*) \vee (y \wedge x^*),$$
$$x \Leftrightarrow y := (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) = (x^* \vee y) \wedge (y^* \vee x).$$

Приведем несколько легко проверяемых соотношений, которые неоднократно понадобятся нам в дальнейшем:

(1) $x \Rightarrow y = (x - y)^*, \quad x \Leftrightarrow y = (x \triangle y)^*$;

(2) $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) = (x \wedge y) \Rightarrow z = (x \wedge y) \Rightarrow (x \wedge z)$;

(3) $x \leqslant y \Rightarrow z \leftrightarrow x \wedge y \leqslant z \leftrightarrow y - z \leqslant x^*$;

(4) $x \leqslant y \leftrightarrow x \Rightarrow y = \mathbb{1} \leftrightarrow x - y = \mathbb{0}$;

(5) $x = y \leftrightarrow x \Leftrightarrow y = \mathbb{1} \leftrightarrow x \triangle y = \mathbb{0}$.

Стоит подчеркнуть, что операция $\triangle$, называемая *симметрической разностью*, обладает свойствами метрики:

(6) $x \triangle y = \mathbb{0} \leftrightarrow x = y$;

(7) $x \triangle y = y \triangle x$;

(8) $x \triangle y \leqslant (x \triangle z) \vee (z \triangle y)$.

При этом относительно такой «метрики» решеточные операции становятся нерастягивающими, а дополнение — изометрией:

$$(x \vee y) \triangle (u \vee v) \leqslant (x \triangle u) \vee (y \triangle v),$$
$$(x \wedge y) \triangle (u \wedge v) \leqslant (x \triangle u) \vee (y \triangle v),$$
$$x^* \triangle y^* = x \triangle y.$$

2.1.6. Булеву алгебру B называют *полной* (σ-*полной*), если любое (любое счетное) множество в B имеет точные границы. Вместо σ-полных алгебр чаще говорят просто о σ-*алгебрах*. С полной булевой алгеброй B связаны отображения $\bigvee$, $\bigwedge : \mathscr{P}(B) \to B$, сопоставляющие подмножеству B его супремум и инфимум соответственно. Эти отображения иногда именуют *бесконечными операциями*. Для них справедливы многие полезные соотношения. Выделяют *бесконечные дистрибутивные законы*:

(1) $x \vee \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha = \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x \vee x_\alpha$;

(2) $x \wedge \bigvee\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha = \bigvee\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x \wedge x_\alpha$.

Из (1), (2) вытекают следующие часто используемые равенства:

(3) $\big(\bigvee\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha\big) \Rightarrow x = \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} (x_\alpha \Rightarrow x)$;

(4) $\big(\bigwedge\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha\big) \Rightarrow x = \bigvee\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} (x_\alpha \Rightarrow x)$;

(5) $x \Rightarrow \big(\bigvee\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha\big) = \bigvee\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} (x \Rightarrow x_\alpha)$;

(6) $x \Rightarrow \big(\bigwedge\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha\big) = \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} (x \Rightarrow x_\alpha)$.

2.1.7. Непустое подмножество B_0 булевой алгебры B называют *подалгеброй* B, если B_0 замкнуто относительно булевых операций $\vee$, $\wedge$ и $*$; т. е. если $\{x \vee y, x \wedge y, x^*\} \subset B_0$, каковы бы ни были $x, y \in B_0$. Относительно индуцированного из B порядка подалгебра B_0 будет самостоятельной булевой алгеброй с теми же нулем и единицей, что и у B. В частности, $B_0 := \{\mathbb{0}_B, \mathbb{1}_B\}$ — подалгебра B.

Подалгебру $B_0 \subset B$ называют *правильной* (*σ-правильной*) в том случае, если для любого множества (любого счетного множества) A в B_0 элементы $\bigvee A$ и $\bigwedge A$, существующие в B, входят в B_0.

2.1.8. Под *идеалом* булевой алгебры B понимают непустое множество $J \subset B$, удовлетворяющее условиям:

$$x \in J \,\wedge\, y \in J \,\rightarrow\, x \vee y \in J,$$
$$x \in J \,\wedge\, y \leqslant x \,\rightarrow\, y \in J.$$

Примерами идеалов служат множества $B_a := \{x \in B : x \leqslant a\}$, где $a \in B$. Такие идеалы называют *главными*. Если $\mathbb{0} \neq e \in B$, то главный идеал B_e является самостоятельной булевой алгеброй относительно индуцированного из B порядка. Роль единицы в B_e играет элемент e. Решеточные операции наследуются из B, а дополнение в B_e имеет вид $x \mapsto e - x := e \wedge x^*$ $(x \in B)$.

Идеал J называют *собственным*, если $J \neq B$. Если идеал содержит точные верхние границы своих счетных подмножеств, то его называют *σ-идеалом*. Идеал, содержащий точные верхние границы любых своих подмножеств, часто именуют *компонентой* или *полосой*. Легко проверить, что пересечение непустой совокупности идеалов (σ-идеалов, компонент) есть идеал (σ-идеал, компонента). Поэтому среди надмножеств данного множества $M \subset B$ всегда существуют наименьший идеал (σ-идеал) и наименьшая компонента. Эти надмножества M принято именовать *идеалом* (*σ-идеалом*), *порожденным* M и *компонентой, порожденной* M.

2.1.9. Докажем одно из фундаментальных свойств булевой алгебры, именуемое принципом исчерпывания.

Пусть B — булева алгебра. Элементы x и y из B называют *дизъюнктными*, если $x \wedge y = \mathbb{0}$. Как видно, каждый элемент $x \in B$ дизъюнктен своему дополнению x^*. Множество, состоящее из попарно дизъюнктных элементов, называют *дизъюнктным множеством* или *антицепью*. Говорят, что B — *булева алгебра счетного типа*, если всякая антицепь в B не более чем счетна.

Подмножество $E \subset B$ *минорирует* подмножество $B_0 \subset B$, если для каждого $\mathbb{0} < b \in B_0$ существует $x \in E$ такой, что $\mathbb{0} < x \leqslant b$. Принято также называть E *коинициальным*, *минорирующим* или *минорантным* подмножеством B_0. Двойственным образом определяют *мажорирующее*, *мажорантное* или *конфинальное* подмножество упорядоченного множества.

Обозначим символом $\mathrm{u.b.}(M)$ множество всех верхних границ множества M, т. е. поляру множества M относительно порядка на B.

Принцип исчерпывания. *Пусть M — непустое подмножество булевой алгебры B и B_0 — компонента B, порожденная множеством M. Пусть E — минорирующее множество в компоненте B_0. Тогда существует некоторая антицепь $E_0 \subset E$ такая, что $\mathrm{u.b.}(E_0) = \mathrm{u.b.}(M)$ и для каждого $x \in E_0$ имеется элемент $y \in M$ со свойством $x \leqslant y$.*

◁ Рассмотрим множество $\mathfrak{A}$ всех антицепей A со следующими свойствами: (a) $A \subset E$; (b) для каждого $x \in A$ существует $y \in M$, удовлетворяющий неравенству $x \leqslant y$. Если $\mathbb{0} \neq y \in M$, то из условия минорантности $y \geqslant x$ для некоторого $\mathbb{0} \neq x \in E$. Значит, $\{x\} \in \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}$ непусто. Упорядоченное по включению множество $\mathfrak{A}$ удовлетворяет лемме Куратовского — Цорна. Следовательно, существует максимальный элемент $E_0 \in \mathfrak{A}$. Из условия (b) определения множества $\mathfrak{A}$ имеем $\mathrm{u.b.}(M) \subset \mathrm{u.b.}(E_0)$. В частности, доказательство завершено, если $\mathrm{u.b.}(E_0) = \{\mathbb{1}\}$.

Для доказательства обратного включения предположим, что $b_0 \notin \mathrm{u.b.}(M)$ для некоторого $b_0 \in \mathrm{u.b.}(E_0)$, $b_0 \neq \mathbb{1}$. Существует элемент $x \in M$ такой, что $x_0 := b_0^* \wedge x \neq \mathbb{0}$. Из свойства минорантности $\mathbb{0} < y \leqslant x_0$ для некоторого $y \in E$. Множество $E_0 \cup \{y\}$ принадлежит $\mathfrak{A}$ и имеет существенно больше элементов, чем E_0. Это противоречит тому, что E_0 максимально. Таким образом, $\mathrm{u.b.}(E_0) \subset \mathrm{u.b.}(M)$. ▷

2.1.10. Рассмотрим несколько следствий из установленного факта.

(1) *Для каждого непустого множества $M \subset B$, имеющего точную верхнюю границу, существует антицепь $A \subset B$ со следующими свойствами: $\bigvee A = \bigvee M$ и для каждого $x \in A$ можно подобрать $y \in M$ такой, что $x \leqslant y$.*

◁ Нужно взять минорантное для M множество $E := \bigcup_{y \in M} [\mathbb{0}, y]$ и применить принцип исчерпывания. ▷

(2) *Булева алгебра является полной в том и только в том случае, если в ней всякая антицепь имеет точную верхнюю границу.*

◁ Возьмем произвольное множество $M \subset B$. Согласно принципу исчерпывания имеем $\mathrm{u.b.}(A) = \mathrm{u.b.}(M)$ для некоторой антицепи $A \subset B$. По условию существует $a := \bigvee A$. Но тогда $\{b \in B : a \leqslant b\} = \mathrm{u.b.}(M)$, т. е. $a = \bigvee M$. ▷

(3) *Булева σ-алгебра счетного типа является полной.*

◁ Непосредственно следует из признака полноты (2). ▷

2.2. Операции на булевых алгебрах

В этом параграфе мы рассмотрим операции на булевых алгебрах, т. е. способы построения новых булевых алгебр из уже имеющихся.

2.2.1. Возьмем булевы алгебры B и C. Отображение $h : B \to C$ именуют (*булевым*) *гомоморфизмом*, если для любых $x, y \in B$ выполнены равенства

$$h(x \vee y) = h(x) \vee h(y),$$
$$h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y),$$
$$h(x^*) = h(x)^*.$$

Разумеется, каждое из первых двух равенств вытекает из остальных в силу формул Моргана 2.1.3 (2). Гомоморфизм h является *изотонным* или *возрастающим* отображением, т. е. если $x \leqslant y$, то $h(x) \leqslant h(y)$, причем $h(\mathbb{0}_B) = \mathbb{0}_C$ и $h(\mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_C$. Ясно также, что гомоморфизм сохраняет операции $-$, $\vartriangle$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, введенные в 2.1.5.

Инъективный гомоморфизм называют *мономорфизмом,* а биективный гомоморфизм — *изоморфизмом.* Булевы алгебры B и C называют *изоморфными*, если существует изоморфизм между ними. Биективное отображение h между булевыми алгебрами будет изоморфизмом в том и только в том случае, если h и h^{-1} изотонны.

Если I — идеал C, а h — гомоморфизм из B в C, то $h^{-1}(I)$ идеал B. В частности, идеалом служит *ядро* $\ker(h) := \{x \in B : h(x) = \mathbb{0}_C\}$ гомоморфизма h. Ниже будет показано, что всякий идеал служит ядром некоторого гомоморфизма. Гомоморфизм h будет мономорфизмом в том и только в том случае, если $\ker(h) = \{\mathbb{0}_B\}$.

Непосредственно из определений видно, что гомоморфизм сохраняет точные границы любых конечных множеств. Гомоморфизм называют *полным* или *порядково непрерывным*, если он сохраняет точные границы любых множеств (у которых такие границы существуют).

(1) Если $h : B \to C$ — булев гомоморфизм, то $h(B)$ будет подалгеброй алгебры C. Алгебру $h(B)$ в этой ситуации называют *гомоморфным образом* алгебры B. Алгебра $h(B)$ будет полной, если полны алгебра B и гомоморфизм h.

(2) Пусть C — произвольное множество и задана биекция $h : B \to C$. Тогда в C можно ввести порядок, полагая $h(x) \leqslant h(y)$ в том и только в том случае, если $x \leqslant y$. При этом C становится булевой алгеброй, а h — изоморфизмом булевых алгебр. Алгебры B и C, являясь изоморфными булевыми алгебрами, полны или нет одновременно.

2.2.2. Пересечение произвольного семейства подалгебр некоторой булевой алгебры также будет ее подалгеброй. То же самое верно и для правильных (σ-правильных) подалгебр, что делает корректными следующие определения. Наименьшую подалгебру алгебры B, содержащую подмножество $M \subset B$, называют *подалгеброй, порожденной множеством* M. Эта подалгебра, обозначаемая символом $\alpha(M)$, совпадает, очевидно, с пересечением всех подалгебр B, содержащих множество M. При этом говорят, что алгебра $\alpha(M)$ *порождена* множеством M, элементы которого принято называть *образующими* алгебры $\alpha(M)$.

Правильную (σ-правильную) подалгебру B_0, *порожденную* M, вводят аналогично как пересечение всех правильных (σ-правильных) подалгебр B, содержащих данное множество M. Элементы M называют полными (σ-полыми) образующими алгебры B_0.

Очевидно $\alpha(\varnothing) = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$. Для непустого $M \subset B$ подалгебра $\alpha(M)$ имеет следующее простое описание.

(1) *Пусть M — непустое подмножество B. Для $a \in M$ положим $\varepsilon a := a$, если $\varepsilon = +1$, и $\varepsilon a := a^*$, если $\varepsilon = -1$. Элемент $b \in B$ входит в $\alpha(M)$ в том и только в том случае, если имеет место представление*

$$b = \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n_m} \varepsilon_{i,j} a_{i,j},$$

где $a_{i,j} \in M$ и $\varepsilon_{i,j} \in \{-1, +1\}$ при всех $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n_m$.

$\lhd$ Как видно из определения, множество элементов B, представимых в указанном виде, замкнуто относительно операции $\vee$, а в силу формул Моргана 2.1.3 (2) и законов дистрибутивности 2.1.2 (3, 4) оно будет замкнутым и относительно $(\cdot)^*$. $\rhd$

(2) *Для произвольного гомоморфизма h из B в булеву алгебру C имеет место формула $h(\alpha(M)) = \alpha(h(M))$. Иными словами, гомоморфный образ алгебры $\alpha(M)$ есть подалгебра алгебры C, порожденная множеством $h(M)$.*

$\lhd$ Следует из (1) и из сохранения гомоморфизмом h точных границ конечных множеств. $\rhd$

(3) Пусть B и C — булевы алгебры, $A \subset B$ и отображение $f : A \to C$ является ограничением h на A. Тогда f удовлетворяет следующему условию: для произвольных элементов $a_1, \dots, a_n \in A$ и чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}$ из равенства $\varepsilon_1 a_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n a_n = \mathbb{0}_B$ вытекает, что $\varepsilon_1 f(a_1) \wedge \dots \wedge \varepsilon_n f(a_n) = \mathbb{0}_C$, где по определению $(+1)a_k := a_k$ и $(-1)a_k := a_k^*$.

(4) *Если отображение $f : A \to C$ удовлетворяет условию* (3), *то подалгебра $\alpha(f(A))$ является гомоморфным образом $\alpha(A)$.*

$\lhd$ Вытекает из следующей теоремы 2.2.3. $\rhd$

2.2.3. Теорема. *Пусть B и C — булевы алгебры, а A — множество образующих B. Отображение $f : A \to C$ может быть продолжено до гомоморфизма $h : B \to C$ в том и только в том случае, если оно удовлетворяет условию* 2.2.2 (3).

$\lhd$ Необходимость очевидна. Для обоснования достаточности определим гомоморфизм h формулой

$$h(b) := \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n_m} \varepsilon_{i,j} f(a_{i,j}),$$

где b — элемент из $\alpha(A)$, определяемый как в 2.2.2 (1). Корректность этого определения следует из формул Моргана 2.1.3 (2) и законов дистрибутивности 2.1.2 (3, 4). Подробности можно найти в книге Р. Сикорского [160]. $\rhd$

2.2.4. Пусть J — собственный идеал булевой алгебры B. Введем отношение эквивалентности $\sim$ в B правилом

$$x \sim y \leftrightarrow x \vartriangle y \in J \quad (x, y \in B),$$

где $\vartriangle$ — симметрическая разность. То, что указанное отношение действительно является эквивалентностью, следует из свойств симметрической разности 2.1.5 (6–8). Обозначим через φ каноническое (фактор-)отображение алгебры B на фактор-множество $B/J := B/{\sim}$. Для классов эквивалентности $u, v \in B/J$ положим $u \leqslant v$, если существуют элементы $x \in u$ и $y \in v$ такие, что $x \leqslant y$. Тем самым в B/J определено отношение порядка. При этом B/J становится булевой алгеброй, которую называют *фактор-алгеброй алгебры B по идеалу J*. Возникающие в B/J булевы операции таковы, что φ становится гомоморфизмом. Если $h : B \to B'$ — гомоморфизм, то $\ker h := \{x \in B : h(x) = \mathbb{0}\}$ будет собственным идеалом и существует единственный мономорфизм $g : B/\ker h \to B'$, для которого $g \circ \varphi = h$, где $\varphi : B \to B/\ker h$ — фактор-гомоморфизм. Таким образом:

Всякий гомоморфный образ булевой алгебры изоморфен ее фактор-алгебре по подходящему идеалу.

Отметим также, что *если J — это σ-идеал булевой σ-алгебры B, то B/J будет σ-алгеброй.*

2.2.5. Возьмем семейство булевых алгебр $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$. Снабдим произведение $B := \prod_{\alpha \in \mathrm{A}} B_\alpha$ покоординатным отношением порядка, полагая $x \leqslant y$ для $x, y \in B$, если $x(\alpha) \leqslant y(\alpha)$ при всех $\alpha \in \mathrm{A}$. Тогда B — булева алгебра. Булевы операции в B совпадают с соответствующими покоординатными операциями в алгебрах B_α. Нуль $\mathbb{0}_B$ и единица $\mathbb{1}_B$ в B определяют равенствами $\mathbb{0}_B(\alpha) := \mathbb{0}_\alpha$ и $\mathbb{1}_B(\alpha) := \mathbb{1}_\alpha$ ($\alpha \in \mathrm{A}$), где $\mathbb{0}_\alpha$ и $\mathbb{1}_\alpha$ — нуль и единица в B_α. Булеву алгебру B называют *декартовым произведением* семейства булевых алгебр $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$, а булевы алгебры B_α — сомножителями или координатными алгебрами. В частности, если $B_\alpha = C$ для всех α, то получаем декартову степень булевой алгебры C^{A}.

Декартово произведение семейства булевых алгебр полно тогда и только тогда, когда полны все координатные алгебры.

2.2.6. В соответствии с 2.1.9 множество A в B является антицепью, если $a_1 \wedge a_2 = \mathbb{0}$ для любых несовпадающих $a_1, a_2 \in A$. Если антицепь имеет форму $A := \{a_\xi : \xi \in \Xi\}$, тогда мы считаем $a_\xi \wedge a_\eta = \mathbb{0}$ при $\xi \neq \eta$. Антицепь A в B является *разбиением элемента* $b \in B$ (или *разбиением единицы*, когда $b = \mathbb{1}$), если $b = \bigvee A$.

Пусть $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в B. Согласно 2.1.8 $B_\xi := [\mathbb{0}, b_\xi]$ — это булева алгебра с единицей b_ξ.

Полная булева алгебра B изоморфна декартову произведению $\prod_{\xi\in\Xi} B_\xi$. Изоморфизм осуществляется сопоставлением элементу $b \in B$ отображения $\widetilde{b}$ по правилу $\widetilde{b}(\xi) := b \wedge b_\xi$ $(b \in B)$.

В этой ситуации говорят, что алгебра B является *прямой суммой* или *соединением* семейства компонент (B_ξ).

2.2.7. Вновь рассмотрим семейство булевых алгебр $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$. Существуют булева алгебра B и семейство мономорфизмов $\iota_\alpha : B_\alpha \to B$ ($\alpha \in \mathrm{A}$), удовлетворяющие условиям:

(1) семейство подалгебр $(\iota_\alpha(B_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ алгебры B *независимо*, т. е. для любого конечного набора ненулевых элементов $x_k \in \iota_{\alpha_k}(B_{\alpha_k})$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathrm{A}$ и $\alpha_k \neq \alpha_l$ при $k \neq l$, выполняется $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \neq \mathbb{0}$;

(2) подалгебра B, порожденная объединением всех $\iota_\alpha(B_\alpha)$, совпадает с B.

Если булева алгебра B' и семейство мономорфизмов $\iota'_\alpha : B_\alpha \to B'$ ($\alpha \in \mathrm{A}$) удовлетворяют тем же условиям, что и в (1) и (2), то существует изоморфизм h алгебры B на алгебру B' такой, что $\iota_\alpha \circ h = \iota'_\alpha$ ($\alpha \in \mathrm{A}$). Пару $\big(B, (\iota_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}\big)$ называют *булевым* (или *тензорным*) *произведением семейства* $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ и обозначают символом $\bigotimes_{\alpha\in\mathrm{A}} B_\alpha$.

Любое непустое семейство булевых алгебр имеет единственное с точностью до изоморфизма тензорное произведение.

$\lhd$ Доказательство см. в книге Р. Сикорского [160, § 13]. $\rhd$

2.2.8. *Пополнением* булевой алгебры B именуют пару $(\iota, o(B))$, если выполнены условия:

(1) $o(B)$ — полная булева алгебра;

(2) ι — полный мономорфизм из B в $o(B)$;

(3) правильная подалгебра $o(B)$, порожденная множеством $\iota(B)$, совпадает с $o(B)$.

Разумеется, термин «пополнение» относят и к самой алгебре $o(B)$. Говорят, что пары (ι, A) и (ι', A') *изоморфны*, если существует изоморфизм $h : A \to A'$ такой, что $h \circ \iota = \iota'$.

Для любой булевой алгебры существует единственное с точностью до изоморфизма пополнение, которое можно получить классическим методом сечений Дедекинда.

$\lhd$ Доказательство см. в книге Р. Сикорского [160, теоремы 35.1 и 35.2]. $\rhd$

2.3. Примеры булевых алгебр

Здесь мы собрали булевы алгебры, наиболее часто встречающиеся в функциональном анализе.

2.3.1. Напомним, что символом $\mathscr{P}(X)$ или 2^X принято обозначать множество всех подмножеств множества X. Для непустого множества X упорядоченное по включению множество подмножеств $\mathscr{P}(X)$ есть полная булева алгебра, которую изредка называют *булеаном* X. При этом булевы операции совпадают с теоретико-множественными операциями объединения, пересечения и дополнения. Обозначим символом $\mathscr{P}_0(X)$ подмножество $\mathscr{P}(X)$, состоящее из конечных множеств и их дополнений. Тогда $\mathscr{P}_0(X)$ — подалгебра $\mathscr{P}(X)$.

2.3.2. Пусть X — топологическое пространство. Множество всех *открыто-замкнутых* (т. е. открытых и замкнутых одновременно) подмножеств пространства X, упорядоченное по включению, служит подалгеброй булеана $\mathscr{P}(X)$. Эту подалгебру мы будем обозначать символом $\mathrm{Clop}(X)$. Булевы операции в $\mathrm{Clop}(X)$ индуцированы из $\mathscr{P}(X)$, а значит, совпадают с теоретико-множественными операциями. Однако $\mathrm{Clop}(X)$, как правило, не является правильной подалгеброй $\mathscr{P}(X)$, т. е. бесконечные операции в $\mathscr{P}(X)$ и $\mathrm{Clop}(X)$ могут существенно различаться. Точные границы в $\mathrm{Clop}(X)$, если они существуют, вычисляются по формулам

$$\bigvee_{\xi\in\Xi} U_\xi = \mathrm{cl}\Big(\bigcup_{\xi\in\Xi} U_\xi\Big), \quad \bigwedge_{\xi\in\Xi} U_\xi = \mathrm{int}\Big(\bigcap_{\xi\in\Xi} U_\xi\Big),$$

где int и cl — операции взятия внутренности и замыкания в топологическом пространстве X.

2.3.3. Замкнутое подмножество F топологического пространства X называют *регулярным*, если $F = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(F))$, т. е. если F совпадает с замыканием множества своих внутренних точек. Аналогично, *регулярное открытое множество* G определяют соотношением $G = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(G))$. Пусть $\mathrm{RC}\,(X)$ и $\mathrm{RO}\,(X)$ — множества регулярных замкнутых подмножеств и регулярных открытых подмножеств топологического пространства X.

Множества $\mathrm{RC}\,(X)$ *и* $\mathrm{RO}\,(X)$, *упорядоченные по включению, служат полными булевыми алгебрами с нулем* $\mathbb{0} := \varnothing$ *и единицей* $\mathbb{1} := X$. *Отображение* $F \mapsto \mathrm{int}\,F$ $(F \in \mathrm{RC}\,(X))$ *устанавливает изоморфизм между ними, причем обратный изоморфизм имеет вид* $G \mapsto \mathrm{cl}(G)$ $(G \in \mathrm{RO}\,(X))$.

$\lhd$ Указанные отображения устанавливают изоморфизм упорядоченных множеств $\mathrm{RC}\,(X)$ и $\mathrm{RO}\,(X)$. Следовательно, достаточно убедиться в том, что одно из этих множеств является полной булевой алгеброй. Легко проверить, что $\mathrm{RC}\,(X)$ — дистрибутивная решетка, причем решеточные операции в ней имеют вид:

$$E \vee F = E \cup F, \quad E \wedge F = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(E \cap F)).$$

В этой решетке $\mathbb{0} := \varnothing$ и $\mathbb{1} := X$ служат соответственно нулем и единицей и каждый элемент $F \in \mathrm{RC}\,(X)$ имеет дополнение F^*, вычисляемое по формуле $F^* = \mathrm{cl}(X - F)$. Чтобы установить полноту алгебры $\mathrm{RC}\,(X)$, достаточно заметить, что в $\mathrm{RC}\,(X)$ точные границы произвольных множеств могут быть вычислены по правилам:

$$\bigvee_{\xi\in\Xi} F_\xi = \mathrm{cl}\left(\mathrm{int}\left(\bigcup_{\xi\in\Xi} F_\xi\right)\right), \quad \bigwedge_{\xi\in\Xi} F_\xi = \mathrm{cl}\left(\mathrm{int}\left(\bigcap_{\xi\in\Xi} F_\xi\right)\right). \rhd$$

Как видно, алгебры $\mathrm{RC}\,(X)$ и $\mathrm{RO}\,(X)$ содержатся в булеане $\mathscr{P}(X)$, но не являются его подалгебрами.

2.3.4. Пусть $\mathrm{Bor}(X)$ — *борелевская σ-алгебра* топологического пространства X, т. е. σ-правильная подалгебра булеана $\mathscr{P}(X)$, порожденная топологией. Рассмотрим в $\mathrm{Bor}(X)$ идеал $\mathscr{N}$, состоящий из всех тощих множеств. Напомним, что множество в топологическом пространстве называют *тощим* или *множеством первой категории*, если оно представимо в виде объединения последовательности нигде не плотных множеств. Фактор-алгебру $\mathrm{Bor}(X)/\mathscr{N}$ называют *алгеброй борелевских множеств по модулю тощих множеств.*

Изоморфная алгебра получится, если вместо $\mathrm{Bor}(X)$ взять σ-алгебру множеств, обладающих свойством Бэра. Множество $M \subset X$ обладает *свойством Бэра*, если для некоторого открытого $G \subset X$ симметрическая разность $M \vartriangle G$ есть тощее множество. Алгебра множеств, обладающих свойством Бэра, содержит в себе борелевскую σ-алгебру.

Если пространство X *бэровское*, т. е. если в нем нет непустых открытых тощих множеств, то указанная алгебра изоморфна алгебре регулярных замкнутых множеств $\mathrm{RC}\,(X)$.

Алгебра борелевских множеств топологического пространства по модулю тощих множеств является полной булевой алгеброй.

$\lhd$ Из 2.2.4 видно, что $\mathscr{A} := \mathrm{Bor}(X)/\mathscr{N}$ — это σ-алгебра. Борелевская σ-алгебра лежит в алгебре множеств, обладающих свойством Бэра, так как последняя является σ-алгеброй и содержит все открытые множества. Таким образом, каждое борелевское множество $C \in \mathrm{Bor}(X)$ представимо в виде $C = (G \setminus N_1) \cup N_2$, где G — открытое множество и $N_1, N_2 \in \mathscr{N}$. Если при этом $\varphi : \mathrm{Bor}(X) \to \mathscr{A}$ — фактор-гомоморфизм, то $\varphi(C) = \varphi(G)$. Возьмем произвольное семейство $(A_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathscr{A}$. В силу сделанных замечаний существует семейство открытых множеств $(G_\xi)_{\xi\in\Xi}$ такое, что $A_\xi = \varphi(G_\xi)$ для всех $\xi \in \Xi$. Пусть $A = \varphi(G)$, где G — объединение всех G_ξ. Тогда $A = \bigvee_{\xi\in\Xi} A_\xi$ в алгебре $\mathscr{A}$.

В самом деле, нетрудно проверить, что A — верхняя граница семейства (A_ξ). Пусть $C_0 \in \mathrm{Bor}(X)$ и $\varphi(C_0)$ — верхняя граница того же семейства. Тогда $G_\xi \setminus C_0 \in \mathscr{N}$ для всех $\xi \in \Xi$. Множества $G_\xi \setminus C_0$ являются тощими и открытыми в индуцированной топологии объединения $G \setminus C_0$, ибо $G_\xi \setminus C_0 = (G \setminus C_0) \cap G_\xi$. Тогда объединение $A = G \setminus C_0$ также тощее множество, см. у К. Куратовского [88, с. 87]. Таким образом, $G \setminus C_0 \in \mathscr{N}$. Стало быть, $\varphi(G) \leqslant \varphi(C_0)$, что и требовалось. $\rhd$

2.3.5. Допустим, что $\mu : B \to \mathbb{R}$ — конечно аддитивная функция на булевой алгебре B. Это означает справедливость равенства $\mu(b_1 \vee b_2) = \mu(b_1) + \mu(b_2)$ для любых дизъюнктных $b_1, b_2 \in B$. Говорят, что функция μ *существенно положительна*, если $\mu(b) > 0$ для каждого ненулевого $b \in B$.

Если на булевой алгебре определена существенно положительная конечно аддитивная функция, то эта алгебра счетного типа.

$\lhd$ Возьмем дизъюнктное множество $A \subset B$ и положим $A_n := \{a \in A : \mu(a) \geqslant 1/n\}$. Тогда $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ввиду существенной положительности функции μ и, стало быть, достаточно убедиться в конечности множества A_n. Если $a_1, \dots, a_m$ — это m различных элементов из A_n, то

$$\mu(\mathbb{1}) \geqslant \mu(a_1 \vee \ldots \vee a_m) = \sum_{k=1}^{m} \mu(a_k) \geqslant \frac{m}{n}.$$

Стало быть, m ограничено сверху числом $n\mu(\mathbb{1})$, а множество A_n конечно. $\rhd$

Положим $J := J(\mu) := \{b \in B : \mu(b) = 0\}$. Тогда J — идеал B, а на фактор-алгебре B/J имеется существенно положительная конечно аддитивная функция $\widetilde{\mu} : B/J \to \mathbb{R}$, такая что $\mu = \widetilde{\mu} \circ \varphi$, где $\varphi : B \to B/J$ — канонический гомоморфизм. Таким образом, алгебра вида $B/J(\mu)$ всегда является алгеброй счетного типа, если μ конечна.

2.3.6. Рассмотрим непустое множество Ω, σ-алгебру $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ подмножеств Ω и *меру* на $\mathscr{B}$, являющуюся положительной счетно аддитивной функцией $\mu : \mathscr{B} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Счетная аддитивность* μ означает, как обычно, что

$$\mu\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

для каждой дизъюнктной последовательности (A_n) элементов из $\mathscr{B}$.

Тройку $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ именуют *пространством с мерой*, если выполнены следующие условия:

(1) если $A \subset \Omega$ и $A \cap K \in \mathscr{B}$ для каждого $K \in \mathscr{B}$, удовлетворяющего условию $\mu(K) < +\infty$, то $A \in \mathscr{B}$;

(2) если $A \in \mathscr{B}$ и $\mu(A) = +\infty$, то существует $A_0 \in \mathscr{B}$ такой, что $A_0 \subset A$ и $0 < \mu(A_0) < +\infty$;

(3) если $A \in \mathscr{B}$, $\mu(A) = 0$ и $A_0 \subset A$, то $A_0 \in \mathscr{B}$.

Пусть $\mathscr{N} := \mathscr{N}(\mu) := \{A \in \mathscr{B} : \mu(A) = 0\}$. Из счетной аддитивности μ видно, что $\mathscr{N}$ — это σ-идеал. Фактор-алгебра $B(\Omega) := B(\Omega, \mathscr{B}, \mu) := \mathscr{B}/\mathscr{N}$ также является σ-алгеброй, которую именуют алгеброй, *ассоциированной* с рассматриваемым пространством с мерой, или же *алгеброй измеримых множеств по модулю множеств меры нуль*. Функция $\widetilde{\mu} : B(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, определяемая равенством $\mu = \widetilde{\mu} \circ \varphi$, где $\varphi : \mathscr{B} \to B(\Omega)$ — фактор-гомоморфизм, счетно аддитивна, существенно положительна и локально конечна (см. 2.5.9).

2.3.7. Выясним условия порядковой полноты ассоциированной булевой алгебры $B(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$. Говорят, что измеримое пространство $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ обладает *свойством прямой суммы*, если $\mathscr{B}$ содержит семейство $(\Omega_\xi)_{\xi \in \Xi}$ попарно дизъюнктных множеств конечной меры, удовлетворяющих следующему требованию: для каждого измеримого подмножества $A \in \mathscr{B}$ конечной меры существуют счетное множество индексов $\Theta \subset \Xi$ и множество меры нуль $A_0 \in \mathscr{N}$ такие, что

$$A = A_0 \cup \left(\bigcup_{\xi \in \Theta} (A \cap \Omega_\xi) \right).$$

Из свойств (1) и (3) пространства с мерой вытекает, что множество $\Omega' := \bigcup_{\xi \in \Xi} \Omega_\xi$ входит в $\mathscr{B}$ и $\mu(\Omega \setminus \Omega') = 0$. Присоединив $\Omega \setminus \Omega'$ к одному из Ω_ξ, можно считать без ограничения общности, что $\Omega = \Omega'$.

Если пространство с мерой $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ обладает свойством прямой суммы, то ассоциированная булева алгебра $B(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ порядково полна.

$\triangleleft$ Пусть $(\Omega_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение множества Ω, обеспечивающее выполнение свойства прямой суммы для $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$. Положим $\mathscr{B}_\xi := \{A \cap \Omega_\xi : A \in \mathscr{B}\}$ и обозначим символом μ_ξ ограничение μ на $\mathscr{B}_\xi$. Легко видеть, что $(\Omega_\xi, \mathscr{B}_\xi, \mu_\xi)$ — пространство с конечной мерой. Из 2.1.10 (3), 2.2.4 и 2.3.5 вытекает порядковая полнота ассоциированной алгебры $B_\xi := B(\Omega_\xi, \mathscr{B}_\xi, \mu_\xi)$. В силу 2.2.5 достаточно доказать, что B изоморфна декартову произведению $B' := \prod_{\xi \in \Xi} B_\xi$. Пусть $\varphi : \mathscr{B} \to B$ и $\varphi_\xi : \mathscr{B}_\xi \to B_\xi$ — канонические фактор-гомоморфизмы. Элементу $a = \varphi(A)$, где $A \in \mathscr{B}$, сопоставим семейство $h(a) := \big(\varphi_\xi(A \cap \Omega_\xi)\big)$. Тогда $h : B \to B'$ — булев мономорфизм. Если $a_\xi = \varphi_\xi(A_\xi)$, где $A_\xi \in \mathscr{B}_\xi$ и $\xi \in \Xi$, то существует множество $A \in \mathscr{B}$, для которого $h(\varphi(A)) = (a_\xi)_{\xi \in \Xi}$. В самом деле, достаточно положить $A := \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi$ и показать, что $A \in \mathscr{B}$. Последнее выводится из условия (1) определения пространства с мерой из 2.3.6 следующим образом. Произвольное множество конечной меры $C \in \mathscr{B}$ допускает представление

$$C = C_0 \cup \left(\bigcup_{\xi \in \Theta} (C \cap \Omega_\xi) \right)$$

со счетным множеством индексов Θ ввиду свойства прямой суммы. Но тогда, учитывая очевидное соотношение $A \cap \Omega_\xi \in \mathscr{B}$, можно написать

$$A \cap C = (A \cap C_0) \cup \left(\bigcup_{\xi \in \Theta} (A \cap C \cap \Omega_\xi) \right) \in \mathscr{B}.$$

Значит, $A \in \mathscr{B}$, что и требовалось. $\triangleright$

2.3.8. Пусть H — комплексное гильбертово пространство и $\mathscr{L}(H)$ — алгебра всех ограниченных эндоморфизмов H, т. е. всюду определенных непрерывных линейных операторов, действующих из H в H. *Коммутант* A' множества $A \subset \mathscr{L}(H)$ вводят формулой $A' := \{T \in \mathscr{L}(H) : (\forall S \in A)\ (TS = ST)\}$, а *бикоммутант* — правилом $A'' := (A')'$. *Алгеброй фон Неймана* называют любую самосопряженную ($T \in A \to T^* \in A$) подалгебру $A \subset \mathscr{L}(H)$, совпадающую со своим бикоммутантом.

Возьмем коммутативную алгебру фон Неймана A. Множество всех ортопроекторов, содержащихся в A, мы обозначим символом $\mathfrak{P}(A)$. Отношение порядка в $\mathfrak{P}(A)$ принято задавать следующим способом:

$$\pi \leqslant \rho \leftrightarrow \pi(H) \subset \rho(H) \quad (\pi, \rho \in \mathfrak{P}(A)).$$

При этом $\mathfrak{P}(A)$ — полная булева алгебра и булевы операции имеют вид

$$\pi \vee \rho = \pi + \rho - \pi \circ \rho, \quad \pi \wedge \rho = \pi \circ \rho, \quad \pi^* = I_H - \pi.$$

2.3.9. Пусть $\mathscr{T}$ — теория первого порядка, основанная на классической (двузначной) логике. В множестве всех высказываний Φ теории $\mathscr{T}$ введем отношение предпорядка, полагая $\varphi \preccurlyeq \psi$ в том и только в том случае, если формула $\varphi \to \psi$ — это теорема теории $\mathscr{T}$. Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$ в Φ:

$$\varphi{\sim}\psi \leftrightarrow \varphi \preccurlyeq \psi \wedge \psi \preccurlyeq \varphi \quad (\varphi, \psi \in \Phi).$$

Пусть $\mathfrak{A}(\mathscr{T}) := \Phi/{\sim}$ — соответствующее фактор-множество, снабженное индуцированным порядком. Точнее, если $|\varphi|$ — класс эквивалентности формулы $\varphi \in \Phi$, то $|\varphi| \leqslant |\psi|$ означает, что $\varphi \preccurlyeq \psi$. Возникающее упорядоченное множество $\mathfrak{A}(\mathscr{T})$ является булевой алгеброй. Ее называют иногда *алгеброй Линденбаума — Тарского* теории $\mathscr{T}$. Булевы операции в $\mathfrak{A}(\mathscr{T})$ имеют вид

$$|\varphi| \vee |\psi| := |\varphi \vee \psi|,$$
$$|\varphi| \wedge |\psi| := |\varphi \wedge \psi|,$$
$$|\varphi|^* := |\neg\varphi|.$$

Перевод логических проблем формальных теорий на язык соответствующих им булевых алгебр — алгебр Линденбаума — Тарского — именуют *булевым методом.* Подробности см. у Дж. Белла и А. Сломсона [167], Е. Расёвой и Р. Сикорского [155].

2.3.10. Рассмотрим произвольную булеву алгебру $\mathbb{B}$. Пусть Φ_0 и Φ те же, что и в 1.1.3. Отображение $v : \Phi_0 \to \mathbb{B}$ называют *булевозначной оценкой* или, короче, $\mathbb{B}$-*оценкой.* Это отображение можно продолжить на множество всех формул Φ, используя правила:

$$v(\neg\varphi) := v(\varphi)^*,$$
$$v(\varphi \wedge \psi) := v(\varphi) \wedge v(\psi),$$
$$v(\varphi \vee \psi) := v(\varphi) \vee v(\psi),$$
$$v(\varphi \to \psi) := v(\varphi) \Rightarrow v(\psi).$$

Если $v(\varphi) = \mathbb{1}$ для каждой $\mathbb{B}$-оценки v, то предложение φ называют $\mathbb{B}$-общезначимым и пишут $\mathbb{B} \vDash \varphi$. Если же последнее выполнено для каждой булевой алгебры $\mathbb{B}$, то мы будем говорить о BA-общезначимости предложения φ и писать $\mathrm{BA} \vDash \varphi$. *Тавтологией* называют произвольное 2-общезначимое предложение. Можно показать, что для любого предложения φ исчисления высказываний имеют место следующие эквивалентности:

$$2 \vDash \varphi \;\leftrightarrow\; \mathbb{B} \vDash \varphi \;\leftrightarrow\; \mathrm{BA} \vDash \varphi.$$

Теорема. *Предложение является* BA*-общезначимым в том и только в том случае, когда оно выводимо в исчислении высказываний:*

$$\mathrm{BA} \vDash \varphi \;\leftrightarrow \vdash_{\mathrm{CL}} \varphi.$$

Сформулированный результат принято называть *теоремой о полноте для исчислений высказываний.* Отметим, что аналогичный результат имеет место и для *классического исчисления предикатов.*

2.4. Реализация булевых алгебр

Фундаментальный факт теории булевых алгебр — теорема Стоуна — утверждает, что произвольную булеву алгебру можно представить в виде алгебры открыто-замкнутых подмножеств компактного пространства. Доказательство этой теоремы и описание некоторых связанных с ней возможностей — основная цель настоящего параграфа.

2.4.1. Пусть $\mathbb{2} := \mathbb{Z}_2 := \mathscr{P}(\{\varnothing\}) := \{0, 1\}$ — двухэлементное множество, наделенное структурой поля с помощью соотношений:

$$0 + 0 := 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 := 1, \quad 1 + 1 := 0,$$
$$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 := 0, \quad 0 \cdot 0 := 0, \quad 1 \cdot 1 := 1.$$

Отметим, что все элементы поля $\mathbb{2}$ идемпотентны. Рассмотрим теперь произвольное множество B, наделенное структурой ассоциативного кольца с единицей, в котором каждый элемент идемпотентен: $b \in B \to b^2 = b$. Тогда B называют *булевым кольцом*. Такое кольцо коммутативно и удовлетворяет тождеству $b = -b$ для $b \in B$. Ясно, что булево кольцо является векторным пространством над полем $\mathbb{2}$, более того, коммутативной алгеброй над этим полем.

Напомним, что единицу алгебры считают по определению отличной от ее нуля. Естественно, поле $\mathbb{2}$ можно отождествить с подкольцом булева кольца, составленным из нуля и единицы последнего. Это отражено в обозначениях: для нуля любого кольца используют символ $\mathbb{0}$, для единицы — символ $\mathbb{1}$. Конечно, такое соглашение приводит к довольно обычной коллизии (в поле $\mathbb{2}$ сложение и умножение можно поменять местами, причем $\mathbb{0}$ станет играть роль $\mathbb{1}$ и наоборот).

Булево кольцо B всегда рассматривают с отношением порядка, определенным правилом:

$$b_1 \leqslant b_2 \leftrightarrow b_1 b_2 = b_1 \quad (b_1, b_2 \in B).$$

Непосредственно выясняется, что упорядоченное множество $(B, \leqslant)$ представляет собой дистрибутивную решетку с наименьшим элементом $\mathbb{0}$ и с наибольшим $\mathbb{1}$. При этом решеточные операции связаны с кольцевыми следующим образом:

$$x \vee y = x + y + xy, \quad x \wedge y = xy.$$

Более того, у каждого элемента $b \in B$ имеется, и притом единственное, дополнение, т. е. такой элемент b^*, что

$$b^* \vee b = \mathbb{1}, \quad b^* \wedge b = \mathbb{0}.$$

Очевидно, что $b^* = \mathbb{1} + b$. Итак, всякое булево кольцо станет булевой алгеброй, если в нем определить порядок указанным выше способом.

В свою очередь, в булевой алгебре B можно ввести структуру кольца, полагая

$$x + y := x \bigtriangleup y, \quad xy := x \wedge y \quad (x, y \in B).$$

При этом $(B, +, \cdot, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ становится булевым кольцом с единицей, для которого вновь возникающее отношение порядка совпадает с уже имеющимся.

Таким образом, булеву алгебру допустимо рассматривать как алгебру с единицей над полем $\mathbb{2}$, в которой каждый элемент идемпотентен.

2.4.2. Пусть B — произвольная булева алгебра.

(1) *Характером* алгебры B называют булев гомоморфизм $\chi : B \to \mathbb{2}$. Обозначим символом $\mathrm{X}(B)$ множество всех характеров B с топологией поточечной сходимости. Точнее, топология в $\mathrm{X}(B)$ индуцирована топологией произведения из $\mathbb{2}^B$, причем множество $\mathbb{2}$ наделено единственной компактной хаусдорфовой топологией — дискретной топологией. Отметим, что все обсуждаемые топологические пространства мы будем считать хаусдорфовыми. Напомним, что топологическое пространство X *связно*, если X и $\varnothing$ являются единственными открыто-замкнутыми подмножествами X. Топологическое пространство X именуют *вполне несвязным*, если любое связное подпространство X содержит не более одной точки. Введенное выше топологическое пространство $\mathbb{2}^B$ — *канторов дисконтинуум* — хаусдорфово, компактно и вполне несвязно. Топологическое пространство с такими свойствами принято называть *булевым*. Понятно, что $\mathrm{X}(B)$ — замкнутое подмножество $\mathbb{2}^B$. Следовательно, $\mathrm{X}(B)$ само является булевым пространством. Множество $\mathrm{X}(B)$ называют *пространством характеров* булевой алгебры B. Всюду далее *компактом* или *компактным пространством* мы именуем компактное хаусдорфово топологическое пространство.

(2) Напомним, что непустое подмножество $\mathscr{F} \subset B$ называют *фильтром*, если

$$x \in \mathscr{F} \wedge y \in \mathscr{F} \to x \wedge y \in \mathscr{F}, \quad x \in \mathscr{F} \wedge x \leqslant y \to y \in \mathscr{F}.$$

Фильтр, отличный от B, именуют *собственным*. О максимальных (по включению) элементах множества всех собственных фильтров говорят как об *ультрафильтрах*.

Пусть $U(B)$ — множество всех ультрафильтров в B, а $U(b)$ — множество ультрафильтров в B, содержащих b. Снабдим $U(B)$ топологией, приняв систему множеств $\{U(b) : b \in B\}$ за базу топологии. Такое определение топологии корректно, ибо, как легко проверить, $U(x \wedge y) = U(x) \cap U(y) \quad (x, y \in B)$, т. е. $U(B)$ замкнуто относительно конечных пересечений. Топологическое пространство $U(B)$ часто называют *стоуновым пространством булевой алгебры* B и обозначают $\mathrm{St}(B)$.

(3) Пусть $M(B)$ — множество всех максимальных (собственных) идеалов алгебры B. Идеал здесь можно понимать в соответствии с 2.1.8, равно как и в стандартном смысле теории колец. Множество $J \subset B$ будет идеалом в том и только в том случае, если $J^* := \{x^* : x \in J\}$ — фильтр в B. Более того, $J \in M(B) \leftrightarrow J^* \in U(B)$. Таким образом, отображение $J \mapsto J^*$ осуществляет биекцию между $M(B)$ и $U(B)$. Множество $M(B)$ принято называть *пространством максимальных идеалов* и наделять той единственной топологией, которая делает гомеоморфизмом отображение $J \mapsto J^*$.

2.4.3. В следующих двух пунктах отметим некоторые вспомогательные факты, необходимые в связи с применением *преобразования Гельфанда* в рассматриваемой ситуации.

(1) *Булево кольцо B является полем в том и только в том случае, если оно содержит в точности два элемента — $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$. Следовательно, $\mathbb{2}$ — единственное с точностью до изоморфизма булево поле.*

$\lhd$ В самом деле, ненулевой элемент $x \in B$ обратим и поэтому справедливы импликации:

$$xx^{-1} = \mathbb{1} \to xxx^{-1} = x \to xx^{-1} = x \to x = \mathbb{1}. \rhd$$

Взяв $\chi \in \mathrm{X}(B)$, мы обозначим символом χ^* отображение $x \mapsto \chi(x)^*$ $(x \in B)$. Как видно, $\ker(\chi) := \{x \in B : \chi(x) = \mathbb{0}\}$ — идеал, а $\ker(\chi^*)$ — фильтр.

(2) *Отображение* $\chi \mapsto \ker(\chi)$ $(\chi \in \mathrm{X}(B))$ *является гомеоморфизмом* $\mathrm{X}(B)$ *на* $M(B)$.

$\lhd$ Отображение $\chi \mapsto \ker(\chi)$ инъективно. Если $J \in M(B)$, то B/J — поле и, согласно (1), оно изоморфно $\mathbb{2}$. Зафиксируем изоморфизм $\lambda : B/J \to \mathbb{2}$ и положим $\chi := \lambda \circ \varphi$, где $\varphi : B \to B/J$ — фактор-гомоморфизм. Ясно, что $\ker(\chi) = J$, значит, указанное отображение биективно. Остальные утверждения очевидны. $\rhd$

(3) *Собственный идеал J (фильтр) булевой алгебры B будет максимальным идеалом (ультрафильтром) в том и только в том случае, если для любого $b \in B$ либо $b \in J$, либо $b^* \in J$.*

$\lhd$ Пусть J — максимальный идеал булевой алгебры B. Согласно (2) $J = \ker(\chi)$ для некоторого характера $\chi \in \mathrm{X}(B)$. Элементы $\chi(b)$ и $\chi(b^*)$ алгебры $\{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ дизъюнктны. Поэтому либо $\chi(b) = \mathbb{0}$, либо $\chi(b^*) = \mathbb{0}$. Наоборот, пусть J — собственный идеал, причем для любого $b \in B$ один из двух элементов b или b^* входит в J. Если $\bar{J}$ — собственный идеал, содержащий J и $b \in \bar{J}$, то $b \in J$. В противном случае $b^* \in J \subset \bar{J}$ и потому $\mathbb{1} = b \vee b^* \in \bar{J}$. Но тогда идеал $\bar{J}$ не может быть собственным. $\rhd$

2.4.4. (1) Теорема Крулля. *Всякий собственный идеал булевой алгебры можно расширить до максимального (собственного) идеала.*

$\lhd$ Множество всех собственных идеалов булевой алгебры, упорядоченное по включению, удовлетворяет условиям леммы Куратовского — Цорна. В самом деле, объединение линейно упорядоченного семейства собственных идеалов есть собственный идеал, служащий верхней границей этого семейства. Таким образом, любой собственный идеал лежит в некотором максимальном идеале. $\rhd$

(2) *Любой характер подалгебры $B_0 \subset B$ допускает продолжение до характера всей алгебры B.*

$\lhd$ Пусть $\chi_0 \in \mathrm{X}(B_0)$ и $J_0 := \ker(\chi_0)$. Положим $J' := \bigcup\{[\mathbb{0}, b] : b \in J_0\}$, где $[0, b]$ — порядковый интервал в B. Ясно, что J' — идеал и, согласно теореме Крулля, он лежит в некотором максимальном идеале $J \in M(B)$. В силу 2.4.3 (2) существует характер $\chi \in \mathrm{X}(B)$, для которого $J = \ker(\chi)$. Если $b \in B_0 \cap J$, то в силу 2.4.3 (3) $b^* \in J$. Следовательно, $b^* \notin J_0$ и вновь по 2.4.3 (3) $b \in J_0$. Итак, $B_0 \cap J = J_0$, а это означает, что ограничение χ на B_0 совпадает с χ_0. $\rhd$

(3) *Для любого отличного от нуля элемента $b \in B$ существует характер $\chi \in \mathrm{X}(B)$ такой, что $\chi(b) = \mathbb{1}$.*

$\lhd$ Предположим, что $\mathbb{0} \neq b \in B$. Определим на четырехэлементной подалгебре $B_0 := \{\mathbb{0}, b, b^*, \mathbb{1}\}$ алгебры B характер χ_0 равенствами $\chi_0(b) := \chi_0(\mathbb{1}) := \mathbb{1}$ и $\chi_0(b^*) := \chi_0(\mathbb{0}) := \mathbb{1}$. Искомый характер — продолжение χ_0 на всю алгебру B, существование которого гарантировано предложением (2). $\rhd$

2.4.5. Теорема Стоуна. *Каждая булева алгебра B изоморфна булевой алгебре открыто-замкнутых множеств единственного с точностью до гомеоморфизма вполне несвязного компакта — стоунова компакта алгебры B.*

◁ Пусть $C(\mathrm{X}(B), \mathbb{2})$ — алгебра непрерывных $\mathbb{2}$-значных функций, определенных на вполне несвязном компакте $\mathrm{X}(B)$. *Преобразование Гельфанда* $\mathscr{G}_B$ элементу $x \in B$ ставит в соответствие $\mathbb{2}$-значную функцию

$$\widehat{x} : \chi \mapsto \chi(x) \quad (\chi \in \mathrm{X}(B)).$$

Понятно, что $\mathscr{G}_B : B \to C(\mathrm{X}(B), \mathbb{2})$ — гомоморфизм. Из 2.4.4 (3) вытекает инъективность этого гомоморфизма. Возьмем $f \in C(\mathrm{X}(B), \mathbb{2})$ и положим $V_f := \{\chi \in \mathrm{X}(B) : f(\chi) = \mathbb{1}\}$. Множество V_f открыто-замкнуто. По определению топологии в $\mathrm{X}(B)$ найдутся $b_1, \dots, b_k \in B$ и $c_1, \dots, c_l \in B$ такие, что

$$V_f := \big\{\chi \in \mathrm{X}(B) : \ \chi(b_n) = \mathbb{1} \ (n \leqslant k), \ \chi(c_m) = \mathbb{0} \ (m \leqslant l)\big\}.$$

Положим $b_0 := b_1 \wedge \ldots \wedge b_k$, $c_0 := c_1 \vee \ldots \vee c_l$ и $b := b_0 \wedge c_0^*$. Множество V_f можно описать так:

$$\begin{aligned} V_f = \{\chi \in \mathrm{X}(B) : \ \chi(b_0) = \mathbb{1} \wedge \chi(c_0) = \mathbb{0}\} = \\ = \{\chi \in \mathrm{X}(B) : \ \chi(b) = \mathbb{1}\} = \{\chi \in \mathrm{X}(B) : \widehat{b}(\chi) = \mathbb{1}\}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $f = \widehat{b}$. Следовательно, $\mathscr{G}_B$ — изоморфизм.

Предположим теперь, что Q_1 и Q_2 — вполне несвязные компакты и отображение $h : C(Q_1, \mathbb{2}) \to C(Q_2, \mathbb{2})$ есть изоморфизм алгебр. Если χ — характер алгебры $C(Q_2, \mathbb{2})$, то $\chi \circ h$ — характер алгебры $C(Q_1, \mathbb{2})$. При этом отображение $\chi \mapsto \chi \circ h$ осуществляет гомеоморфизм пространств характеров. С другой стороны, пространство характеров алгебры $C(Q_k, \mathbb{2})$ гомеоморфно компакту Q_k. Таким образом, компакты Q_1 и Q_2 гомеоморфны. Осталось заметить, что алгебра $C(\mathrm{X}(B), \mathbb{2})$ изоморфна алгебре открыто-замкнутых множеств пространства $\mathrm{X}(B)$, а значит, и пространства $U(B)$. ▷

В силу установленной теоремы существует изоморфизм, $B \to \mathrm{Clop}(\mathrm{St}(B))$, называемый *стоуновым представлением* алгебры B.

2.4.6. В дальнейшем нас будут интересовать, как правило, полные и σ-полные булевы алгебры. С полными булевыми алгебрами неразрывно связаны *экстремальные компакты*, т. е. компакты, представляющие собой экстремально несвязные пространства. Напомним, что топологическое пространство Q называют *экстремально несвязным* (*квазиэкстремально несвязным*) или, короче, *экстремальным* (*квазиэкстремальным*), если замыкание любого открытого множества (открытого F_σ-множества) в Q открыто или, что то же самое, внутренность всякого замкнутого множества (замкнутого G_δ-множества) в Q замкнута. Ясно, что всякое экстремальное (квазиэкстремальное) пространство вполне несвязно. Напомним, что *F_σ-множеством* (или *множеством типа F_σ*) называют объединение счетного числа замкнутых множеств, а *G_δ-множеством* (или *множеством типа G_δ*) — пересечение счетного числа открытых множеств.

2.4.7. Теорема Огасавары. *Булева алгебра является полной (σ-полной) в том и только в том случае, если ее стоунов компакт экстремален (квазиэкстремален).*

$\lhd$ Ограничимся рассмотрением случая полной булевой алгебры. Пусть B — полная булева алгебра, а h — изоморфизм B на алгебру открыто-замкнутых множеств компакта $Q := U(B)$. Возьмем открытое множество $G \subset Q$. Так как компакт Q вполне несвязен, то $G = \bigcup \mathscr{U}$, где $\mathscr{U}$ — совокупность открыто-замкнутых множеств, содержащихся в G.

Пусть $\mathscr{U}' := \{h^{-1}(U) : U \in \mathscr{U}\}$ и $b := \bigvee \mathscr{U}'$. Открыто-замкнутое множество $h(b)$ и есть замыкание G. В самом деле, $\mathrm{cl}(G) \subset h(b)$ и $h(b) \setminus \mathrm{cl}(G)$ открыто. Если последнее множество непусто, то $h(c) \subset h(b) \setminus \mathrm{cl}(G)$ для некоторого $\mathbb{0} \neq c \in B$. Но это означает, что $h(c) \vee h(u) \leqslant h(b)$ для всех $u \in \mathscr{U}'$. Последнее противоречит равенству $b = \bigvee \mathscr{U}'$. Значит, $\mathrm{cl}(G) = h(b)$ — открытое множество.

Предположим теперь, что компакт Q экстремален. Пусть $\mathscr{G}$ — множество открыто-замкнутых подмножеств Q и $G := \bigcup \mathscr{G}$. Множество G открыто, и его замыкание $\mathrm{cl}(G)$ также должно быть открытым ввиду экстремальности Q. Понятно, что $\mathrm{cl}(G)$ — точная верхняя граница множества $\mathscr{G}$ в булевой алгебре открыто-замкнутых множеств $\mathrm{Clop}(Q)$. $\rhd$

2.4.8. Теорема Сикорского. *Пусть B и B' — булевы алгебры и $h : B \to B'$ — булев гомоморфизм. Обозначим $\imath : B \to \mathrm{Clop}(\mathrm{St}(B))$ и $\imath' : B' \to \mathrm{Clop}(\mathrm{St}(B'))$ стоуновы представления B и B' соответственно. Тогда существует единственное непрерывное отображение $\theta : \mathrm{St}(B') \to \mathrm{St}(B)$ такое, что*

$$h(x) = (\imath')^{-1}\theta^{-1}(\imath(x)) \quad (x \in B).$$

Отображение $h \mapsto \mathrm{St}(h) := \theta$ осуществляет биекцию между множеством всех гомоморфизмов из B в B' и множеством всех непрерывных отображений из $\mathrm{St}(B')$ в $\mathrm{St}(B)$. Если B'' — булева алгебра и $g : B' \to B''$ — гомоморфизм, то $\mathrm{St}(g \circ h) = \mathrm{St}(h) \circ \mathrm{St}(g)$. Более того, $\mathrm{St}(I_B) = I_{\mathrm{St}(B)}$.

$\lhd$ Обозначим $Q := \mathrm{St}(B)$, а $Q' := \mathrm{St}(B')$. Если q' — ультрафильтр в B', то из 2.4.3 (3) ясно, что $q := \{b \in B : h(b) \in q'\}$ — ультрафильтр в B. Обозначив $\theta(q') := q$, мы получаем отображение $\theta : q' \in Q' \mapsto q \in Q$. Учитывая равенства $\imath(b) = \{q \in Q : b \in q\}$ $(b \in B)$ и $\imath'(b') = \{q' \in Q' : b' \in q'\}$ $(b' \in B)$, мы получаем

$$\begin{aligned}\imath' h(b) = \{q' \in Q' : h(b) \in q'\} = \{q' \in Q' : b \in q\} = \\ = \{q' \in Q' : \theta(q') \in \imath(b)\} = \theta^{-1}(\imath(b)).\end{aligned}$$

В частности, $\theta(q') \in \imath(b)$ в том и только в том случае, если $q' \in \imath'(h(b))$. Таким образом, отображение θ непрерывно. Остальные свойства θ очевидны. $\rhd$

Отображение $\mathrm{St}(h)$ называют *индуцирующим отображением гомоморфизма h*.

2.4.9. Теорема Люмиса — Сикорского. *Пусть Q — стоунов компакт σ-алгебры B. Обозначим символом $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)$ σ-алгебру подмножеств Q, порожденную совокупностью $\mathrm{Clop}(Q)$ всех открыто-замкнутых подмножеств Q. Пусть Δ обозначает σ-идеал $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)$, состоящий из тощих множеств. Тогда алгебра B изоморфна фактор-алгебре $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)/\Delta$. Если $\imath$ — изоморфизм B на $\mathrm{Clop}(Q)$, а φ — фактор-отображение из $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)$ на фактор-алгебру $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)/\Delta$, то $h := \varphi \circ \imath$ — изоморфизм B на $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)/\Delta$.*

$\lhd$ Заметим, что отображение h является композицией двух гомоморфизмов и, стало быть, само служит гомоморфизмом. Если $h(b) = \mathbb{0}$, то $\imath(b) \in \Delta$. Поэтому

$\imath(b) = \varnothing$, так как непустое открыто-замкнутое множество не может быть тощим. Таким образом, h — инъективный гомоморфизм.

Для доказательства сюръективности h положим

$$\mathscr{F} := \{A \in \mathrm{Clop}_\sigma(Q) : (\exists\, b \in B)\, \varphi(A) = h(b)\}.$$

Так как $\mathrm{Clop}(Q) \subset \mathscr{F} \subset \mathrm{Clop}_\sigma(Q)$, то достаточно показать, что $\mathscr{F}$ — это σ-алгебра. Если $A \in \mathscr{F}$, то $\varphi(Q \setminus A) = h(b^*)$, так что $Q \setminus A \in \mathscr{F}$. Далее, рассмотрим последовательность (A_n) в $\mathscr{F}$ и выберем последовательность (b_n) в B такую, что $\varphi(A_n) = h(b_n)$. В соответствии с 2.3.2 $\imath\,(\bigvee_{n=1}^{\infty} b_n) = A_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \imath(b_n)$ с нигде не плотным множеством $A_0 \subset Q$. Используя это равенство, выводим:

$$\varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \varphi\Big(A_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \varphi\Big(A_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \imath(b_n)\Big) =$$
$$= \varphi\Big(\imath\Big(\bigvee_{n=1}^{\infty} b_n\Big)\Big) = h\Big(\bigvee_{n=1}^{\infty} b_n\Big).$$

Таким образом, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A \in \mathscr{F}$, что и завершает доказательство. $\triangleright$

2.4.10. Теорема Биркгофа — Улама. *Пусть Q — компактное топологическое пространство. Существует порядково σ-непрерывный гомоморфизм h из борелевской σ-алгебры $\mathrm{Bor}(Q)$ на алгебру регулярных открытых множеств $\mathrm{RO}\,(Q)$, причем ядро h совпадает с идеалом тощих множеств $\mathscr{N}$.*

$\triangleleft$ Фактор-гомоморфизм $\varphi : \mathrm{Bor}(Q) \to \mathrm{Bor}(Q)/\mathscr{N}$ является σ-непрерывным. Компактное пространство — бэровское по теореме Бэра о категориях. Следовательно, существует изоморфизм $\imath$ из $\mathrm{Bor}(Q)/\mathscr{N}$ на $\mathrm{RO}\,(Q)$. Как видно, $h := \varphi \circ \imath$ — искомый гомоморфизм (см. 2.3.4). $\triangleright$

2.5. Свойства стоунова представления

В текущем параграфе мы выясним, как устроены стоуновы компакты булевых алгебр, определяемых с помощью конструкций из 2.4. Кроме того, будет дана характеризация гиперстоуновых компактов.

2.5.1. Начнем с простейших примеров.

(1) Стоунов компакт алгебры $\{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ есть одноточечное множество. Если булева алгебра конечна, то она состоит из 2^n элементов для некоторого $n \in \mathbb{N}$, и ее стоунов компакт содержит в точности n точек.

(2) Некомпактное локально компактное топологическое пространство X допускает компактификацию $\alpha X := X \cup \{\omega\}$ с одноточечным наростом ω. По определению открытыми множествами в αX будут только открытые множества в X и множества вида $(X \setminus K) \cup \{\omega\}$, где K — любое компактное множество в X. Компакт αX называют *александровской* или *одноточечной компактификацией* пространства X (см. Р. Энгелькинг [180, теорема 3.5.11]).

Стоунов компакт алгебры $\mathscr{P}_0(X)$ совпадает с александровской компактификацией αX множества X, снабженного дискретной топологией; символически, $\mathrm{St}(\mathscr{P}_0(X)) \simeq \alpha X$. Булев изоморфизм $\imath : \mathscr{P}_0(X) \to \mathrm{Clop}(\alpha X)$ имеет вид $\imath(A) = A$ для конечного A и $\imath(A) = A \cup \{\omega\}$ для бесконечного A.

2.5.2. Для произвольного вполне регулярного (= тихоновского) топологического пространства X существуют единственный с точностью до гомеоморфизма компакт βX и гомеоморфное вложение $\beta : X \to \beta X$ такие, что $\beta(X)$ плотно в βX и выполнено условие: какова бы ни была непрерывная ограниченная функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$, можно подобрать непрерывную функцию $\overline{\varphi} : \beta X \to \mathbb{R}$, для которой $\overline{\varphi} \circ \imath = \varphi$. Компакт βX именуют *компактификацией Стоуна — Чеха* или *стоун-чеховской компактификацией* пространства X, см. Р. Энгелькинг [180, теорема 3.6.1, следствие 3.6.3]. Стоун-чеховская компактификация βX экстремально несвязна в том и только в том случае, если X экстремально несвязно, см. [180, теорема 6.2.27].

В качестве примера возьмем непустое множество X. Стоунов компакт булеана $\mathscr{P}(X)$ есть компактификация Стоуна — Чеха βX множества X, рассматриваемого как дискретное топологическое пространство; символически, $\mathrm{St}(\mathscr{P}(X)) \simeq \beta X$. Булев гомоморфизм $\imath : \mathscr{P}(X) \to \mathrm{Clop}(\beta X)$ действует по правилу $\imath(A) = \mathrm{cl}_{\beta X}(\beta(A))$ $(A \subset X)$.

2.5.3. Из теоремы Сикорского 2.4.8 следует, что стоуновы компакты подалгебр и гомоморфных образов булевой алгебры представляют собой соответственно непрерывные образы и замкнутые подпространства исходного стоунова компакта.

(1) *Булева алгебра B изоморфна подалгебре булевой алгебры B' в том и только в том случае, если стоунов компакт* $\mathrm{St}(B)$ *является непрерывным образом стоунова компакта* $\mathrm{St}(B')$.

$\lhd$ Гомоморфизм $h : B \to B'$ будет мономорфизмом в том и только в том случае, если индуцирующее отображение $\mathrm{St}(h)$ сюръективно. $\rhd$

(2) *Булева алгебра B' является гомоморфным образом* (*или изоморфна фактор-алгебре, см.* 2.2.4) *булевой алгебры B в том и только в том случае, если стоунов компакт* $\mathrm{St}(B')$ *гомеоморфен замкнутому подмножеству стоунова компакта* $\mathrm{St}(B)$.

$\lhd$ Гомоморфизм $h : B \to B'$ будет эпиморфизмом в том и только в том случае, если индуцирующее отображение $\mathrm{St}(h)$ инъективно. $\rhd$

(3) *Булевы алгебры B и B' изоморфны в том и только в том случае, если их стоуновы компакты* $\mathrm{St}(B)$ *и* $\mathrm{St}(B')$ *гомеоморфны. В частности, для вполне несвязного компакта Q стоунов компакт алгебры* $\mathrm{Clop}(Q)$ *гомеоморфен Q; символически,* $\mathrm{St}(\mathrm{Clop}(Q)) \simeq Q$.

2.5.4. Рассмотрим семейство топологических пространств $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$. *Прямой суммой* этого семейства называют множество $X := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} X_\alpha \times \{\alpha\}$, снабженное такой топологией, что множество $U \subset X$ открыто в том и только в том случае, если множество $U \cap X_\alpha$ открыто в X_α для каждого $\alpha \in \mathrm{A}$. Заметим, что при этом определении топологии множество X_α открыто-замкнуто в X. Прямая сумма X экстремально несвязна в том и только в том случае, если все X_α экстремально несвязны. Пространство X не будет, вообще говоря, компактным, даже если все X_α — компакты. Поэтому естественно назвать *прямой суммой семейства компактов* $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ стоун-чеховскую компактификацию пространства X. Прямую сумму семейства компактов мы будем обозначать символом $\bigoplus_{\alpha \in \mathrm{A}} X_\alpha := \beta(X)$.

Пусть $B := \prod_{\alpha \in \mathrm{A}} B_\alpha$, где $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — непустое семейство булевых алгебр. Стоунов компакт $\mathrm{St}(B)$ *алгебры B гомеоморфен прямой сумме семейства стоуновых* *компактов* $\big(\mathrm{St}(B_\alpha)\big)_{\alpha\in\mathrm{A}}$*; символически:*

$$\mathrm{St}\left(\prod_{\alpha\in\mathrm{A}} B_\alpha\right) \simeq \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{St}(B_\alpha).$$

2.5.5. *Пусть* $B := \bigotimes_{\alpha\in\mathrm{A}} B_\alpha$ *— тензорное произведение непустого семейства булевых алгебр (см. 2.2.7). Тогда стоунов компакт* $\mathrm{St}(B)$ *алгебры* B *гомеоморфен декартову произведению семейства компактов* $\big(\mathrm{St}(B_\alpha)\big)_{\alpha\in\mathrm{A}}$; *символически*:

$$\mathrm{St}\left(\bigotimes_{\alpha\in\mathrm{A}} B_\alpha\right) \simeq \prod_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{St}\left(B_\alpha\right).$$

2.5.6. *Абсолют* компакта X — это компакт $a(X)$, удовлетворяющий следующим условиям: (a) X — непрерывный *неприводимый* прообраз $a(X)$ (т. е. существует непрерывная сюръекция $a(X)$ на X и X не является непрерывным образом никакого собственного замкнутого подмножества компакта $a(X)$); (b) всякий компактный непрерывный неприводимый прообраз компакта X гомеоморфен $a(X)$. Любое компактное пространство обладает абсолютом, являющимся экстремальным компактом, см. книги А. В. Архангельского и В. И. Пономарева [10], Р. Энгелькинга [180].

(1) *Абсолют стоунова компакта булевой алгебры* B *гомеоморфен стоунову компакту ее пополнения* $o(B)$*; символически:* $\mathrm{St}(o(B)) \simeq a(\mathrm{St}(B))$.

(2) *Пусть* X *— компактное топологическое пространство. Стоунов компакт булевой алгебры* $\mathrm{RC}\,(X)$ *(см. 2.3.3) гомеоморфен абсолюту компакта* X*; символически:* $\mathrm{St}(\mathrm{RC}\,(X)) \simeq a(X)$. *В частности, если* Q *— стоунов компакт булевой алгебры* B*, то алгебра* $\mathrm{RC}\,(Q)$ *изоморфна пополнению алгебры* B.

2.5.7. Рассмотрим пространство с мерой $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ и изучим его связь со стоуновым компактом ассоциированной алгебры $B(\Omega) := \mathscr{B}/\mu^{-1}(0)$. Пусть $\varphi : \mathscr{B} \to B(\Omega)$ — фактор-гомоморфизм. Булев гомоморфизм $\rho : B(\Omega) \to \mathscr{B}$ именуют *лифтингом* фактор-алгебры $B(\Omega)$, если $\rho(A) \in A$ для каждого класса эквивалентности $A \in B(\Omega)$. Последнее означает, что $\varphi \circ \rho$ — тождественное отображение на $B(\Omega)$. Таким образом, лифтинг является правым обратным к фактор-гомоморфизму φ. Часто лифтингом наряду с ρ называют отображение $\rho \circ \varphi$, см. работы Н. Динкуляну [210], В. Л. Левина [134].

(1) *Если пространство с мерой* $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ *обладает свойством прямой суммы, то фактор-алгебра* $B(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ *имеет лифтинг.*

$\lhd$ Доказательство можно найти в книгах А. Ионеску Тулча и К. Ионеску Тулча [252], В. Л. Левина [134]. $\rhd$

(2) *Пусть* ρ *— лифтинг фактор-алгебры* $B(\Omega)$*. Тогда для каждого семейства* $(A_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *элементов* $B(\Omega)$ *объединение* $A_s := \bigcup_{\xi\in\Xi} \rho(A_\xi)$ *и пересечение* $A_i := \bigcap_{\xi\in\Xi} \rho(A_\xi)$ *измеримы. Более того,*

$$\varphi(A_s) = \bigvee_{\xi\in\Xi} A_\xi, \qquad \varphi(A_i) = \bigwedge_{\xi\in\Xi} A_\xi.$$

$\lhd$ В силу условия (1) из 2.3.6 вопрос сводится к случаю, когда $\widetilde{\mu}(A) < +\infty$, где A — точная верхняя граница семейства A_ξ. Согласно 2.1.10 (1) и 2.3.5 существует счетное разбиение $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элемента A в булевой алгебре $B(\Omega)$ такое, что $A'_n \leqslant A_{\xi(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ для подходящей последовательности индексов $\big(\xi(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Положим $\underline{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho(A'_n)$ и $\overline{A} := \rho(A)$. Как видно, $\underline{A} \subset A_s \subset \overline{A}$, причем $\underline{A}$ и $\overline{A}$ — измеримые множества. Счетная аддитивность μ дает $\mu(\overline{A}) = \mu(\underline{A})$. Если $A_0 := A_s \setminus \underline{A}$, то $\mu(A_0) \leqslant \mu(\overline{A} \setminus \underline{A}) = 0$ и согласно условию (3) из 2.3.6 множество A_0 измеримо и имеет нулевую меру. Итак, $A_s = \underline{A} \cup A_0$, что и означает измеримость A_s, а также равенства $\varphi(A_s) = \varphi(\underline{A}) = \varphi(\overline{A}) = A$. $\triangleright$

(3) Для каждой точки $\omega \in \Omega$ ультрафильтр $\{A \in B(\Omega) :\ \omega \in \rho(A)\}$ мы обозначим символом $\tau(\omega)$. Отображение $\tau : \Omega \to Q$, построенное таким образом, называют *каноническим погружением* Ω в стоунов компакт Q, соответствующим лифтингу ρ.

2.5.8. Теорема. *Пусть ρ — лифтинг алгебры $B(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$, τ — соответствующее каноническое погружение Ω в стоунов компакт Q булевой алгебры $B(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$, а $\imath :\ B(\Omega) \to \mathrm{Clop}(Q)$ — стоуново представление B. Тогда имеют место следующие утверждения*:

(1) *$\rho(A) = \tau^{-1}(\imath(A))$ для каждого класса эквивалентности $A \in B(\Omega)$;*

(2) *$\imath^{-1}(U) = \varphi(\tau^{-1}(A))$ для каждого открыто-замкнутого множества $U \in \mathrm{Clop}(Q)$;*

(3) *отображение $\tau : \Omega \to Q$ измеримо по Борелю и образ $\tau(\Omega)$ плотен в Q;*

(4) *прообраз $\tau^{-1}(N)$ тощего подмножества $N \subset Q$ измерим в Ω и имеет меру нуль.*

$\triangleleft$ Утверждения (1) и (2) вытекают непосредственно из определений. Для доказательства (3) и (4) рассмотрим произвольное открытое множество $V \subset Q$. Выберем семейство $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ открыто-замкнутых множеств так, чтобы $V = \bigcup_{\xi\in\Xi} U_\xi$. Тогда из (1) следует измеримость прообразов $\tau^{-1}(U_\xi)$ для всех $\xi \in \Xi$, а из 2.5.7 (2) вытекает измеримость множества $\tau^{-1}(V) = \bigcup_{\xi\in\Xi} \tau^{-1}(U_\xi)$. Соотношение $\bigvee_{\xi\in\Xi} U_\xi = \mathrm{cl}(V)$ в булевой алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$ вместе с (2) и 2.5.7 (2), дает равенство $\varphi(\tau^{-1}(V)) = \varphi(\tau^{-1}(\mathrm{cl}(V))$. $\triangleright$

2.5.9. Функцию $\mu : B \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называют *аддитивной*, *счетно аддитивной* или *вполне аддитивной*, если

$$\mu\Bigg(\bigvee_{\xi\in\Xi} x_\xi\Bigg) = \sum_{\xi\in\Xi} \mu(x_\xi),$$

соответственно, для конечных, счетных или произвольных антицепей (x_ξ) в B. Для исключения тривиальной аддитивной функции $\mu \equiv +\infty$ всегда считают, что $\mu(\mathbb{0}_B) = 0$. Аддитивную функцию на булевой алгебре часто называют *мерой*.

Функцию μ именуют *положительной*, *строго* (*существенно*) *положительной* или *конечной*, если соответственно $\mu(b) \geqslant 0$, $\mu(b) > 0$ или $\mu(b) < +\infty$ для всех $0 \neq b \in B$. Наконец, положительную функцию μ называют *локально конечной*, если для любого $b \in B$, $0 < \mu(b)$, существует элемент $0 < b' \leqslant b$ такой, что $0 < \mu(b') < +\infty$. Положительную счетно аддитивную локально конечную меру на булевой алгебре $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)$ именуют *нормальной*, если она обращается в нуль на идеале тощих множеств. Экстремальный компакт называют *гиперстоуновым*, если на алгебре $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)$ имеется нормальная мера, строго положительная на $\mathrm{Clop}(Q)$.

Пусть $\mathscr{M}_+(B)$ обозначает множество всех конечных вполне аддитивных положительных мер на B. Полную булеву алгебру B называют *мультинормированной*, если множество всех конечных вполне аддитивных положительных мер разделяет точки B; символически: $(\forall\, b \neq 0)\,(\exists\, \mu \in \mathscr{M}_+(B))\,\mu(b) > 0$. Пару (B, μ) называют *нормированной булевой алгеброй*, если μ — конечная строго положительная вполне аддитивная мера на B. Нормированная булева алгебра (B, μ) может быть наделена метрикой $\rho(x, y) := \mu(x \bigtriangleup y)$, и несложно проверить, что возникающее метрическое пространство (B, ρ) полно.

2.5.10. Теорема. *Для полной булевой алгебры B следующие условия эквивалентны*:

(1) *B — мультинормированная булева алгебра*;

(2) *B изоморфна декартову произведению семейства нормированных булевых алгебр*;

(3) *существует строго положительная локально конечная вполне аддитивная мера на B*;

(4) *B изоморфна ассоциированной алгебре $B(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ для некоторого пространства с мерой $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$, обладающего свойством прямой суммы*;

(5) *стоунов компакт $\mathrm{St}(B)$ является гиперстоуновым.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): В соответствии с принципом исчерпывания (см. 2.1.9) мы можем выбрать разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в B и семейство положительных вполне аддитивных мер $(\mu_\xi)_{\xi \in \Xi}$ таких, что $\mu_\xi(b) > 0$ для всех $0 < b \leqslant b_\xi$ и $\xi \in \Xi$. Если B_ξ — главный идеал, порожденный элементом b_ξ, а ограничение μ_ξ на B_ξ обозначают тем же символом μ_ξ, то (B_ξ, μ_ξ) — нормированная булева алгебра, причем B изоморфна декартову произведению семейства $\big((B_\xi, \mu_\xi)\big)_{\xi \in \Xi}$.

(2) $\to$ (3): Мера на B с указанными свойствами может быть определена как

$$\mu(b) := \sum_{\xi \in \Xi} \mu_\xi(b \wedge b_\xi) \quad (b \in B).$$

(3) $\to$ (4): Отметим сначала, что если $\Omega := \mathrm{St}(B)$, то $\mathrm{Clop}_\sigma(\Omega)$ состоит из множеств $U \triangle N$, где $U \in \mathrm{Clop}(\Omega)$, а $N \subset \Omega$ — тощее множество. Пусть ν — строго положительная локально конечная вполне аддитивная мера на $\mathrm{Clop}(\Omega)$. Если $\mathscr{B} := \mathrm{Clop}_\sigma(\Omega)$ и мера μ на $\mathscr{B}$ определена по условию $\mu(U \triangle N) := \nu(U)$, то $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ — пространство с мерой, обладающее свойством прямой суммы, причем булевы алгебры $B(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ и $\mathrm{Clop}(\Omega)$ изоморфны; подробности см. в монографии Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [72].

(4) $\to$ (5): В соответствии с 2.5.8 нормальную меру $\overline{\mu}$ на $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)$, строго положительную на $\mathrm{Clop}(Q)$, можно получить, полагая $\overline{\mu}(A) := \mu(\tau^{-1}(A))$ $(A \in \mathrm{Clop}_\sigma(Q))$.

(5) $\to$ (1): Предположим, что компакт $Q := \mathrm{St}(B)$ гиперстоунов, и пусть нормальная мера μ на $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)$ строго положительна на $\mathrm{Clop}(Q)$. Возьмем произвольный элемент $b \in B$. Так как μ локально конечна, то существует открыто-замкнутое множество V такое, что $\mu(V) > 0$ и $V \subset \imath(b)$, где $\imath : B \to \mathrm{Clop}(Q)$ — стоуново представление B. Положив $\mu_b(x) := \mu(V \cap \imath(x))$ $(x \in B)$, мы получаем конечную положительную вполне аддитивную меру μ_b на B такую, что $\mu_b(b) = \mu(V) > 0$. $\rhd$

2.6. Гейтинговы алгебры

В этом заключительном параграфе мы дадим беглый обзор основных понятий и результатов, относящихся к гейтинговым алгебрам.

2.6.1. Рассмотрим произвольную решетку L. *Псевдодополнением* элемента $x \in L$ относительно $y \in L$ называют наибольший элемент множества $\{z \in L : x \wedge z \leqslant y\}$. Псевдодополнение x относительно y, если оно существует, обозначают символом $x \Rightarrow y$. Имеет место следующее очевидное свойство, которое можно рассматривать как другое определение относительного псевдодополнения.

(1) *Для произвольного элемента $z \in L$ выполнена эквивалентность*

$$z \leqslant x \Rightarrow y \leftrightarrow x \wedge z \leqslant y.$$

Существование относительного псевдодополнения важно в вопросах строения решетки и влечет, в частности, свойство дистрибутивности.

(2) *Если существует $x \Rightarrow ((x \wedge y) \vee (x \wedge z))$ для некоторых $x, y, z \in L$, то имеет место равенство*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

$\lhd$ Положим $u := (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Поскольку $x \wedge y \leqslant u$ и $x \wedge z \leqslant u$, то в силу (1) будет $y \leqslant x \Rightarrow u$ и $z \leqslant x \Rightarrow u$. Отсюда $y \vee z \leqslant x \Rightarrow u$. Поэтому, вновь привлекая (1), получаем $x \wedge (y \vee z) \leqslant u$.

В то же время из определения точной нижней границы видно, что $x \wedge y \leqslant x \wedge (y \vee z)$ и $x \wedge z \leqslant x \wedge (y \vee z)$. Следовательно, $u \leqslant x \wedge (y \vee z)$. $\rhd$

Решетку $\mathbb{H}$ с нулем $\mathbb{0}$ и единицей $\mathbb{1}$ называют *гейтинговой алгеброй,* если для любых двух элементов $x, y \in \mathbb{H}$ существует относительное псевдодополнение $x \Rightarrow y$. Гейтингову алгебру называют также *псевдобулевой алгеброй* или *брауэровой алгеброй.*

(3) *Любая гейтингова алгебра является дистрибутивной решеткой.*

$\lhd$ Очевидное следствие из (2). $\rhd$

2.6.2. Итак, в гейтинговой алгебре определена двуместная операция $\Rightarrow$. Некоторые свойства этой операции собраны в следующем утверждении.

Для любых элементов x, y и z гейтинговой алгебры выполнены следующие соотношения:

(1) $x \Rightarrow y = \mathbb{1} \leftrightarrow x \leqslant y$;

(2) $x \Rightarrow \mathbb{1} = \mathbb{1},\ \mathbb{1} \Rightarrow y = y$;

(3) $(x \Rightarrow y) \wedge y = y$;

(4) $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$;

(5) $x_1 \leqslant x_2 \rightarrow x_2 \Rightarrow y \leqslant x_1 \Rightarrow y$;

(6) $y_1 \leqslant y_2 \rightarrow x \Rightarrow y_1 \leqslant x \Rightarrow y_2$;

(7) $(x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z) = x \Rightarrow (y \wedge z)$;

(8) $(x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z) = (x \vee y) \Rightarrow z$;

(9) $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \leqslant (x \Rightarrow z)$;

(10) $(x \Rightarrow y) \leqslant ((x \wedge z) \Rightarrow (y \wedge z))$;

(11) $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) = (x \wedge y) \Rightarrow z = y \Rightarrow (x \Rightarrow z)$;

(12) $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \leqslant (x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$.

$\lhd$ Утверждения (1) и (2) следуют непосредственно из определений.

(3): Если в 2.6.1 (1) положить $z := y$, то получим $y \leqslant x \Rightarrow y$, что равносильно соотношению $(x \Rightarrow y) \wedge y = y$.

(4): Как отмечено в (3), $y \leqslant x \Rightarrow y$. Поэтому $x \wedge y \leqslant x \wedge (x \Rightarrow y)$. Но в то же время согласно (3) будет $x \Rightarrow y \leqslant y$. Стало быть, $x \wedge (x \Rightarrow y) \leqslant x \wedge y$.

(5): Пусть $x_1 \leqslant x_2$. Используя (4), можно написать неравенства

$$x_1 \wedge (x_2 \Rightarrow y) \leqslant x_2 \wedge (x_2 \Rightarrow y) = x_2 \wedge y \leqslant y.$$

Отсюда в соответствии с 2.6.1 (1) получаем $x_2 \Rightarrow y \leqslant x_1 \Rightarrow y$.

(6): Пусть $y_1 \leqslant y_2$. Вновь привлекая (4), выводим:

$$x \wedge (x \Rightarrow y_1) = x \wedge y_1 \leqslant x \wedge y_2 \leqslant y_2.$$

Согласно 2.6.1 (1) последнее означает $x \Rightarrow y_1 \leqslant x \Rightarrow y_2$.

(7): Положим $u := (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$. Поскольку $u \leqslant x \Rightarrow y$ и $u \leqslant x \Rightarrow z$, то в соответствии с 2.6.1 (1) будет $x \wedge u \leqslant y$ и $x \wedge u \leqslant z$. Значит, $x \wedge u \leqslant y \wedge z$. Стало быть, в силу 1.6.1 (1) $u \leqslant x \Rightarrow (y \wedge z)$. Наоборот, согласно (6) имеем $x \Rightarrow (y \wedge z) \leqslant x \Rightarrow y$ и $x \Rightarrow (y \wedge z) \leqslant x \Rightarrow z$. Следовательно, $x \Rightarrow (y \wedge z) \leqslant u$.

(8): Положим $u := (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)$. В силу (5) имеем $(x \vee y) \Rightarrow z \leqslant x \Rightarrow z$ и $(x \vee y) \Rightarrow z \leqslant y \Rightarrow z$. Следовательно, $(x \vee y) \Rightarrow z \leqslant u$. В то же время, привлекая дистрибутивность гейтинговой решетки (см. 2.6.1 (3)) и формулу (4), выводим:

$$(x \vee y) \wedge u = (x \wedge u) \vee (y \wedge u) = (x \wedge z \wedge (y \Rightarrow z)) \vee ((x \Rightarrow z) \wedge y \wedge z) \leqslant z.$$

Ссылка на 2.6.1 (1) дает $u \leqslant (x \vee y) \Rightarrow z$.

(9): Согласно 2.6.1 (1) требуемое равносильно неравенству $x \wedge ((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)) \leqslant z$, которое легко выводится на основе ассоциативности точных нижних границ и (4):

$$\begin{aligned} x \wedge ((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)) &= (x \wedge (x \Rightarrow y)) \wedge (y \Rightarrow z) = \\ &= x \wedge y \wedge (y \Rightarrow z) = x \wedge y \wedge z \leqslant z. \end{aligned}$$

(10): Следует из (8) в силу 2.6.1 (1).

(11): Для произвольного элемента u в силу 2.6.1 (1) имеет место цепочка эквивалентностей:

$$u \leqslant x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \leftrightarrow x \wedge u \leqslant y \Rightarrow z \leftrightarrow (x \wedge y) \wedge u \leqslant z \leftrightarrow u \leqslant (x \wedge y) \Rightarrow z.$$

Требуемое вытекает из эквивалентности первого и последнего неравенств.

(12): Вновь пользуясь (4), выводим:

$$\begin{aligned} x \wedge (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) &= y \wedge (x \wedge (x \Rightarrow (y \Rightarrow z))) = \\ &= x \wedge y \wedge (y \Rightarrow z) = x \wedge y \wedge z \leqslant z. \end{aligned}$$

Применив теперь дважды 2.6.1 (1), получим сначала $(x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \leqslant x \Rightarrow z$, а затем $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \leqslant (x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$. $\rhd$

2.6.3. *Псевдодополнением* элемента $x \in L$ решетки с нулем L называют наибольший элемент множества $\{y \in L : x \wedge y = \mathbb{0}\}$. Как видно, в гейтинговой алгебре $\mathbb{H}$ каждый элемент $x \in \mathbb{H}$ обладает псевдодополнением $x^* := x \Rightarrow \mathbb{0}$. Таким образом, свойства псевдодополнения вытекают из соответствующих свойств относительного псевдодополнения.

Для любых элементов x, y, z гейтинговой алгебры имеют место утверждения:

(1) $x \leqslant y \ \to \ y^* \leqslant x^*$;

(2) $x^* = \mathbb{1} \ \leftrightarrow \ x = \mathbb{0}$;

(3) $x^* = \mathbb{0} \ \leftrightarrow \ x = \mathbb{1}$;

(4) $x \wedge x^* = \mathbb{0}$;

(5) $x \leqslant x^{**}$;

(6) $x^* = x^{***}$;

(7) $(x \vee y)^* = x^* \wedge y^*$;

(8) $(x \wedge y)^* \geqslant x^* \vee y^*$;

(9) $(x \vee x^*)^{**} = \mathbb{1}$;

(10) $x \Rightarrow y^* = y \Rightarrow x^* = (x \wedge y)^*$;

(11) $x \Rightarrow y \leqslant y^* \Rightarrow x^*$;

(12) $(x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow y^*) = x^*$.

$\lhd$ Утверждения (1)–(4) следуют непосредственно из определений.

(5): В силу (4) будет $x \wedge x^* \leqslant \mathbb{0}$. Следовательно, $x \leqslant x^* \Rightarrow \mathbb{0} = (x^*)^*$ по определению псевдодополнения.

(6): Если в (5) взять x^* вместо x, то получим $x^* \leqslant x^{***}$. Вместе с тем из (1) и (5) видно, что $x^{***} \leqslant x^*$.

(7): Вытекает из 2.6.2 (8) в силу определения псевдодополнения.

(8): В силу дистрибутивности 2.6.1 (3), ассоциативности 2.1.2 (2) и формулы (4)

$$(x^* \vee y^*) \wedge (x \vee y) = (x^* \wedge (x \wedge y)) \vee (y^* \wedge (x \wedge y)) \leqslant (x^* \wedge x) \vee (y^* \wedge y) = \mathbb{0}.$$

Отсюда, учитывая 2.6.1 (1), получаем $x^* \vee y^* \leqslant (x \wedge y) \Rightarrow \mathbb{0} = (x \wedge y)^*$.

(9): Последовательное применение (7), (5), (4) и (2) дает

$$(x \vee x^*)^{**} = (x^* \wedge x^{**})^* \geqslant (x^* \wedge x)^* = \mathbb{0}^* = \mathbb{1}.$$

(10): Следует из 2.6.1(11) при $z = \mathbb{0}$.

(11): Привлекая последовательно (5), 2.6.2 (6) и (10), можно написать: $x \Rightarrow y \leqslant y^{**} = y^* \Rightarrow x^*$.

(12): Вытекает из 2.6.2 (7) при $z := y^*$ с учетом (4). $\rhd$

2.6.4. Элемент $x \in \mathbb{H}$ называют *регулярным*, если $x^{**} = x$. Множество всех регулярных элементов гейтинговой решетки $\mathbb{H}$ с индуцированным из $\mathbb{H}$ порядком мы обозначим символом $\mathfrak{R}(\mathbb{H})$.

(1) *Элемент $x \in \mathbb{H}$ регулярен тогда и только тогда, когда $x = y^*$ для некоторого $y \in \mathbb{H}$.*

$\lhd$ Если элемент x регулярен, то следует положить $y := x^*$. Если же $x = y^*$ для некоторого $y \in \mathbb{H}$, то, привлекая 2.6.3 (6), выводим: $x^{**} = y^{***} = y^* = x$. $\rhd$

(2) *Для произвольной гейтинговой алгебры* $\mathbb{H}$ *упорядоченное множество* $\mathfrak{R}(\mathbb{H})$ *является булевой алгеброй.*

$\triangleleft$ Покажем, что $\mathfrak{R}(\mathbb{H})$ — решетка. Возьмем элементы $x, y \in \mathfrak{R}(\mathbb{H})$ и в соответствии с (1) представим их в виде $x = u^*$ и $y = v^*$. Привлекая 2.6.3 (7), выводим $x \wedge y = u^* \wedge v^* = (u \vee v)^*$ и согласно (1) $x \wedge y$ — регулярный элемент. Значит, точные нижние границы регулярных элементов в $\mathbb{H}$ и в $\mathfrak{R}(\mathbb{H})$ совпадают.

Покажем, что $z := (x \vee y)^{**}$ — точная верхняя граница элементов x и y в $\mathfrak{R}(\mathbb{H})$. Регулярность z вытекает из (1). Из 2.6.3 (5) видно, что $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$. Если $u := v^*$ — регулярный элемент и $x \leqslant u$ и $y \leqslant u$, то в силу 2.6.3 (1) будет $x^* \geqslant v$ и $y^* \geqslant v$. Следовательно, привлекая 2.6.3 (1, 7), получим $z = (x^* \wedge y^*)^* \leqslant v^* = u$. Таким образом, точная верхняя граница элементов $x, y \in \mathfrak{R}(\mathbb{H})$ существует и равна $(x \vee y)^{**}$, следовательно, отлична от точной верхней границы в $\mathbb{H}$.

Решетка $\mathfrak{R}(\mathbb{H})$ является гейтинговой алгеброй. Действительно, $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$ служат нулевым и единичным элементами в $\mathfrak{R}(\mathbb{H})$. Кроме того, для регулярного элемента $y = v^*$ в силу 2.6.3 (10) будет $x \Rightarrow y = (x \wedge v)^*$, т. е. $x \Rightarrow y$ — регулярный элемент. Более того, для $x, y \in \mathfrak{R}(\mathbb{H})$ элемент $x \Rightarrow y$ будет псевдодополнением x относительно y в $\mathfrak{R}(\mathbb{H})$. В частности, $\mathfrak{R}(\mathbb{H})$ — дистрибутивная решетка.

Осталось убедиться, что для $x \in \mathfrak{R}(\mathbb{H})$ псевдодополнение x^* является дополнением. Последнее выводится последовательным применением формул 2.6.3 (7), $x^{**} = x$, 2.6.3 (4) и 2.6.3 (2): $(x \vee x^*)^{**} = (x^* \wedge x)^* = \mathbb{0}^* = \mathbb{1}$. $\triangleright$

2.6.5. Рассмотрим коротко некоторые способы формирования гейтинговых алгебр. Подробности можно найти в книге Е. Расёвой и Р. Сикорского [155].

(1) Если подрешетка $\mathbb{H}'$ гейтинговой алгебры $\mathbb{H}$ содержит элементы $x \Rightarrow y$ и x^* для произвольных $x, y \in H'$, то $\mathbb{H}'$ будет самостоятельной гейтинговой алгеброй, которую называют *подалгеброй* алгебры $\mathbb{H}$.

(2) *Гомоморфизмом* гейтинговых алгебр называют решеточный гомоморфизм $h : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$, сохраняющий относительное псевдодополнение и псевдодополнение, т. е. h удовлетворяет условиям (см. 2.2.1):

$$h(x \vee y) = h(x) \vee h(y), \quad h(x \wedge y)) = h(x) \wedge h(y),$$
$$h(x \Rightarrow y) = h(x) \Rightarrow h(y), \quad h(x^*) = h(x)^* \quad (x, y \in \mathbb{H}_1).$$

Как обычно, взаимно однозначный гомоморфизм называют *изоморфизмом.* Если $h : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$ — гомоморфизм гейтинговых решеток, то $h(\mathbb{H}_1)$ будет подалгеброй алгебры $\mathbb{H}_2$. Если h — биекция гейтинговой алгебры $\mathbb{H}$ на произвольное множество C, то структуру гейтинговой решетки можно перенести с $\mathbb{H}$ на C так, что при этом h становится изоморфизмом гейтинговых алгебр.

(3) Возьмем семейство гейтинговых алгебр $(\mathbb{H}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$. Так же, как и в случае булевых алгебр (см. 2.2.5) декартово произведение $\mathbb{H} := \prod_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathbb{H}_\alpha$ можно снабдить покоординатным отношением порядка:

$$x \leqslant y \leftrightarrow (\forall\, \alpha \in \mathrm{A}) x(\alpha) \leqslant y(\alpha).$$

Тогда $\mathbb{H}$ — гейтингова алгебра. Операции в $\mathbb{H}$ совпадают с соответствующими покоординатными операциями в алгебрах $\mathbb{H}_\alpha$. В частности, для $x, y \in \mathbb{H}$ и всех $\alpha \in \mathrm{A}$ будет $(x \Rightarrow y)(\alpha) = x(\alpha) \Rightarrow y(\alpha)$ и $x^*(\alpha) = x(\alpha)^*$. Гейтингову алгебру $\mathbb{H}$ называют *декартовым произведением* семейства гейтинговых алгебр $(\mathbb{H}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$.

(4) Фильтр в гейтинговой алгебре определяют так же, как и в булевой алгебре (см. 2.4.2 (2)). Если ∇ — фильтр в гейтинговой алгебре $\mathbb{H}$, то можно ввести в $\mathbb{H}$ отношение предпорядка $\preccurlyeq\, := \,\preccurlyeq_\nabla$ и отношение эквивалентности $\sim\, := \,\sim_\nabla$ формулами:

$$x \preccurlyeq y \leftrightarrow x \Rightarrow y \in \nabla, \quad x \sim y \leftrightarrow x \Leftrightarrow y \in \nabla,$$

где по определению $x \Leftrightarrow y := (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$. Рассмотрим фактор-множество $\mathbb{H}/\nabla := \mathbb{H}/\sim$ и фактор-отображение $x \mapsto [x]$, где $[x]$ — класс эквивалентности элемента $x \in \mathbb{H}$. Отношение $\preccurlyeq$ порождает порядок $\leqslant$ в $\mathbb{H}/\nabla$ по правилу: $[x] \leqslant [y] \leftrightarrow x \preccurlyeq y$. Нетрудно показать, что $\mathbb{H}/\nabla$ — гейтингова алгебра, а фактор-отображение $x \mapsto [x]$ является гомоморфизмом гейтинговых алгебр.

(5) Гейтингову алгебру называют *полной*, если она является полной решеткой. Для любой гейтинговой алгебры $\mathbb{H}$ существуют полная гейтингова алгебра $\widehat{\mathbb{H}}$ и изоморфизм $\mathbb{H} \to \widehat{\mathbb{H}}$, сохраняющий точные границы любых множеств.

(6) Пусть $\mathbb{H}$ — гейтингова алгебра и $\mathbb{0} \neq e \in \mathbb{H}$. Положим $\mathbb{H}_e := \{x \in \mathbb{H} : x \leqslant e\}$ и $h(x) := x \wedge e$. Тогда $\mathbb{H}_e$ — гейтингова алгебра и h — гомоморфизм гейтинговых алгебр, сохраняющий точные границы любых множеств.

2.6.6. Рассмотрим примеры гейтинговых алгебр.

(1) *Топологии.* Если (Q, τ) — топологическое пространство, то совокупность всех открытых множеств $\tau \subset \mathscr{P}(Q)$, упорядоченная по включению, представляет собой гейтингову алгебру. Точные границы в решетке τ те же, что и в алгебре множеств $\mathscr{P}(Q)$. Если U и V — открытые множества, то относительное псевдодополнение $U \Rightarrow V$ совпадает с внутренностью множества $V \cup (X \setminus U)$. Регулярные элементы — регулярные открытые множества: $\mathfrak{R}(\tau) = \mathrm{RO}\,(Q)$.

(2) *Ростки.* Вновь рассмотрим топологическое пространство (Q, τ). Взяв $q \in Q$, определим в τ отношение эквивалентности $\sim_q$, полагая $U \sim_q V$ в том и только в том случае, если существует такая окрестность $W \in \tau$ точки q, что $W \cap U = W \cap V$. Фактор-множество $\tau/\sim$ — фактор-алгебра, построенная в 2.6.5 (4), где в качестве ∇ взят фильтр $\tau(q)$ всех открытых окрестностей точки q. Таким образом, $\tau/\sim$ — гейтингова алгебра.

(3) *Алгебры Линденбаума — Тарского.* На множестве всех формул Φ интуиционистского исчисления высказываний IL (см. 1.1.4) введем отношение $\preccurlyeq\, := \,\preccurlyeq_{\mathrm{IL}}$, полагая $\varphi \preccurlyeq \psi$ в том и только в том случае, если $\vdash_{\mathrm{IL}} \varphi \to \psi$. Это отношение есть предпорядок, так как транзитивность вытекает из 1.1.3 (3), а рефлексивность является следствием выводимости формулы $\varphi \to \varphi$ из аксиом 1.1.3 (1–11). Скажем теперь, что формулы φ и ψ эквивалентны, и напишем $\varphi \sim \psi$, если $\varphi \preccurlyeq \psi$ и $\psi \preccurlyeq \varphi$. Отношение $\sim$ является эквивалентностью и мы можем образовать фактор-множество $\Phi/\sim$ с фактор-отображением $\varphi \mapsto [\varphi]$. Предпорядок $\preccurlyeq$ индуцирует отношение порядка $\leqslant$ в $\Phi/\sim$ по правилу: $[\varphi] \leqslant [\psi]$ в том и только в том случае, если $\varphi \preccurlyeq \psi$. Используя аксиомы 1.1.3 (1–11) и правило отделения modus ponens, можно установить, что упорядоченное множество является гейтинговой алгеброй. При этом отношение $\sim$ является конгруэнцией по отношению к операциям $\vee$, $\wedge$ и $\to$, т. е. имеют место соотношения:

$$[\varphi \vee \psi] = [\varphi] \vee [\psi],$$

$$[\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \wedge [\psi],$$

$$[\varphi \to \psi] = [\varphi] \Rightarrow [\psi].$$

(Подробности см. в книге Е. Расёвой и Р. Сикорского [155].) Как и в булевом случае (см. 2.3.9) $\mathfrak{A}(\Phi) := \Phi/\!\sim$ называют *алгеброй Линденбаума — Тарского* для IL.

(4) *Топологической булевой алгеброй* называют булеву алгебру $\mathbb{B}$ с операцией внутренности $\mathbb{I} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, удовлетворяющей условиям:

$$\mathbb{I}(x \wedge y) = \mathbb{I}(x) \wedge \mathbb{I}(y) \ (x, y \in \mathbb{B}), \quad \mathbb{I}(x) \leqslant x \ (x \in \mathbb{B}),$$
$$\mathbb{I}(\mathbb{I}(x)) = \mathbb{I}(x) \ (x \in \mathbb{B}), \quad \mathbb{I}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}.$$

Неподвижные точки отображения $\mathbb{I}$ называют *открытыми элементами* $\mathbb{B}$. Множество всех открытых элементов $\mathbb{B}$ обозначают символом $\tau(\mathbb{B}) := \tau(\mathbb{B}, \mathbb{I})$, т. е. $\tau(\mathbb{B}) = \{x \in \mathbb{B} : \mathbb{I}(x) = x\}$.

Множество $\tau(\mathbb{B})$ с индуцированным из $\mathbb{B}$ порядком является гейтинговой решеткой. При этом $\tau(\mathbb{B})$ — подрешетка $\mathbb{B}$ и для произвольных $x, y \in \tau(\mathbb{B})$ справедливы соотношения $x \Rightarrow y = \mathbb{I}(x \Rrightarrow y)$ и $x^* = \mathbb{I}(x^\star)$, где $\star$ и $\Rrightarrow$ — операции дополнения и относительного дополнения в булевой алгебре $\mathbb{B}$.

$\triangleleft$ См. Е. Расёва и Р. Сикорский [155, теорема IV.1.4]. $\triangleright$

2.6.7. Теорема. *Для любой гейтинговой алгебры $\mathbb{H}$ существует топологическая булева алгебра $\mathbb{B}$ такая, что $\mathbb{H}$ изоморфна $\tau(\mathbb{B})$.*

$\triangleleft$ См. Е. Расёва и Р. Сикорский [155, теорема IV.3.1]. $\triangleright$

2.6.8. Пусть $\mathbb{H}$ — гейтингова алгебра. Отображение $v : \Phi_0 \to \mathbb{H}$ называют $\mathbb{H}$-*оценкой*. Так же, как и в случае булевых алгебр эту оценку можно продолжить на множество всех формул Φ, используя следующие правила:

$$v(\neg\varphi) := v(\varphi)^*,$$
$$v(\varphi \wedge \psi) := v(\varphi) \wedge v(\psi),$$
$$v(\varphi \vee \psi) := v(\varphi) \vee v(\psi),$$
$$v(\varphi \to \psi) := v(\varphi) \Rightarrow v(\psi).$$

Предложение φ называют $\mathbb{H}$-общезначимым, если $v(\varphi) = \mathbb{1}$ для каждой $\mathbb{H}$-оценки v. Если же последнее выполнено для каждой гейтинговой алгебры $\mathbb{H}$, то мы будем говорить о HA-общезначимости предложения φ и писать HA $\vDash \varphi$. Сформулируем результат, который принято называть *теоремой о полноте для интуиционистских исчислений высказываний.* Отметим, что аналогичный результат имеет место и для *интуиционистских исчислений предикатов.*

2.6.9. Теорема. *Предложение является* HA-*общезначимым в том и только в том случае, если оно выводимо в интуиционистском исчислении высказываний*:

$$\mathrm{HA} \vDash \varphi \leftrightarrow \vdash_{\mathrm{IL}} \varphi.$$

$\triangleleft$ Достаточность состоит в непосредственной проверке HA-общезначимости всех аксиом 1.1.3 (1–11), а также сохранения HA-общезначимости при применении правила modus ponens. Первое делается с помощью 2.6.2 и 2.6.3, а второе вытекает из того, что если $v(\varphi) = v(\varphi \to \psi) = \mathbb{1}$, то в силу 2.6.2 (1) $v(\varphi) \leqslant v(\psi)$ и поэтому $v(\psi) = \mathbb{1}$. Необходимость вытекает из 2.6.6 (3). $\triangleright$

2.7. Комментарии

2.7.1. (1) Теория булевых алгебр берет свое начало от классического сочинения Дж. Буля «Исследование законов мысли, на которых основаны математические теории логики и вероятностей» [198, 199], изданного в 1854 году. Свои цели и задачи автор сформулировал следующим образом: «В предлагаемом вниманию читателей трактате мы намереваемся исследовать фундаментальные законы тех операций, которые совершает разум в процессе рассуждений, дабы выразить их в символическом языке исчисления и на этой основе построить науку логики и ее метод». Следуя такой установке, Дж. Буль осуществил алгебраизацию логической системы, которая лежит в основе классических математических рассуждений. Тем самым он обессмертил свое имя, став создателем алгебраической структуры, именуемой булевой алгеброй или алгеброй Буля.

(2) Булевы алгебры имеют разнообразные связи с многими важнейшими направлениями математической науки. Общетеоретическое и прикладное значение булевых алгебр определяет та ключевая роль, которую они играют в математической логике, теории вероятностей и кибернетике. Живо и увлекательно о булевых алгебрах рассказано в книге И. М. Яглома [181] (см. также цитированную там литературу). Для первоначального знакомства с теорией множеств, булевыми алгебрами и математической логикой может послужить книга Р. Р. Столла [164]. Основательное изложение теории булевых алгебр имеется в монографиях Д. А. Владимирова [33] и Р. Сикорского [160].

(3) На первый взгляд, определение 2.1.3 может показаться несколько странным. В самом деле, сразу из него не видно, по каким причинам дистрибутивную решетку принято называть алгеброй, ведь слово «алгебра» относится к общепринятым (ср.: алгебра Ли, банахова алгебра, C^*-алгебра и т. п.). Возникшее недоумение легко развеивается, ибо в действительности булева алгебра служит алгеброй над двухэлементным полем. Принципиальная важность этого обстоятельства отчасти отражена в параграфе 2.4. Вместе с тем вполне естественно, что в разных контекстах на булевы алгебры удобно смотреть с разных точек зрения. Стоит подчеркнуть, что важные для функционального анализа конкретные булевы алгебры часто возникают как дистрибутивные решетки с дополнениями.

(4) Общая теория решеток изложена в книгах Г. Биркгофа [16] и Г. Гретцера [48]. С другой стороны, булевы алгебры и векторные решетки входят в класс упорядоченных алгебраических систем, теории которых посвящена книга Л. Фукса [168]. Относительно теории решеточно упорядоченных групп см. монографии А. Бигарда, К. Киймела и С. Вольфенштейна [195], В. М. Копытова [82].

2.7.2. (1) Проблема продолжения булева гомоморфизма с сохранением порядковой непрерывности (σ-непрерывности) освещена в книгах Д. А. Владимирова [33], А. Г. Кусраева [107], Р. Сикорского [160]. В [306, 307] К. Маттес получил результат о продолжении $\mathfrak{m}$-гомоморфизма со значениями в слабо $\mathfrak{m}$-дистрибутивной (= слабо $(\mathfrak{m},\mathfrak{m})$-дистрибутивной) булевой алгебре. Тот факт, что условие слабой $\mathfrak{m}$-дистрибутивности является также необходимым для продолжения $\mathfrak{m}$-гомоморфизмов (обращение результата Маттеса), установил М. Райт [404]. В случае σ-гомоморфизмов со значениями в булевой алгебре счетного типа эти результаты независимо получил Д. А. Владимиров [33]. Общую концепцию

$(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$-дистрибутивности ($\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$ — бесконечные кардиналы) для булевой алгебры и ее характеризацию в терминах стоунова компакта см. в книге Р. Сикорского [160]. Слабая σ-дистрибутивность соответствует случаю, в котором $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} = \omega$, где ω — мощность счетного множества.

(2) Рассмотрим отображение φ из полной булевой алгебры B в некоторое множество ординалов $W \subset \mathrm{On}$. Предположим, что φ монотонно, т. е. из $x \leqslant y$ вытекает $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$. Элемент $0 \neq u \in B$ и компоненту $B_u := [\mathbb{0}, u]$ называют *φ-однородными*, если $\varphi(x) = \varphi(u)$ для любого $0 \neq x \in B_u$. Булева алгебра допускает разложение в прямую сумму φ-однородных компонент (см. у Д. А. Владимирова [33]).

(3) Булево произведение $B := \bigotimes_{\alpha \in \mathrm{A}} B_\alpha$ из 2.2.7 обладает следующим важным свойством: Если C — произвольная булева алгебра и задано семейство булевых гомоморфизмов $h_\alpha : B_\alpha \to C$ $(\alpha \in \mathrm{A})$, то существует и притом единственный булев гомоморфизм $h : B \to C$ такой, что $h_\alpha = h \circ \iota_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{A})$.

(4) Булево произведение $B := \bigotimes_{\alpha \in \mathrm{A}} B_\alpha$ семейства булевых алгебр не будет, вообще говоря, полным, даже если полны все B_α. Пополнение $o(B)$ не является хорошим претендентом на роль булева произведения семейства полных булевых алгебр (B_α), так как для полной булевой алгебры C и для семейства полных гомоморфизмов $h_\alpha : B_\alpha \to C$ гомоморфизм h из (3), вообще говоря, не будет полным и не допускает продолжения до полного гомоморфизма на $o(B)$.

(5) Техника разложения на однородные компоненты (см. 2.6.9 и (2)) независимых подалгебр и булева произведения (см. 2.2.7) и пополнения (см. 2.2.8) имеет свои метрические аналоги, которые играют важную роль в вопросах классификации и представления пространств с мерой и ассоциированных нормированных булевых алгебр, см. книги Д. А. Владимирова [33] и А. А. Самородницкого [161].

2.7.3. **(1)** Примеры булевых алгебр, приведенные в 2.3.1–2.3.4, хорошо известны, см., например, монографию Р. Сикорского [160]. О борелевских множествах и множествах со свойством Бэра см. книги К. Куратовского [88] и З. Семадени [372].

(2) Общую теорию меры и интеграла см. в следующих монографиях: Н. Бурбаки [20, 21], Н. Данфорд и Дж. Шварц [54], К. Партасарати [153], Г. Е. Шилов и Б. Л. Гуревич [177], П. Халмош [170], Р. Эдвардс [179]. О пространствах с мерой, обладающих свойством прямой суммы, можно прочитать в монографиях Н. Динкуляну [210], А. Ионеску Тулча и К. Ионеску Тулча [252], Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [72], В. Л. Левина [134].

(3) Теория алгебр фон Неймана, возникшая в связи с математическими моделями квантовой механики, изложена в монографиях У. Браттели и Д. Робинсона [17], Р. Кэйдисона и Дж. Рингроуза [263], С. Сакаи [364], М. Такесаки [383]. Множество всех ортопроекторов, содержащихся в алгебре фон Неймана, представляет собой решетку с дополнительной операцией ортогонального дополнения. Такого типа решетки называют орторешетками. Приведем точное определение.

Орторешеткой называют решетку L с нулем, единицей и одноместной операцией (ортодополнения) $(\,\cdot\,)^\perp : L \to L$, удовлетворяющей условиям:

$$x \wedge x^\perp = \mathbb{0}, \quad x \vee x^\perp = \mathbb{1}; \quad x^{\perp\perp} := (x^\perp)^\perp = x;$$

$$(x \vee y)^\perp = x^\perp \wedge y^\perp, \quad (x \wedge y)^\perp = x^\perp \vee y^\perp.$$

Дистрибутивная орторешетка является булевой алгеброй. Элементы x и y орторешетки называют *ортогональными* и пишут $x \perp y$, если $x \leqslant y^{\perp}$ или, что равносильно, $y \leqslant x^{\perp}$. Орторешетку L именуют *ортомодулярной решеткой* или (*квантовой*) *логикой*, если для любых $x, y \in L$, $x \leqslant y$, существует такой элемент $z \in L$, что $x \perp z$ и $x \vee z = y$. Последнее равносильно тому, что из $x \leqslant y$ следует $y = x \vee (y \wedge x^{\perp})$. Пример квантовой логики доставляет решетка всех замкнутых подпространств гильбертова пространства с операцией ортогонального дополнения.

(4) Теорема о полноте исчисления высказываний (см. 2.3.10) тесно связана с теоремой Стоуна 2.4.5. Эта связь осуществляется через алгебру Линденбаума — Тарского, подробнее см. у Р. Сикорского [160].

Теорема о полноте имеет место и для исчисления предикатов. Напомним, что замкнутую формулу φ сигнатуры σ называют *тождественно истинной* или *логически общезначимой*, если она выполняется на любой алгебраической системе (т. е. $\mathbb{2}$-системе) сигнатуры σ. Это обстоятельство символически записывают в виде $\mathrm{CL} \vDash \varphi$.

Теорема Гёделя о полноте. *Для любой замкнутой формулы исчисления предикатов имеет место эквивалентность*

$$\vdash_{\mathrm{CL}} \varphi \leftrightarrow \mathrm{CL} \vDash \varphi.$$

Разные подходы к доказательству теоремы Гёделя о полноте см., например, в книгах Ю. Л. Ершова и Е. А. Палютина [60], Г. Кейслера и Ч. Чена [74], Э. Мендельсона [146], Е. Расёвой и Р. Сикорского [155], Дж. Шенфильда [175].

(5) Булевы алгебры имеют важное прикладное значение при проектировании и расчете сложных электрических сетей и электронных устройств. Следующий пример проясняет, как при этом может использоваться аппарат булевых алгебр, см. [79].

Рассмотрим множество всех электрических цепей, разорванных рядом контактных выключателей. Контакт может находиться в двух состояниях: замкнутом и разомкнутом. Для цепи также возможны два состояния: цепь пропускает ток или цепь ток не пропускает. Две цепи отождествляют, если входящие в них контакты можно поставить во взаимно однозначное соответствие так, что при одном и том же состоянии соответствующих контактов сами цепи пребывают в одинаковом состоянии. Сказанное легко формализуется на теоретико-множественном языке, однако мы ограничимся неформальным описанием.

Обозначим через $\mathbb{I}$ цепь, которая всегда пропускает ток (цепь с запаянными контактами), а через $\mathbb{O}$ — цепь, которая иногда ток не пропускает (разрыв цепи). Введем операции над цепями. Под суммой $C \vee D$ двух цепей C и D понимают цепь, полученную в результате параллельного соединения C и D; это означает, что $C \vee D$ пропускает ток в том и только в том случае, если пропускает ток хотя бы одна из цепей C и D. Произведением $C \wedge D$ цепей C и D называют цепь, полученную в результате их последовательного соединения; это означает, что $C \wedge D$ пропускает ток лишь тогда, когда пропускают ток обе цепи C и D. Наконец для цепи C символ C^* обозначает такую цепь, которая пропускает ток лишь в том случае, когда C не пропускает ток. (Технически это делается с помощью переключателя.) Абстрактные электрические цепи, снабженные введенными операциями и должным образом отождествленные, можно рассматривать как булеву алгебру (где $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ служат соответственно максимальным и минимальным элементами).

2.7.4. (1) В связи с 2.4.4 (2) стоит сформулировать один результат о продолжении булевых гомоморфизмов.

Теорема Сикорского о продолжении. *Допустим, что B_0 — произвольная подалгебра булевой алгебры B. Тогда любой гомоморфизм из алгебры B_0 в полную булеву алгебру B' допускает продолжение до гомоморфизма из B в B'.*

Доказательство можно найти в книге Р. Сикорского [160]. Теорема Сикорского является интерпретацией предложения 1.2.2 (5) в подходящей булевозначной модели (см. 9.4.5 и [52]).

(2) Теорема 2.4.5, установленная М. Стоуном в 1936 году, показывает, что булева алгебра полностью определена своим стоуновым пространством. Точнее говоря, каждое свойство булевой алгебры B, переведенное на топологический язык, становится свойством стоунова компакта $\mathrm{St}(B)$ булевой алгебры B. Такой способ изучения булевых алгебр называют *реализационным* или, более полно, *методом стоуновой реализации.*

(3) Теорема Сикорского 2.4.8 обеспечивает применимость метода стоуновых реализаций к изучению гомоморфизмов. Приведем формулировку одного факта, придерживаясь обозначений 2.4.8. Подробности см. у Р. Сикорского [160, § 22].

Теорема. *Гомоморфизм h будет порядково непрерывным в том и только в том случае, если прообраз любого тощего множества при отображении $\mathrm{St}(h)$ является тощим.*

2.7.5. (1) Понятие компактификации восходит к К. Каратеодори. Общее определение компактификации (компактного расширения) впервые ввел А. Н. Тихонов в 1929 году. Он же установил, что компактификацией обладают только лишь вполне регулярные (тихоновские) пространства. Стоун-чеховская компактификация $\beta(X)$ является наибольшей компактификацией пространства X в том смысле, что если $(Y, \jmath)$ — какая-нибудь компактификация X (т. е. $\jmath : X \to Y$ — гомоморфизм и $\jmath(X)$ плотно в Y), то существует непрерывное отображение $k : \beta(X) \to Y$ такое, что $k \circ \imath = \jmath$, см. работы Дж. Келли [75] и Р. Энгелькинга [180].

Экстремально несвязные пространства были введены М. Стоуном. Эти пространства обладают многими замечательными свойствами, см. работы А. В. Архангельского и В. И. Пономарева [10], Л. Гильмана и М. Джерисона [234], З. Семадени [372], Р. Энгелькинга [180]. В частности, экстремально несвязный компакт является стоун-чеховской компактификацией любого своего всюду плотного подмножества (см. [372]).

(2) Понятие абсолюта (см. 2.5.6) можно ввести для более широкого класса топологических пространств. Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называют *совершенным*, если оно непрерывно, сюръективно, замкнуто (= переводит замкнутые подмножества X в замкнутые подмножества Y) и, кроме того, прообразы одноточечных множеств компактны (см. работы А. В. Архангельского и В. И. Пономарева [10], Р. Энгелькинга [180]). *Абсолютом* топологического пространства X называют топологическое пространство $a(X)$ такое, что существует совершенное неприводимое отображение $a(X)$ на X

и любое топологическое пространство Y, допускающее совершенное неприводимое отображение на X, гомеоморфно $a(X)$. Можно показать, что произвольное регулярное топологическое пространство имеет единственный с точностью до гомеоморфизма абсолют, который вполне регулярен и экстремально несвязен. Абсолют $a(X)$ компактен тогда и только тогда, когда пространство X компактно. Доказательства этих фактов можно найти, например, в [10].

(3) Проблему существования лифтинга (см. 2.5.7) для меры Лебега на вещественной прямой поставил А. Хаар. Она была решена Дж. фон Нейманом в 1931 г. Позже Д. Магарам установила, что каждая σ-конечная мера допускает лифтинг [304]. Общий случай был разобран в работе А. Ионеску Тулча и К. Ионеску Тулча [252]. Результаты, изложенные в 2.5.7, а также другие аспекты теории лифтинга см. у Н. Динкуляну [210], А. Ионеску Тулча и К. Ионеску Тулча [252], В. Л. Левина [134].

2.7.6. (1) Наименьший элемент множества $\{z \in L : x \vee z \geqslant y\}$ называют *псевдоразностью* элементов $x, y \in L$ и обозначают символом $x - y$. Таким образом, для произвольного $z \in L$ равносильны соотношения $z \geqslant y - x$ и $x \vee z \geqslant y$. Элемент $y - x$ существует не всегда. Например, псевдоразность $x - x$ существует в том и только в том случае, если в решетке L имеется нулевой элемент $\mathbb{0}$, причем $x - x = \mathbb{1}$. Понятие псевдоразности двойственно к понятию относительного псевдодополнения. Поэтому теория решеток с нулем и единицей, в которых существуют псевдоразности, параллельна теории гейтинговых алгебр. Такие решетки изучали Дж. Мак-Кинси и А. Тарский, которые назвали их *брауэровыми алгебрами.*

(2) В топологической булевой алгебре (в смысле 2.6.6 (4)) $(\mathbb{B}, \mathbb{I})$ элемент $\mathbb{I}(x^*)^*$ называют замыканием x и обозначают символом $\mathbb{C}x$. Возникающая при этом операция $\mathbb{C} : B \to B$, называемая *замыканием*, удовлетворяет следующим условиям:

$$\mathbb{C}(x \vee y) = \mathbb{C}(x) \vee \mathbb{C}(y) \ (x, y \in \mathbb{B}); \quad \mathbb{C}(x) \geqslant x \ (x \in \mathbb{B});$$

$$\mathbb{C}(\mathbb{C}(x)) = \mathbb{C}(x) \ (x \in \mathbb{B}); \quad \mathbb{C}(\mathbb{0}) = \mathbb{0}.$$

Если $\mathbb{C}$ удовлетворяет указанным условиям, то операция $\mathbb{I} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, определяемая формулой $\mathbb{I}x := \mathbb{C}(x^*)^*$, будет операцией внутренности в смысле 2.6.6 (4). На этом основании топологические булевы алгебры называют также булевыми алгебрами с замыканием. Теорию топологических булевых алгебр см. в книгах П. Т. Джонстона [259], Г. Нёбелинга [341], Е. Расёвой и Р. Сикорского [155].

(3) Основная идея, заложенная в теореме Стоуна 2.4.5, работает и в случае произвольных дистрибутивных решеток. Для дистрибутивной решетки L роль стоунова пространства $\mathrm{St}(L)$ играет определенным образом топологизированное множество всех простых идеалов (или фильтров). Собственный идеал $J \subset L$ называют *простым,* если для любых $x, y \in L$, удовлетворяющих включению $x \wedge y \in J$, выполнено одно из соотношений $x \in J$ или $y \in J$. Аналогично, собственный фильтр $J \subset L$ называют *простым,* если для любых $x, y \in L$, удовлетворяющих включению $x \vee y \in J$, выполнено одно из соотношений $x \in J$ или $y \in J$. Пусть $Q := Q(L) := \mathscr{F}(L)$ обозначает множество всех простых фильтров решетки L, а $h(x)$ — множество таких $q \in \mathscr{F}(L)$, что $x \in q$. Положим $\mathbb{L} := \{h(x) : x \in L\}$. Если L — дистрибутивная решетка, то $\mathbb{L}$ — решетка множеств и h осуществляет решеточный изоморфизм между L и $\mathbb{L}$.

(4) В тех же обозначениях рассмотрим на множестве Q топологию $\tau := \tau(L)$, предбазой которой служит $\mathbb{L}$. Топологическое пространство $(Q(L), \tau(L))$ называют *стоуновым пространством*, а изоморфизм h — *стоуновым представлением* решетки L. Нетрудно показать, что стоуново пространство любой дистрибутивной решетки является T_0-пространством. Если решетка содержит единицу, то ее стоуново пространство компактно.

Стоуновы пространства дистрибутивных решеток можно использовать для построения новых решеток или для топологического описания теоретико-решеточных свойств (реализационный метод) (см. книги Г. Биркгофа [16], Г. Гретцера [48], Е. Расёвой и Р. Сикорского [155]).

(5) Весь материал параграфа 2.6 содержится в книге Е. Расёвой и Р. Сикорского [155], где можно найти все недостающие подробности. Имеется вариант теоремы о полноте и для интуиционистского исчисления предикатов. Замкнутую формулу φ называют *интуиционистской предикатной тавтологией* или *интуиционистски общезначимой*, если она справедлива в любой гейтинговой алгебре (см. [155]). Это обстоятельство символически записывают в виде $\mathrm{IL} \vDash \varphi$.

Теорема о полноте для интуиционистского исчисления предикатов. *Замкнутая формула является теоремой интуиционистского исчисления предикатов тогда и только тогда, когда она интуиционистски общезначима, т. е. имеет место эквивалентность*: $\vdash_{\mathrm{IL}} \varphi \leftrightarrow \mathrm{IL} \vDash \varphi$.

$\triangleleft$ Доказательство см. у Е. Расёвой и Р. Сикорского [155]; см. также книгу Р. Голдблатта [40]. $\triangleright$

(5) Булеву алгебру можно назвать математической моделью классической логической системы, разработанной Аристотелем и его последователями. Способы умозаключений (силлогизмы, исключенное третье, modus ponens, обобщение и т. п.), зафиксированные в этой системе, — суть абстракции, возникшие в результате идеализации тех операций, которые совершает разум в процессе рассуждений. Неизбежно огрубляя реальность, двузначная логика, строго говоря, дает лишь приблизительное, неполное описание законов мышления, что поясняет интерес к неклассическим логическим системам. Одна из таких систем выработана в рамках интуиционизма.

(6) Общая теория решеток — самостоятельное направление с богатой внутренней проблематикой, имеющее многочисленные и глубокие связи с другими разделами математики. Как и в случае интуиционистской логики, исследование некоторых типов неклассических логик приводит к различным классам алгебраических систем, являющихся дистрибутивными решетками. Наиболее известные разновидности — импликативная решетка или решетка с относительными псевдодополнениями, топологическая булева алгебра, алгебра Поста и т. п. (см., например, Г. Биркгоф [16], Г. Гретцер [48], Е. Расёва и Р. Сикорский [155]). Происхождение упомянутых выше логик и решеток связано с «исследованием законов мысли» в духе упомянутой программы Дж. Буля.

(7) Принципиально иной тип логик породил анализ законов микромира. Логика квантовой механики значительно отклоняется как от классической, так и от интуиционистской и модальной логик. Она приводит к ортурешеткам (см. 2.6.3 (4)), которые, вообще говоря, недистрибутивны.

Глава 3
Элементы теории категорий

Теория множеств царствует в современной математике. Шутовская роль «абстрактной чепухи» в математике отведена теории категорий. Из истории и литературы общеизвестно, сколь сложны и непредсказуемы отношения и взгляды правителя и шута. Нечто подобное наблюдается во взаимосвязях и взаимозависимостях теории множеств и теории категорий.

С логической точки зрения теория множеств и теория категорий суть теории первого порядка. Первая, как уже было отмечено, оперирует множествами и отношением принадлежности между ними. Вторая говорит об объектах и морфизмах (или стрелках). Большой разницы между атомарными формулами $a \in b$ и $a \to b$, конечно, нет. Однако содержательная разница между понятиями, формализованными этими атомарными формулами, колоссальна.

Наряду с теорией множеств, теория категорий является универсальным языком современной математики. В рамках данной книги категории и функторы мы используем, прежде всего, как удобные средства, позволяющие единообразно смотреть на различные математические конструкции и рассуждения, формулировать общие свойства рассматриваемых структур. Однако соображениями удобства появление языка теории категорий в нашей книги не исчерпываются.

В рамках теории категорий был реализован один из наиболее амбициозных математических проектов двадцатого века — была осуществлена социализация теоретико-множественной математики. Возникла теория топосов, предоставляющая широкий класс категорий, в рамках которого обычная теория множеств может восприниматься как рядовой индивидуум.

Ф. У. Ловер, воспринявший идею топоса, принадлежащую А. Гротендику, и доведший ее до современного состояния, рассматривает объекты топоса как своего рода переменные множества, подчеркивая, что классическая теория множеств изучает множества стационарные. Он пишет в [284]: «Всякое представление о постоянстве относительно, будучи выведенным, перцептуально или концептуально, в качестве предельного случая некоторой вариации и бесспорная ценность таких понятий ограничена этим их происхождением. Это относится, в частности, к понятию постоянного множества и объясняет почему столь многое из наивной теории множеств переносится в том или ином виде в теорию переменных множеств».

Интересно подчеркнуть, что дополнительным стимулом в поисках категорного обоснования математики в начале 1960-х годов стали булевозначные модели теории множеств, играющие основополагающую роль в этой книге.

В текущей главе мы ограничиваемся тем, что эскизно излагаем основные понятия теории категорий, вплоть до ключевого понятия топоса. Подробности общей теории категорий можно найти у И. Букура и А. Деляну [18], П. Дж. Коэна [85], С. Маклейна [142], М. Ш. Цаленко и Е. Г. Шульгейфера [171], Относительно теории топосов см. книги Р. Голдблатта [40] и П. Т. Джонстона [57].

3.1. Категории

В текущем параграфе мы дадим определение категории, опишем простейшие конструкции и приведем некоторые примеры категорий.

3.1.1. Категория $\mathscr{K}$ состоит из классов $\operatorname{Ob}\mathscr{K}$, $\operatorname{Mor}\mathscr{K}$ и Com, называемых соответственно *классом объектов*, *классом морфизмов* и *законом композиции категории* $\mathscr{K}$. При этом должны быть выполнены условия

(1) существуют отображения $\mathscr{D}$ и $\mathscr{R}$ из $\operatorname{Mor}\mathscr{K}$ в $\operatorname{Ob}\mathscr{K}$, для которых класс

$$H_{\mathscr{K}}(a,b):=\mathscr{K}(a,b):=\{f\in\operatorname{Mor}\mathscr{K}:\ \mathscr{D}(f)=a\wedge\mathscr{R}(f)=b\},$$

называемый *классом морфизмов из a в b,* является множеством для любых $a,b\in\operatorname{Ob}\mathscr{K}$;

(2) Com — ассоциативная частичная бинарная операция на $\operatorname{Mor}\mathscr{K}$, причем

$$\operatorname{dom}(\operatorname{Com})=\big\{(f,g)\in(\operatorname{Mor}\mathscr{K})\times(\operatorname{Mor}\mathscr{K}):\ \mathscr{D}(g)=\mathscr{R}(f)\big\};$$

(3) для каждого объекта $a\in\operatorname{Ob}\mathscr{K}$ существует такой морфизм 1_a, называемый *тождественным морфизмом объекта* a, что $\mathscr{D}(1_a)=a=\mathscr{R}(1_a)$, а кроме того, $\operatorname{Com}(1_a,f)=f$ при $\mathscr{R}(f)=a$ и $\operatorname{Com}(g,1_a)=g$ при $\mathscr{D}(g)=a$.

Ясно, что класс $\operatorname{Mor}\mathscr{K}$ есть объединение множеств $H_{\mathscr{K}}(a,b)$, где a и b пробегают $\operatorname{Ob}\mathscr{K}$, причем множества $H_{\mathscr{K}}(a,b)$ и $H_{\mathscr{K}}(c,d)$ не пересекаются при $(a,b)\neq(c,d)$. Для любых $f,g\in\operatorname{Mor}\mathscr{K}$ пишут обычно $g\circ f$ или gf вместо $\operatorname{Com}(f,g)$. Соотношение $f\in H_{\mathscr{K}}(a,b)$ часто записывают в виде $f:a\to b$ и выражают словами «f — морфизм из объекта a в объект b». Говорят также, что a — начало морфизма f, а b — его конец.

На практике классы объектов и морфизмов могут пересекаться (так зачастую и происходит). Однако, не теряя общности, можно считать эти классы дизъюнктными, добавляя в случае необходимости метку каждому объекту категории. Мы придерживаемся этого соглашения во всей книге.

3.1.2. Категорию $\mathscr{H}$ называют *подкатегорией категории* $\mathscr{K}$, если выполнены условия:

(1) $\operatorname{Ob}\mathscr{H}\subset\operatorname{Ob}\mathscr{K}$ и $H_{\mathscr{H}}(a,b)\subset H_{\mathscr{K}}(a,b)$ для любой пары объектов $a,b\in\operatorname{Ob}\mathscr{H}$;

(2) композиция категории $\mathscr{H}$ есть ограничение композиции категории $\mathscr{K}$ на класс $(\operatorname{Mor}\mathscr{H})\times(\operatorname{Mor}\mathscr{H})$.

Понятно, что при этом тождественный морфизм любого объекта $a\in\operatorname{Ob}\mathscr{H}$ совпадает с тождественным морфизмом этого же объекта в категории $\mathscr{K}$.

Подкатегорию $\mathscr{H}$ категории $\mathscr{K}$ называют *полной* в случае выполнения равенства $H_{\mathscr{K}}(a,b)=H_{\mathscr{H}}(a,b)$ для любых $a,b\in\operatorname{Ob}\mathscr{H}$.

3.1.3. *Произведение* $\mathscr{H} \times \mathscr{K}$ категорий $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$ определяют следующими соотношениями:

$$\operatorname{Ob}(\mathscr{H} \times \mathscr{K}) := (\operatorname{Ob}\mathscr{H}) \times (\operatorname{Ob}\mathscr{K});$$

$$H_{\mathscr{H}\times\mathscr{K}}((a,b),(a',b')) := H_{\mathscr{H}}(a,a') \times H_{\mathscr{K}}(b,b'),$$

$$(f',g') \circ (f,g) := (f'f, g'g),$$

где $a, a' \in \operatorname{Ob}\mathscr{H}$; $b, b' \in \operatorname{Ob}\mathscr{K}$; $f, f' \in \operatorname{Mor}\mathscr{H}$ и $g, g' \in \operatorname{Mor}\mathscr{K}$.

3.1.4. Введем понятие фактор-категории. Пусть $\mathscr{K}$ — произвольная категория. *Конгруэнтностью* на $\mathscr{K}$ называют функцию R, для которой выполнены следующие два условия:

(1) R определена на $\operatorname{Ob}\mathscr{K} \times \operatorname{Ob}\mathscr{K}$ и сопоставляет каждой паре объектов (a,b) отношение эквивалентности $R(a,b)$ на множестве морфизмов $\mathscr{K}(a,b)$;

(2) если морфизмы $f_1, f_2 \in \mathscr{K}(a,b)$ удовлетворяют соотношению $(f_1, f_2) \in R(a,b)$, то для любых морфизмов $g : a' \to a$ и $h : b \to b'$ будет $(h \circ f_1 \circ g, h \circ f_2 \circ g) \in R(a', b')$.

Если R — конгруэнтность на $\mathscr{K}$, то *фактор-категорию* $\mathscr{K}/R$ определяют соотношениями:

$$\operatorname{Ob}\mathscr{K}/R := \operatorname{Ob}\mathscr{K},$$

$$(\mathscr{K}/R)(a,b) := \mathscr{K}(a,b)/R(a,b),$$

$$\widetilde{g} \circ \widetilde{f} := \widetilde{g \circ f},$$

где $\widetilde{f}$ обозначает класс эквивалентности морфизма f. Корректность определения композиции в $\mathscr{K}/R$ следует из (2).

3.1.5. Категория $\mathscr{K}^*$, *двойственная* к произвольной категории $\mathscr{K}$, имеет те же объекты и морфизмы, что и $\mathscr{K}$, а закон композиции Com^* категории $\mathscr{K}^*$ введен соотношением $\operatorname{Com}^*(\alpha,\beta) := \operatorname{Com}(\beta,\alpha)$. Обозначим $\mathscr{K}$-объект a и $\mathscr{K}$-морфизм f, рассматриваемые как объект и морфизм $\mathscr{K}^*$, символами a^* и f^* соответственно. Тогда определение двойственной категории можно записать в виде:

$$\mathscr{K}^*(a^*, b^*) := \mathscr{K}(b,a), \quad g^* \circ f^* := (f \circ g)^*.$$

Очевидно, что $(\mathscr{K}^*)^* = \mathscr{K}$. В частности, всякая категория имеет вид $\mathscr{H}^*$.

3.1.6. Понятие двойственной категории позволяет сформулировать принцип двойственности для категорий. Для этой цели рассмотрим формальный язык первого порядка — *категорный язык* (1.1.2). Сигнатура этого языка не содержит функциональных символом, но содержит шесть предикатных символов: одноместные — ob и mor, двуместные — dom, cod и id, трехместный — com. Формулы описанного категорного языка определяют в соответствии с 1.1.3. Ниже аксиомы категории мы запишем в виде формул категорного языка. Но при этом для удобства восприятия полезно иметь в виду следующую интерпретацию указанных предикатов: $\operatorname{ob}(x)$ и $\operatorname{mor}(y)$ обозначают, что x — объект, а y — морфизм; $\operatorname{dom}(x,y)$, $\operatorname{cod}(x,y)$ и $\operatorname{id}(x,y)$ утверждают соответственно, что $x = \mathscr{D}(y)$, $x = \mathscr{R}(y)$ и $y = 1_x$; наконец, $\operatorname{com}(x,y,z)$ — композиция морфизмов, т. е. $x = y \circ z$. Мы будем также использовать следующие переменные: для объектов — $a, b, \ldots$ и для морфизмов — $f, g, h, \ldots$

Аксиомы категории:

(1) *существование начала и конца у каждого морфизма*:

$$(\forall\, f)\big(\,\mathrm{mor}(f) \to (\exists!\ a)(\exists!\ b)(\mathrm{ob}(a) \wedge \mathrm{ob}(b) \wedge \mathrm{dom}(a,f) \wedge \mathrm{cod}(b,f))\big);$$

(2) *класс морфизмов с фиксированными началом и концом — множество*:

$$(\forall\, a)(\forall\, b)(\mathrm{ob}(a) \wedge \mathrm{ob}(b) \to \{f:\ \mathrm{mor}(f) \wedge \mathrm{dom}(a,f) \wedge \mathrm{cod}(b,f)\} \in \mathbb{V});$$

(3) *область определения композиции*:

$$(\forall\, g)(\forall\, h)(\mathrm{mor}(g) \wedge \mathrm{mor}(h) \wedge (\exists\, a)\,\mathrm{ob}(a) \wedge \mathrm{dom}(a,g) \wedge \mathrm{cod}(a,h) \to$$
$$\to (\exists\, f)\,\mathrm{mor}(f) \wedge \mathrm{com}(f,g,h));$$

(4) *однозначность композиции*:

$$(\forall\, f_1)(\forall\, f_2)(\forall\, g)(\forall\, h)(\mathrm{com}(f_1,g,h) \wedge \mathrm{com}(f_2,g,h) \to f_1 = f_2)$$

(5) *ассоциативность композиции* $((f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h))$:

$$(\forall\, f)(\forall\, g)(\forall\, h)(\forall\, u)(\forall\, v)(\forall\, w)$$
$$\mathrm{com}(u,f,g) \wedge \mathrm{com}(v,u,h) \wedge \mathrm{com}(w,g,h) \to \mathrm{com}(v,f,w);$$

(6) *существование тождественного морфизма*:

$$(\forall\, a)(\mathrm{ob}(a) \to (\exists!\, 1_a)\,\mathrm{mor}(1_a) \wedge \mathrm{dom}(a,1_a) \wedge \mathrm{cod}(a,1_a) \wedge \mathrm{id}(a,1_a));$$

(7) *закон тождества для композиции*:

$$(\forall\, f)(\forall\, g)(\forall\, a)\big(\big(\,\mathrm{mor}(f) \wedge \mathrm{ob}(a) \wedge \mathrm{dom}(a,f) \to \mathrm{com}(f,f,1_a)\big)\wedge$$
$$\wedge\big(\,\mathrm{mor}(g) \wedge \mathrm{ob}(a) \wedge \mathrm{cod}(a,g) \to \mathrm{com}(g,1_a,g)\big)\big).$$

3.1.7. Возьмем формулу φ категорного языка. Обозначим символом φ^* формулу того же языка, которая получается из φ путем замены dom на cod, а cod на dom, $\mathrm{com}(f,g,h)$ на $\mathrm{com}(f,h,g)$. Образно говоря, все морфизмы и композиции, входящие в φ, повернуты в φ^* в противоположную сторону. Понятие, описываемое формулой φ^*, называют двойственным по отношению к соответствующему понятию, описываемому формулой φ.

Если φ истинно в категории $\mathscr{K}$, то φ^* истинно в двойственной категории $\mathscr{K}^*$. Однако совсем не обязательно, что φ^* будет справедлива в $\mathscr{K}$. Другое дело, если φ — теорема теории категорий. В этом случае φ истинна во всех категориях, а φ^* истинна во всех категориях вида $\mathscr{K}^*$. Но в силу 3.1.5 каждая категория $\mathscr{K}$ имеет вид $\mathscr{K} = \mathscr{H}^*$. Поэтому имеет место следующий *принцип двойственности*: если φ истинна в любой категории, то и φ^* истинна в любой категории.

3.1.8. Для произвольной категории $\mathscr{K}$ введем *категорию морфизмов* $m\mathscr{K}$ следующим образом. Объектами $m\mathscr{K}$ являются все морфизмы категории $\mathscr{K}$.

Морфизм из объекта $f : a \to b$ в объект $g : c \to d$ представляет собой пару $\mathscr{K}$-морфизмов (h, k) таких, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "k"] & d \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $g \circ h = k \circ f$. Композицию в категории $m\mathscr{K}$ введем правилом $(h, k) \circ (h', k') := (h \circ h', k \circ k')$. Тождественным морфизмом объекта $f : a \to b$ в категории $m\mathscr{K}$ служит пара тождественных морфизмов $(1_a, 1_b)$.

Если в определении категории морфизмов $m\mathscr{K}$ ограничиться морфизмами с фиксированным концом или началом, то получаемые категории называют *относительными*.

Точнее, для фиксированного объекта a категории $\mathscr{K}$ вводят категорию $\mathscr{K}^a$ *морфизмов*, прибывающих в a, и категорию $\mathscr{K}_a$ *морфизмов,* отправляющихся из a. Объектами категории $\mathscr{K}^a$ (категории $\mathscr{K}_a$) являются все морфизмы с концом в a (с началом a). Морфизмами в $\mathscr{K}^a$ (в $\mathscr{K}_a$) из объекта $f : b \to a$ в объект $g : c \to a$ (из объекта $f : a \to b$ в объект $g : a \to c$) служат $\mathscr{K}$-морфизмы $h : b \to c$, удовлетворяющие условию $g \circ h = f$ (соответственно, $h \circ f = g$).

3.1.9. В качестве примера рассмотрим *категорию множеств и отображений* Set. Объектами категории Set служат всевозможные множества, а морфизмами — произвольные отображения множеств. Композиция морфизмов — обычная композиция отображений. Для $f \in \operatorname{Mor}\mathrm{Set}$ множества $\mathscr{D}(f)$ и $\mathscr{R}(f)$ — соответственно область определения и область значений отображения f. Морфизм 1_a — тождественное отображение множества a.

Полезно рассмотреть и более широкую *категорию множеств* и *соответствий* Set_*. Классы объектов категорий Set и Set_* совпадают, морфизмами же в категории Set_* служат всевозможные соответствия. Для соответствия $\Phi := (F, X, Y)$ положим $\mathscr{D}(\Phi) := X$ и $\mathscr{R}(\Phi) := Y$. Композиция соответствий ассоциативна, причем $\Psi \circ \Phi$ существует в том и только в том случае, если $\mathscr{R}(\Phi) = \mathscr{D}(\Psi)$. Тождественный морфизм на множестве A — тождественное отображение множества A. Итак, Set_* — категория, а Set — ее подкатегория.

3.1.10. Разнообразные примеры категорий возникают как *подкатегории структурированных множеств*. Объектами такой категории являются множества, наделенные некоторой структурой σ (включающей алгебраические операции, отношения, норму, топологию и т. п.), а морфизмами — отображения, в определенном смысле сохраняющие структуру σ. Рассмотрим конкретные примеры.

(1) Первой идет категория Set, объекты которой можно считать структурированными множествами, наделенными пустой структурой.

(2) Категорию $\mathscr{K}$ называют *категорией предпорядка*, если для любых двух объектов a и b этой категории существует не более одного морфизма из a в b, т. е. множество $H_{\mathscr{K}}(a, b)$ либо пусто, либо содержит единственный элемент.

В множестве объектов $K := \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$ можно ввести отношение предпорядка $\leqslant$, полагая $a \leqslant b$ в том и только в том случае, если $H_{\mathscr{K}}(a, b) \neq \varnothing$. Рефлексивность отношения $\leqslant$ следует из существования тождественного морфизма $1_a : a \to a$ для каждого $a \in K$, а транзитивность — из существования композиции морфизмов $a \to b$ и $b \to c$.

Наоборот, если K — предупорядоченный класс с отношением предпорядка $\leqslant$, то можно построить категорию $\mathscr{K}$ предпорядка следующим образом: $\mathrm{Ob}\,\mathscr{K} := K$, $\mathrm{Mor}\,\mathscr{K} := \{(a, b) \in K \times K \,:\, a \leqslant b\}$, причем $\mathscr{D}((a, b)) = a$ и $\mathscr{R}((a, b)) = b$. Если $a \leqslant b \leqslant c$, то по определению положим $(b, c) \circ (a, b) := (a, c)$. Корректность этого определения следует из транзитивности предпорядка. Из рефлексивности предпорядка видно, что $1_a = (a, a)$.

(3) Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Символом $\mathrm{Vect}(\mathbb{F})$ обозначают категорию *векторных пространств*, классы объектов и морфизмов которой — суть векторные пространства над полем $\mathbb{F}$ и всевозможные $\mathbb{F}$-линейные операторы с обычной суперпозицией операторов в качестве композиции.

(4) Зафиксировав упорядоченное поле $\mathbb{F}$, вводят *категорию* $\mathrm{VLat}(\mathbb{F})$ *векторных решеток и решеточных гомоморфизмов*. Объектами $\mathrm{VLat}(\mathbb{F})$ служат векторные решетки над $\mathbb{F}$, а морфизмами — решеточные гомоморфизмы, т. е. $\mathbb{F}$-линейные отображения, сохраняющие точные границы непустых конечных множеств.

(5) Рассмотрим *категорию булевых алгебр* Bool. Объектами этой категории служат всевозможные булевы алгебры, а морфизмами — булевы гомоморфизмы.

(6) *У категории топологических пространств* Top класс объектов $\mathrm{Ob}\,\mathrm{Top}$ составляют все топологические пространства, а класс морфизмов $\mathrm{Mor}\,\mathrm{Top}$ — все непрерывные отображения между топологическими пространствами. В Top принято выделять полную подкатегорию компактов Comp, объекты которой — всевозможные компакты. Всюду в этой книге под *компактом* мы будем подразумевать хаусдорфово компактное топологическое пространство.

(7) *Категорию банаховых пространств и линейных сжатий* Ban_1 вводят следующим образом: в $\mathrm{Ob}\,\mathrm{Ban}_1$ включают все банаховы пространства, а класс морфизмов $\mathrm{Mor}\,\mathrm{Ban}_1$ составляют из всех линейных сжатий, т. е. из линейных операторов между банаховыми пространствами с нормой, не превосходящей единицы. Если оставить класс объектов неизменным, а класс морфизмов расширить, допустив все линейные ограниченные операторы, то возникает *категория банаховых пространств и ограниченных линейных операторов*, которую обозначают символом Ban_∞.

3.1.11. Рассмотрим произвольную категорию $\mathscr{K}$.

(1) Морфизм $f : a \to b$ категории $\mathscr{K}$ называют *мономорфизмом*, если для любой пары $\mathscr{K}$-морфизмов $g, h : c \to a$ из равенства $f \circ g = f \circ h$ следует $g = h$. Мономорфизм обозначают символом $f : a \rightarrowtail b$.

В каждой из категорий Set, $\mathrm{Vect}(\mathbb{F})$ и Top морфизм будет мономорфизмом в том и только в том случае, если он представляет собой инъективное теоретико-множественное отображение. В категории же предпорядка всякий морфизм является мономорфизмом.

(2) Морфизм $f : a \to b$ категории $\mathscr{K}$ называют *эпиморфизмом*, если для любой пары $\mathscr{K}$-морфизмов $g, h : b \to c$ из равенства $g \circ f = h \circ f$ следует $g = h$. Эпиморфизм принято обозначать символом $f : a \twoheadrightarrow b$.

В категориях Set и Vect($\mathbb{F}$) эпиморфизмы являются сюръективными отображениями, т. е. отображениями на весь образ. В категории Top морфизм $f : X \to Y$ будет эпиморфизмом в том и только в том случае, если $f(X)$ — плотное множество Y.

(3) Морфизм $f : a \to b$ категории $\mathscr{K}$ называют *изоморфизмом*, если существует $\mathscr{K}$-морфизм $g : b \to a$ такой, что $g \circ f = 1_a$ и $f \circ g = 1_b$. Такой морфизм g единствен, ибо если $h \circ f = 1_a$ и $f \circ h = 1_b$ для некоторого $\mathscr{K}$-морфизма $h : b \to a$, то $h = 1_a \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ 1_b = g$. Этот единственный морфизм g называют *обратным* к f и обозначают символом $f^{-1} : b \to a$. Таким образом, морфизм f^{-1} определен условиями $f^{-1} \circ f = 1_a$ и $f \circ f^{-1} = 1_b$.

Легко видеть, что изоморфизм является одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом. В категории Set верно и обратное утверждение, но в произвольной категории это не так.

(4) Говорят, что объекты a и b *изоморфны* в категории $\mathscr{K}$ и пишут $a \simeq b$ (или полнее $a \simeq_{\mathscr{K}} b$), если существует $\mathscr{K}$-морфизм $f : a \to b$, являющийся изоморфизмом. Как видно, в категории Set изоморфизм множеств означает их биективность.

3.2. Универсальные конструкции

Особое место в теории категорий занимают универсальные конструкции, которые часто в том или ином виде встречаются в различных разделах математики.

3.2.1. Рассмотрим произвольную категорию $\mathscr{K}$.

Диаграммой в категории $\mathscr{K}$ называют пару $D := (D_{\mathrm{ob}}, D_{\mathrm{mor}})$, где D_{ob} — некоторое множество объектов, а D_{mor} — некоторое множество морфизмов категории $\mathscr{K}$, причем начало $\mathscr{D}(\alpha)$ и конец $\mathscr{R}(\alpha)$ каждого морфизма $\alpha \in D_{\mathrm{mor}}$ содержатся в D_{ob}. Семейство морфизмов $(f_d : c \to d)_{d \in D_{\mathrm{ob}}}$ с фиксированным началом (или $(f_d : d \to c)_{d \in D_{\mathrm{ob}}}$ с фиксированным концом) c именуют *конусом* (соответственно, *коконусом*) *для диаграммы* D, если $g \circ f_d = f_e$ (соответственно, $f_e \circ g = f_d$) для любого морфизма $g : d \to e$ из D_{mor}. Используют также более короткие термины D-конус и D-коконус.

Пределом диаграммы D называют такой D-конус $(f_d : c \to d)_{d \in D_{\mathrm{ob}}}$, что для любого другого D-конуса $(f'_d : c' \to d)_{d \in D_{\mathrm{ob}}}$ существует и притом единственный морфизм $f : c' \to c$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & d & \\
c' \arrow[ur, "f'_d"] \arrow[rr, dashed, "f"'] & & c \arrow[ul, "f_d"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна при любом объекте $d \in D_{\mathrm{ob}}$.

Копределом диаграммы D называют такой D-коконус $(f_d : d \to c)_{d \in D_{\mathrm{ob}}}$, что для любого другого D-коконуса $(f'_d : d \to c')_{d \in D_{\mathrm{ob}}}$ существует и притом единственный морфизм $f : c \to c'$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& d \arrow[dl, "f_d"'] \arrow[dr, "f'_d"] & \\
c \arrow[rr, dashed, "f"'] & & c'
\end{tikzcd}$$

коммутативна при любом объекте $d \in D_{\mathrm{ob}}$.

Отметим, что предел и копредел обладают свойством универсальности: по определению предел (копредел) — такой конус (коконус), что любой другой конус (коконус) однозначно «пропускается» через универсальный в соответствии с указанными выше диаграммами. Определения такого вида принято называть *универсальными конструкциями.*

Легко видеть, что предел и копредел диаграммы единственны с точностью до изоморфизма. В самом деле, из определения предела следует, что если $(f_d : c \to d)_{d \in D_{\mathrm{ob}}}$ — предел и для некоторого морфизма $h : c \to c$ будет $f_d \circ h = f_d$ при всех $d \in D_{\mathrm{ob}}$, то ввиду очевидного соотношения $f_d \circ 1_c = f_d$ и требования единственности должно быть $h = 1_c$. Предположим, что $(f_d : c \to d)_{d \in D_{\mathrm{ob}}}$ и $(f'_d : c' \to d)_{d \in D_{\mathrm{ob}}}$ — пределы одной и той же диаграммы D. Тогда в силу свойства универсальности предела существуют морфизмы $f : c' \to c$ и $f' : c \to c'$ такие, что диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& d & \\
c' \arrow[ur, "f'_d"] \arrow[rr, dashed, "f"'] & & c \arrow[ul, "f_d"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& d & \\
c' \arrow[ur, "f'_d"] & & c \arrow[ul, "f_d"'] \arrow[ll, dashed, "f'"]
\end{tikzcd}$$

коммутативны при любом $d \in D_{\mathrm{ob}}$. Отсюда $f_d \circ f \circ f' = f_d$ и $f'_d \circ f' \circ f = f'_d$ и, согласно сделанному выше замечанию, получаем $f \circ f' = 1_c$ и $f' \circ f = 1_{c'}$, т. е. f — изоморфизм. Для копредела требуемое следует теперь из принципа двойственности.

3.2.2. Если D — пустая диаграмма, т. е. $D_{\mathrm{ob}} = \varnothing$ и $D_{\mathrm{mor}} = \varnothing$, то D-конус и D-коконус — это просто некоторые фиксированные объекты. Предел и копредел в этой ситуации носят названия *начального* и *конечного объектов* соответственно.

Таким образом, объект $\mathbb{0}$ является начальным в категории $\mathscr{K}$ в том и только в том случае, если для каждого объекта $a \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$ существует ровно один $\mathscr{K}$-морфизм из $\mathbb{0}$ в a. Аналогично, объект $\mathbb{1}$ является конечным в категории $\mathscr{K}$ в том и только в том случае, если для каждого объекта $a \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$ существует ровно один морфизм из a в $\mathbb{1}$. Начальные и конечные объекты единственны с точностью до изоморфизма.

Единственный морфизм из начального объекта $\mathbb{0}$ в произвольный объект a обозначают символом 0_a. Единственный морфизм из произвольного объекта a в конечный объект $\mathbb{1}$ обозначают символом $|_a$.

В категории предпорядка начальным элементом является любой наименьший элемент, а конечным элементом — любой наибольший элемент. В категории Set начальный объект единствен и совпадает с пустым множеством, а конечный объект — любое одноточечное множество. В качестве канонического представителя класса конечных объектов в Set берут ординал $1 := \{\varnothing\}$ (см. 1.5.6). В категориях $\mathrm{Vect}(\mathbb{F})$, $\mathrm{VLat}(\mathbb{F})$ и Ban_∞ начальные и конечные объекты — нульмерные (т. е. одноэлементные) векторные пространства. Объект, являющийся одновременно начальным и конечным, называют *нулевым* объектом. В категории Bool начальный объект — произвольная двухэлементная булева алгебра, а конечные объекты отсутствуют. В относительной категории $\mathrm{Set}^{\mathbb{R}}$ вещественных функций начальный объект представляет собой пустую функцию $0_{\mathbb{R}} : \varnothing \to \mathbb{R}$, а конечный объект — тождественную функцию $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Действительно, если $g : A \to \mathbb{R}$ — произвольный морфизм в $\mathrm{Set}^{\mathbb{R}}$, то для $\mathrm{Set}^{\mathbb{R}}$-морфизмов $\jmath : 0_{\mathbb{R}} \to g$ и $k : g \to \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[rr, "\jmath"] \arrow[dr, "0_{\mathbb{R}}"'] & & A \arrow[dl, "g"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{R} \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}}"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}
$$

должны быть коммутативны, что возможно только при условии $\jmath = 0_A$ и $k = f$.

3.2.3. Пусть $D_{\mathrm{ob}} \neq \varnothing$ и $D_{\mathrm{mor}} = \varnothing$. Тогда предел и копредел диаграммы D — соответственно произведение и копроизведение множества объектов D_{ob}.

(1) *Произведение* непустого множества $\mathscr{K}$-объектов $D := D_{\mathrm{ob}}$ — по определению $\mathscr{K}$-объект c, обозначаемый символом $\prod_{d \in D} d$, и семейство морфизмов $(\mathrm{pr}_d : c \to d)_{d \in D}$ такие, что для произвольного семейства морфизмов $(f_d : b \to d)_{d \in D}$ существует и притом единственный морфизм $f : b \to c$, для которого $\mathrm{pr}_d \circ f = f_d$ для любого объекта $d \in D$. Морфизм f при этом называют *произведением семейства морфизмов* $(f_d : b \to d)_{d \in D}$ относительно семейства *проекций* $(\mathrm{pr}_d : c \to d)_{d \in D}$.

(2) *Копроизведение* непустого множества $\mathscr{K}$-объектов $D := D_{\mathrm{ob}}$ — по определению $\mathscr{K}$-объект c, обозначаемый символом $\sum_{d \in D} d$, и семейство морфизмов $(\imath_d : d \to c)_{d \in D}$ такие, что для произвольного семейства морфизмов $(f_d : d \to b)_{d \in D}$ существует и притом единственный морфизм $f : c \to b$, для которого $f \circ \imath_d = f_d$ для любого объекта $d \in D$. Морфизм f при этом называют *копроизведением семейства морфизмов* $(f_d : b \to d)_{d \in D}$ относительно семейства *инъекций* $(\imath_d : c \to d)_{d \in D}$.

Выделим отдельно случай двух сомножителей (слагаемых).

(3) Произведение двух $\mathscr{K}$-объектов a и b представляет собой $\mathscr{K}$-объект, обозначаемый символом $a \times b$, и пару морфизмов $\mathrm{pr}_a : a \times b \to a$ и $\mathrm{pr}_b : a \times b \to b$ таких, что для любой пары $\mathscr{K}$-морфизмов $f : c \to a$ и $g : c \to b$ существует и притом единственный морфизм $\langle f, g\rangle : c \to a \times b$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "\mathrm{pr}_a"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_b"'] & b \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $\mathrm{pr}_a \circ \langle f, g\rangle = f$ и $\mathrm{pr}_b \circ \langle f, g\rangle = g$. Морфизм $\langle f, g\rangle$ называют *произведением морфизмов* f и g относительно *проекций* pr_a и pr_b.

(4) Копроизведение двух $\mathscr{K}$-объектов a и b представляет собой $\mathscr{K}$-объект, обозначаемый символом $a+b$, и пару морфизмов $\imath_a : a \to a+b$ и $\imath_b : b \to a+b$, таких, что для любой пары $\mathscr{K}$-морфизмов $f : a \to c$ и $g : b \to c$ существует и притом единственный морфизм $[f, g] : a + b \to c$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\imath_a"] \arrow[dr, "f"'] & a + b \arrow[d, dashed, "{[f,g]}"] & b \arrow[l, "\imath_b"'] \arrow[dl, "g"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $[f, g] \circ \imath_a = f$ и $[f, g] \circ \imath_b = g$. Морфизм $[f, g]$ называют *копроизведением морфизмов* f и g относительно *инъекций* $\imath_a$ и $\imath_b$.

(5) В категории предпорядка произведение и копроизведение множества означают точную нижнюю и точную верхнюю границы соответственно. В категории Set произведение непустого семейства множеств $(A_i)_{i\in I}$ — обычное декартово произведение $\prod_{i\in I} A_i$, а копроизведение — дизъюнктное объединение $\sum_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I} A_i \times \{i\}$. В подкатегории Top множества $\prod_{i\in I} A_i$ и $\bigcup_{i\in I} A_i \times \{i\}$ следует снабдить тихоновской топологией и топологией суммы (2.5.4) соответственно. В категории Bool произведение и копроизведение совпадают соответственно с декартовым произведением и тензорным произведением булевых алгебр в смысле 2.2.5 и 2.2.7. В категориях Vect($\mathbb{F}$) и VLat($\mathbb{F}$) произведение семейства векторных пространств (решеток) $(X_i)_{i\in I}$ вновь дает обычное декартово произведение, а копроизведение совпадает с прямой суммой $\bigoplus_{i\in I} X_i$.

3.2.4. Пусть D_{ob} состоит ровно из двух объектов a и b и D_{mor} содержит два морфизма $f : a \to b$ и $g : a \to b$. В этой ситуации предел и копредел диаграммы D называют соответственно *уравнителем* и *коуравнителем*.

Таким образом, уравнителем пары $\mathscr{K}$-морфизмов $f, g : a \to b$ является такой $\mathscr{K}$-морфизм $\imath : e \to a$, что $f \circ \imath = g \circ \imath$ и для любого $\mathscr{K}$-морфизма $h : c \to a$, удовлетворяющего равенству $f \circ h = g \circ h$, существует и притом только один $\mathscr{K}$-морфизм $k : c \to e$, для которого $\imath \circ k = h$.

Аналогично, коуравнителем пары $\mathscr{K}$-морфизмов $f, g : a \to b$ является такой $\mathscr{K}$-морфизм $\jmath : b \to e$, что $\jmath \circ f = \jmath \circ g$ и для любого $\mathscr{K}$-морфизма $h : b \to c$, удовлетворяющего равенству $f \circ h = g \circ h$, существует и притом только один $\mathscr{K}$-морфизм $k : e \to c$, для которого $\jmath \circ k = h$.

Определения уравнителя и коуравнителя иллюстрируют следующие коммутативные диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
e \arrow[rr, "\imath"] & & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\
& c \arrow[ul, dashed, "k"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[rr, "\jmath"] \arrow[dr, "h"'] & & e \arrow[dl, dashed, "k"] \\
& & c &
\end{tikzcd}
$$

(1) *Всякий уравнитель является мономорфизмом и всякий коуравнитель является эпиморфизмом.*

$\lhd$ Пусть $\imath$ — уравнитель f и g (см. диаграмму из определения уравнителя) и $\imath \circ p = \imath \circ q$ для некоторых $p, q : c \to e$. В указанной диаграмме положим $h := \imath \circ p$. Тогда $f \circ h = f \circ (\imath \circ p) = (f \circ \imath) \circ p = (g \circ \imath) \circ p = g \circ (\imath \circ p) = g \circ h$ и, стало быть, по определению уравнителя существует единственный морфизм $k : c \to e$, для которого $\imath \circ k = h$. Из равенств $\imath \circ k = h = \imath \circ p$ в силу условия единственности в определении уравнителя получаем $k = p$. В то же время $\imath \circ q = \imath \circ p = h$. Следовательно, $k = q$. Значит, $p = q$ и уравнитель $\imath$ является мономорфизмом. $\rhd$

(2) *Эпиморфный уравнитель и мономорфный коуравнитель являются изоморфизмами.*

$\lhd$ Пусть $\imath$ — эпиморфный уравнитель f и g. Тогда $f \circ \imath = g \circ \imath$, а из определения эпиморфизма выводим $f = g$. Если в определении уравнителя положить $c := a$ и $h := 1_a$, то в силу очевидного равенства $f \circ 1_a = g \circ 1_a$ существует единственный морфизм $k : a \to e$, для которого $\imath \circ k = 1_a$. Тем самым $\imath \circ k \circ \imath = 1_a \circ \imath = \imath = \imath \circ 1_a$, что в силу предложения (1) дает $k \circ \imath = 1_a$ и, следовательно, $k = \imath^{-1}$. $\rhd$

В категории Set уравнителем пары функций $f, g : A \to B$ служит тождественное вложение $\imath$ множества $E := \{x \in A : f(x) = g(x)\}$ в множество A. Для описания коуравнителя той же пары функций введем множество $S := \{(f(x), g(x)) \in B \times B : x \in A\}$. Пусть $\sim$ — наименьшее отношение эквивалентности на B, содержащее S. Это определение корректно, так как пересечение непустого семейства отношений эквивалентности будет отношением эквивалентности и эквивалентность $B \times B$ содержит S. Коуравнителем пары f, g будет фактор-отображение $\varphi : B \to B/\sim$.

3.2.5. Пусть теперь D_{ob} состоит ровно из трех объектов a, b и c, а D_{mor} содержит два морфизма $f : a \to c$ и $g : b \to c$ с общим концом. В этой ситуации предел диаграммы D называют *обратным образом*.

Конус для указанной диаграммы состоит из трех морфизмов $f' : d \to b$, $g' : d \to a$ и $h' : d \to c$, для которых $h = g \circ f' = f \circ g'$. Поэтому конус фактически определен фактически двумя морфизмами $f' : d \to b$ и $g' : d \to a$, для которых $g \circ f' = f \circ g'$. Итак, по определению предела диаграммы обратным образом пары $\mathscr{K}$-морфизмов $f : a \to c$ и $g : b \to c$ будет пара $\mathscr{K}$-морфизмов $f' : d \to b$ и $g' : d \to a$, обладающих следующими свойствами:

(1) $g \circ f' = f \circ g'$, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

коммутативна;

(2) для любых $\mathscr{K}$-морфизмов $h : e \to a$ и $\jmath : e \to b$ таких, что $f \circ h = g \circ \jmath$, существует и притом единственный $\mathscr{K}$-морфизм $k : e \to d$, для которого выполнены равенства $h = g' \circ k$ и $\jmath = f' \circ k$, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} e \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, "\jmath"] \arrow[ddr, "h"'] & & \\ & d \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"] & b \arrow[d, "g"] \\ & a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Диаграмму из (1) называют *декартовым квадратом,* если выполнены условия (1) и (2). При этом говорят, что f' — *обратный образ* f *относительно* g и f' получается *подъемом* f *вдоль* g. Аналогично, g' — *обратный образ* g *относительно* f и g' получается *подъемом* g *вдоль* f.

Несложно убедиться, что если морфизм $k : e \to a \times b$ служит уравнителем морфизмов $f \circ \mathrm{pr}_a$ и $g \circ \mathrm{pr}_b$, то пара морфизмов $f' := \mathrm{pr}_b \circ k$ и $g' := \mathrm{pr}_a \circ k$ будет обратным образом пары $f : a \to c$ и $g : b \to c$.

В категории Set обратный образ двух отображений $f : A \to C$ и $f : B \to C$ — это два отображения $f' : D \to B$ и $g' : D \to A$, определяемые соотношениями

$$D := \{(x, y) \in A \times B : \ f(x) = g(y)\},$$
$$f' : (x, y) \mapsto y, \quad g' : (x, y) \mapsto x.$$

В категории $\mathrm{Vect}(\mathbb{F})$ (или $\mathrm{VLat}(\mathbb{F})$) обратным образом линейного оператора (решеточного гомоморфизма) $T : X \to Y$ и нулевого оператора $0 : \mathbb{0} \to Y$ будет пара операторов $\iota : \ker(T) \to X$ и $0 : \ker(T) \to \mathbb{0}$, где $\mathbb{0}$ — нульмерное векторное пространство, $\ker(T)$ — ядро оператора T и ι — тождественное вложение.

3.2.6. Следующий простой факт, называемый *леммой о квадратах,* часто оказывается весьма полезным в теории топосов.

Для коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \\ \bullet \arrow[r] \arrow[u] & \bullet \arrow[r] \arrow[u] & \bullet \arrow[u] \end{tikzcd}$$

справедливы следующие утверждения:

(1) *если два малых квадрата декартовы, то внешний прямоугольник также декартов*;

(2) *если внешний прямоугольник и правый квадрат декартовы, то левый квадрат также декартов.*

3.2.7. (1) *Мономорфизмы и эпиморфизмы сохраняются при обратных образах. Точнее, если $f : a \to c$ — мономорфизм* (*эпиморфизм*) *и квадрат*

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

декартов, то $f' : d \to b$ также будет мономорфизмом (*соответственно, эпиморфизмом*).

$\lhd$ Доказательство см. в П. Фрейд [230]. $\rhd$

Морфизмы $f : a \to c$ и $g : b \to c$ называют *дизъюнктными*, если начальный объект $\mathbb{0}$ служит их обратным образом, т. е. если квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathbb{0} \arrow[r, "0_b"] \arrow[d, "0_a"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

декартов. В категории Set дизъюнктность f и g означает, что $\mathrm{im}(f) \cap \mathrm{im}(g) = \varnothing$.

(2) *Если $f : a \rightarrowtail c$ и $g : b \rightarrowtail c$ — дизъюнктные мономорфизмы, то $[f, g] : a + b \to c$ — мономорфизм.*

$\lhd$ Доказательство см. в Р. Голдблатт [40]. $\rhd$

3.2.8. Двойственным по отношению к обратному образу является понятие *амальгамы*. Итак, амальгама — копредел диаграммы D, где D_{ob} содержит три объекта a, b и c, а D_{mor} содержит два морфизма $f : a \to b$ и $g : a \to c$ с общим началом. Точнее, амальгамой $\mathscr{K}$-морфизмов f и g будет пара $\mathscr{K}$-морфизмов $f' : c \to d$ и $g' : b \to d$, обладающих следующими свойствами:

(1) $g' \circ f = f' \circ g$;

(2) для любых $\mathscr{K}$-морфизмов $h : b \to e$ и $\jmath : c \to e$ таких, что $h \circ f = \jmath \circ g$, существует и притом единственный $\mathscr{K}$-морфизм $k : d \to e$, для которого выполнены равенства $h = k \circ g'$ и $\jmath = k \circ f'$.

Нетрудно видеть, что амальгаму можно получить следующим образом. Рассмотрим копроизведение $b + c$ объектов b и c с инъекциями $\iota_b : b \to b + c$ и $\iota_c : c \to b + c$. Тогда амальгама $\mathscr{K}$-морфизмов f и g будет коуравнителем пары $\mathscr{K}$-морфизмов $\iota_b \circ f$ и $\iota_c \circ g$.

Амальгама двух отображений $f : A \to B$ и $g : A \to C$ в категории Set получается, если в дизъюнктном объединении B и C для каждого $x \in A$ отождествить элементы $f(x)$ и $g(x)$.

3.2.9. Категорию называют *полной* (*кополной*), если в ней каждая диаграмма имеет предел (копредел). Диаграмму называют *конечной*, если она содержит конечное число объектов и морфизмов. Если в категории каждая конечная диаграмма имеет предел (копредел), то ее называют *конечно полной* (*конечно кополной*). О категории одновременно (конечно) полной и (конечно) кополной говорят как о (конечно) *биполной* категории.

Если категория $\mathscr{K}$ имеет конечный (*начальный*) *объект и в ней любая пара морфизмов с общим концом* (*с общим началом*) *имеет обратный образ* (*амальгаму*), *то $\mathscr{K}$ конечно полна* (*конечно кополна*).

3.3. Функторы

В этом параграфе даны понятия функтора, естественного преобразования функторов и сопряженного функтора. Эти понятия относятся к числу важнейших в теории категорий.

3.3.1. Рассмотрим категории $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$. *Ковариантный функтор* $\mathscr{F} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{K}$ — это отображение, область определения которого составлена из всех объектов и морфизмов категории $\mathscr{H}$ и которое удовлетворяет следующим условиям:

(1) если $f : a \to b$ — морфизм категории $\mathscr{H}$, то $\mathscr{F}(f) : \mathscr{F}(a) \to \mathscr{F}(b)$;

(2) если $f : a \to b$ и $g : b \to c$ — морфизмы категории $\mathscr{H}$, то $\mathscr{F}(gf) = \mathscr{F}(g)\mathscr{F}(f)$;

(3) если $a \in \operatorname{Ob}\mathscr{H}$, то $\mathscr{F}(1_a) = 1_{\mathscr{F}(a)}$.

Итак, для каждой пары объектов $a, b \in \operatorname{Ob}\mathscr{H}$ функтор $\mathscr{F}$ определяет отображение $\mathscr{F}_{a,b} : H_{\mathscr{H}}(a, b) \to H_{\mathscr{K}}(a, b)$. Если $\mathscr{F}_{a,b}$ инъективно (сюръективно) при любых a и b, то функтор $\mathscr{F}$ называют *унивалентным* (*полным*). Категорию называют *малой*, если объекты этой категории образуют множество.

Ковариантный функтор из $\mathscr{H}^*$ в $\mathscr{K}$ (или из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{K}^*$) называют *контравариантным функтором* из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{K}$. В дальнейшем слово функтор означает ковариантный функтор.

3.3.2. Для двух функторов $\mathscr{F}_1 : \mathscr{K} \to \mathscr{K}'$ и $\mathscr{F}_2 : \mathscr{K}' \to \mathscr{K}''$ можно определить композицию $\mathscr{F}_2 \circ \mathscr{F}_1$ соотношениями

$$\mathscr{F}_2 \circ \mathscr{F}_1 : a \mapsto \mathscr{F}_2(\mathscr{F}_1(a)) \quad (a \in \operatorname{Ob}\mathscr{K}),$$
$$\mathscr{F}_2 \circ \mathscr{F}_1 : f \mapsto \mathscr{F}_2(\mathscr{F}_1(f)) \quad (f \in \operatorname{Mor}\mathscr{K}).$$

Композиция функторов ассоциативна. Для каждой категории $\mathscr{K}$ существует тождественный функтор $I_{\mathscr{K}}$, который служит единицей относительно композиции морфизмов.

Эти свойства позволяют ввести еще один пример категории — категорию Cat малых категорий. Объектами Cat служат все малые категории, а морфизмами — функторы.

Изоморфизмом категорий $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$ называют функтор $\mathscr{F} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$, являющийся биекцией как на объектах, так и на морфизмах. Как видно, функтор $\mathscr{F} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ будет изоморфизмом в том и только в том случае, если существует функтор $\mathscr{G} : \mathscr{K} \to \mathscr{H}$, для которого обе композиции $\mathscr{G} \circ \mathscr{F}$ и $\mathscr{F} \circ \mathscr{G}$ являются тождественными функторами на $\mathscr{H}$ и на $\mathscr{K}$ соответственно. Более общее понятие эквивалентности категорий будет введено ниже в 3.3.5.

3.3.3. Рассмотрим примеры функторов.

(1) Если $\mathscr{H}$ — подкатегория категории $\mathscr{K}$, то функтор тождественного вложения $\iota := \iota_{\mathscr{H}} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ определяют равенствами $\iota(a) = a$ ($a \in \operatorname{Ob} \mathscr{H}$) и $\iota(f) = f$ ($f \in \operatorname{Mor} \mathscr{H}$). Так же определяют тождественный функтор $\mathrm{id}_{\mathscr{K}} : \mathscr{K} \to \mathscr{K}$.

(2) *Забывающий функтор* действует из произвольной категории структурированных множеств $\mathscr{K}$ в категорию Set. Он сопоставляет каждому $\mathscr{K}$-объекту несущее множество этого объекта, а каждому $\mathscr{K}$-морфизму — сам этот морфизм, рассматриваемый как теоретико-множественное отображение. Тем самым забывающий функтор «пренебрегает» структурой $\mathscr{K}$-объекта и свойством $\mathscr{K}$-морфизма сохранять эту структуру.

(3) Пусть в категории $\mathscr{K}$ существуют произведения $a \times c$ и $b \times d$. Возьмем два морфизма $f : a \to b$ и $g : c \to d$ и образуем два новых морфизма $f \circ \mathrm{pr}_a : a \times c \to b$ и $g \circ \mathrm{pr}_c : a \times c \to d$. По определению произведения $b \times d$ существует единственный морфизм $h : a \times c \to b \times d$, для которого $\mathrm{pr}_b \circ h = f \circ \mathrm{pr}_a$ и $\mathrm{pr}_d \circ h = g \circ \mathrm{pr}_c$. Морфизм h принято называть *произведением морфизмов* f и g и обозначать символом $f \times g$.

Если в категории $\mathscr{K}$ существует произведение любых двух объектов, то каждый фиксированный объект $a \in \operatorname{Ob} \mathscr{K}$ определяет функтор $(\cdot) \times a : \mathscr{K} \to \mathscr{K}$, сопоставляющий объекту b объект $b \times a$, а морфизму $f : b \to c$ — морфизм $f \times 1_a : b \times a \to c \times a$.

(4) Фиксированный объект a категории $\mathscr{K}$ определяет функтор $H_{\mathscr{K}}(a, \cdot) : \mathscr{K} \to \mathrm{Set}$, называемый *ковариантным* hom-*функтором* и сопоставляющий объекту b множество $H_{\mathscr{K}}(a, b)$ всех морфизмов из a в b, а каждому морфизму $f : b \to c$ — отображение $H_{\mathscr{K}}(a, f) : H_{\mathscr{K}}(a, b) \to H_{\mathscr{K}}(a, c)$, переводящее g в $f \circ g$.

(5) Аналогично определяют *контравариантный* hom-*функтор* $H_{\mathscr{K}}(\cdot, a) : \mathscr{K} \to \mathrm{Set}$, сопоставляющий объекту b множество $H_{\mathscr{K}}(b, a)$ всех морфизмов из b в a, а каждому морфизму $f : b \to c$ — отображение $H_{\mathscr{K}}(f, a) : H_{\mathscr{K}}(c, a) \to H_{\mathscr{K}}(b, a)$, переводящее g в $g \circ f$.

(6) Обозначим символом St отображение, сопоставляющее булевой алгебре B ее стоунов компакт $\mathrm{St}(B)$, а булеву гомоморфизму $h : B \to C$ то единственное непрерывное отображение $\varphi := \mathrm{St}(h) : \mathrm{St}(C) \to \mathrm{St}(B)$, для которого $h(b) = \iota_C^{-1} \varphi^{-1}(\iota_B(b))$, где $\iota_B : B \to \mathrm{Clop}(\mathrm{St}(B))$ — стоуново представление алгебры B, см. теорему Сикорского 2.4.8.

Отображение St является контравариантным функтором из категории Bool в категорию Comp, называемым *функтором Стоуна*.

(7) Примером ковариантного функтора из категории $\mathrm{Vect}(\mathbb{F})$ в нее же служит отображение, сопоставляющее произвольному векторному пространству X над $\mathbb{F}$ алгебраически сопряженное пространство $X^{\#}$ (= пространство всех линейных функционалов $x^{\#} : X \to \mathbb{F}$), а линейному оператору $T : X \to Y$ — алгебраически сопряженный оператор $T^{\#} : Y^{\#} \to X^{\#}$, определяемый соотношением $\langle x \,|\, T^{\#} y^{\#} \rangle := \langle Tx \,|\, y^{\#} \rangle$ ($x \in X$, $y^{\#} \in Y^{\#}$), где $\langle x \,|\, x^{\#} \rangle := x^{\#}(x)$.

(8) По теореме Алаоглу — Бурбаки единичный шар в сопряженном банаховом пространстве является компактом в $*$-слабой топологии. Пусть отображение $\mathscr{U}$ сопоставляет каждому банахову пространству X единичный шар $\mathscr{U}(X)$ сопряженного пространства X', снабженный слабой топологией $\sigma(X', X)$. Линейному сжатию $T : X \to Y$ поставим в соответствие непрерывное отображение $\mathscr{U}(T) : \mathscr{U}(Y) \to \mathscr{U}(X)$, где $\mathscr{U}(T)$ — ограничение сопряженного оператора T' на единичный шар пространства Y'. Тогда $\mathscr{U}$ — контравариантный функтор из Ban_1 в Comp.

(9) Рассматривая топологическое пространство Q, обозначим символом $C_b(Q)$ банахово пространство всех ограниченных непрерывных функций из Q в $\mathbb{R}$. С произвольным непрерывным отображением $\sigma : Q \to P$ свяжем линейный сжимающий оператор $\sigma^* : C_b(P) \to C_b(Q)$, действующий по правилу $u \mapsto u \circ \sigma$ $(u \in C_b(Y))$. Легко видеть, что отображение C_b, действующее по правилу $Q \to C_b(Q)$, $\sigma \mapsto C_b(\sigma) := \sigma^*$, является контравариантным функтором из Top в Ban_1.

3.3.4. Пусть $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$ — категории. Рассмотрим ковариантные функторы $\mathscr{F} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ и $\mathscr{G} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$. *Естественным преобразованием* $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ функтора $\mathscr{F}$ в функтор $\mathscr{G}$ называют отображение $\varphi : \mathrm{Ob}\,\mathscr{H} \to \mathrm{Mor}\,\mathscr{K}$ такое, что

(1) $\varphi_a := \varphi(a) \in H_{\mathscr{K}}(\mathscr{F}(a), \mathscr{F}(b))$ для любого $a \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{H}$;

(2) для любого морфизма $f : a \to b$ категории $\mathscr{H}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(a) \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[d, "\mathscr{F}(f)"'] & \mathscr{G}(a) \arrow[d, "\mathscr{G}(f)"] \\
\mathscr{F}(b) \arrow[r, "\varphi_b"'] & \mathscr{G}(b)
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $\mathscr{G}(f)\varphi_a = \varphi_b\mathscr{F}(f)$. Если функторы $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ контравариантны, то определение функторного морфизма претерпевает единственное изменение: в последней диаграмме вертикальные стрелки меняют направления. В этой ситуации говорят также, что φ — *функторный морфизм* из функтора $\mathscr{F}$ в функтор $\mathscr{G}$ и пишут $\varphi : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$. Если заданы два функторных морфизма $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ и $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{G}'$, то можно ввести их композицию $\psi\varphi := \psi \circ \varphi$ как функторный морфизм из $\mathscr{F}$ в $\mathscr{G}'$, определенный правилом $\psi \circ \varphi(a) := \psi(a) \circ \varphi(a)$ $(a \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{H})$.

С понятием функторного морфизма связан еще один пример категории, а именно категория функторов $\mathrm{Funct}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$, где $\mathscr{H}$ — малая категория. Объектами этой категории являются всевозможные функторы из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{K}$, а множество морфизмов $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ состоит из всех функторных морфизмов из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{K}$.

Естественное преобразование $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ называют *естественной эквивалентностью функторов* $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ или *функторным изоморфизмом* между $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$, если φ_a есть изоморфизм в категории $\mathscr{K}$ для каждого $a \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{H}$. В этом случае отображения φ_a^{-1} образуют естественное преобразование $\mathscr{G}$ в $\mathscr{F}$, которое мы обозначим через φ^{-1}.

3.3.5. Категории $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$ называют *эквивалентными*, если существуют функторы $\mathscr{F} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ и $\mathscr{G} : \mathscr{K} \to \mathscr{H}$ такие, что функтор $\mathscr{F}\mathscr{G}$ естественно изоморфен тождественному функтору $I_{\mathscr{H}}$, а функтор $\mathscr{G}\mathscr{F}$ естественно изоморфен тождественному функтору $I_{\mathscr{K}}$. При этом говорят, что функторы $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ *устанавливают эквивалентность категорий* $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$.

Отношение эквивалентности между категориями рефлексивно, симметрично и транзитивно. Рассмотрим примеры эквивалентных категорий.

(1) Пусть DComp — полная подкатегория категории Comp, объекты которой — вполне несвязные компакты. Функтор Стоуна St устанавливает изоморфизм категорий Bool и DComp.

(2) Категория Comp эквивалентна категории коммутативных C^*-алгебр с единицей (теорема Гельфанда — Наймарка). Эквивалентность этих категорий показывает функтор $C(\cdot, \mathbb{C})$, который переводит компакт X в C^*-алгебру непрерывных комплексных функций на X, а непрерывное отображение $\sigma : X \to Y$ — в оператор замены переменной $C(\sigma, \mathbb{C}) : x \mapsto x \circ \sigma$ $(x \in C(Y, \mathbb{C}))$.

(3) Пусть CAb — категория компактных абелевых групп и непрерывных групповых гомоморфизмов. Отображение, сопоставляющее топологической группе G ее группу непрерывных характеров G^*, определяет эквивалентность категорий (теорема двойственности Понтрягина).

(4) Пусть $\mathrm{Vect}_f(\mathbb{F})$ — полная подкатегория категории $\mathrm{Vect}(\mathbb{F})$, состоящая из конечномерных пространств. Эта категория эквивалентна категории матриц $\mathrm{Matr}(\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$, объектами которой служат все целые положительные числа, а морфизмами $A : n \to m$ — все прямоугольные $m \times n$-матрицы с обычным умножением матриц в качестве композиции.

3.3.6. *Категории $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$ эквивалентны в том и только в том случае, если существует полный унивалентный функтор $\mathscr{F}$ из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{K}$ такой, что для каждого объекта $b \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$ существует изоморфный ему объект вида $\mathscr{F}(a)$, где $a \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{H}$.*

$\triangleleft$ Доказательство см. в книгах И. Букура и А. Деляну [18, предложение 1.19], С. Маклейна [142, теорема 4.4.1], М. Ш. Цаленко и Е. Г. Шульгейфера [171, предложение 3.8]. $\triangleright$

3.3.7. Возьмем функторы $\mathscr{F} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ и $\mathscr{G} : \mathscr{K} \to \mathscr{H}$. Сопоставим этим функторам два новых функтора $H^{\mathscr{F}}$ и $H_{\mathscr{G}}$ из категории $\mathscr{H}^* \times \mathscr{K}$ в категорию множеств и отображений. Именно, для любых $a \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{H}$, $b \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$, $u \in H_{\mathscr{H}}(a, a')$, $v \in H_{\mathscr{K}}(b, b')$ положим

$$
\begin{gathered}
H^{\mathscr{F}}(a, b) := H_{\mathscr{K}}(\mathscr{F}(a), b), \\
H_{\mathscr{G}}(a, b) := H_{\mathscr{H}}(a, \mathscr{G}(b)), \\
H^{\mathscr{F}}(u, v) : f \to v f \mathscr{F}(u), \\
H_{\mathscr{G}}(u, v) : g \to \mathscr{G}(v) g u,
\end{gathered}
$$

где $f \in H_{\mathscr{K}}(\mathscr{F}(u), b)$ и $g \in H_{\mathscr{H}}(a, \mathscr{G}(b))$.

Говорят, что *функторы $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ составляют сопряженную пару,* если функторы $H^{\mathscr{F}}$ и $H_{\mathscr{G}}$ изоморфны. При этом $\mathscr{F}$ называют *левым сопряженным* к $\mathscr{G}$, а $\mathscr{G}$ — *правым сопряженным* к $\mathscr{F}$. Изоморфизм $\varphi : H^{\mathscr{F}} \to H_{\mathscr{G}}$ называют *сопряжением,* а обратный изоморфизм φ^{-1} — *косопряжением.*

3.3.8. Пусть $\mathscr{G} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ — произвольный функтор. Объект $b \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{H}$ называют *свободным объектом над $\mathscr{K}$-объектом a относительно функтора $\mathscr{G}$*, если существует такой $\mathscr{K}$-морфизм $f : a \to \mathscr{G}(b)$, что любой $\mathscr{K}$-морфизм $g : a \to \mathscr{G}(c)$,

$c \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{H}$, представим в виде композиции $g = f \circ G(h)$ для однозначно определенного $\mathscr{H}$-морфизма $h : b \to c$. При этом f именуют *определяющим морфизмом.* Двойственным образом определяют *косвободный объект* и *коопределяющий морфизм.*

Функтор $\mathscr{G} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ обладает левым сопряженным функтором $\mathscr{F} : \mathscr{K} \to \mathscr{H}$ в том и только в том случае, если для каждого $\mathscr{K}$-объекта a существует $\mathscr{H}$-объект b, свободный над a относительно $\mathscr{G}$.

$\lhd$ Доказательство см. у М. Ш. Цаленко и Е. Г. Шульгейфера [171, Гл. IV, предложение 1.8]. $\rhd$

3.3.9. В качестве важного примера дадим описание правого сопряженного функтора к функтору $(\cdot) \times a$, см. 3.3.3 (3).

Возьмем два объекта a и b категории $\mathscr{K}$. *Экспоненциал* и *морфизм значения* определяют как $\mathscr{K}$-объект b^a и $\mathscr{K}$-морфизм $\mathrm{ev} : b^a \times a \to b$, удовлетворяющие условию: для любых $\mathscr{K}$-объекта c и $\mathscr{K}$-морфизма $g : c \times a \to b$ существует единственный $\mathscr{K}$-морфизм $\bar{g} : c \to b^a$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} c \times a \arrow[r, "\bar{g}\times 1_a"] \arrow[dr, "g"'] & b^a \times a \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\ & b \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $\mathrm{ev} \circ (\bar{g} \times 1_a) = g$. Функция, сопоставляющая морфизму g морфизм $\bar{g}$, устанавливает биекцию между множествами $H_{\mathscr{K}}(c \times a, b)$ и $H_{\mathscr{K}}(c, b^a)$. Два морфизма g и $\bar{g}$, соответствующие друг другу в силу этой биекции, называют *экспоненциально присоединенными* друг к другу.

Говорят что категория $\mathscr{K}$ допускает *экспоненцирование*, если в ней для любых двух объектов a и b существуют произведение $a \times b$, экспоненциал b^a и морфизм значения ev. Категорию называют *декартово замкнутой*, если она конечно полна и допускает экспоненцирование. В такой категории для объекта d также существуют экспоненциал d^a и морфизм значения $\mathrm{ev}' : d^a \times a \to d$. Возьмем морфизм $f : d \to b$. Тогда для композиции $f \circ \mathrm{ev}' : d^a \times a \to b$ существует экспоненциально присоединенный морфизм, который мы обозначим символом f^a. Итак, f^a — единственный морфизм из d^a в b^a, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} d^a \times a \arrow[r, "f^a\times 1_a"] \arrow[dr, "f\circ \mathrm{ev}'"'] & b^a \times a \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\ & b \end{tikzcd}$$

коммутативна.

В декартово замкнутой категории $\mathscr{K}$ определен функтор $(\cdot)^a$, сопоставляющий объекту b объект b^a, а морфизму $f : c \to b$ — морфизм $f^a : c^a \to b^a$. Этот функтор является правым сопряженным к функтору $(\cdot) \times a$. Таким образом, имеет место утверждение.

Категория $\mathscr{K}$ допускает экспоненцирование в том и только в том случае, если функтор $(\cdot)^a$ имеет правый сопряженный для любого $\mathscr{K}$-объекта a.

3.3.10. Пусть $\mathscr{K}$ — подкатегория категории $\mathscr{H}$ и пусть $\iota : \mathscr{K} \to \mathscr{H}$ — функтор тождественного вложения. Если $\mathscr{K}$-объект b свободен над $\mathscr{H}$-объектом a относительно ι, то b называют *$\mathscr{K}$-рефлектором* объекта $a \in \operatorname{Ob}\mathscr{H}$. Таким образом, $b \in \operatorname{Ob}\mathscr{K}$ будет *$\mathscr{K}$-рефлектором* объекта $a \in \operatorname{Ob}\mathscr{H}$, если существует такой $\mathscr{H}$-морфизм $\varphi : a \to b$, что всякий $\mathscr{H}$-морфизм $f : a \to c$, $c \in \operatorname{Ob}\mathscr{K}$, представим в виде $f = \varphi g$ для однозначно определенного $\mathscr{K}$-морфизма $g : b \to c$. Подкатегорию $\mathscr{K}$ называют *рефлективной,* если для каждого объекта категории $\mathscr{H}$ существует $\mathscr{K}$-рефлектор. Двойственным образом вводят понятия *корефлектора* и *корефлективной подкатегории.*

(1) *Подкатегория $\mathscr{K}$ категории $\mathscr{H}$ будет рефлективной (корефлективной) в том и только в том случае, когда функтор тождественного вложения $\iota_{\mathscr{K}} : \mathscr{K} \to \mathscr{H}$ обладает сопряженным слева (справа) функтором $\mathscr{R} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$.*

Функтор $\mathscr{R}$ называют *$\mathscr{K}$-рефлектором категории $\mathscr{H}$*. Пусть $\pi : \mathrm{id}_{\mathscr{H}} \to \mathscr{R} \circ \iota_{\mathscr{K}}$ обозначает единицу сопряжения.

(2) *Рефлективная подкатегория $\mathscr{K}$ категории $\mathscr{H}$ будет полной подкатегорией в том и только в том случае, когда для любого $\mathscr{K}$-объекта a выполняется $\pi_a \in \operatorname{Mor}\mathscr{K}$.*

3.3.11. Рассмотрим примеры рефлективных подкатегорий.

(1) Если $\mathscr{K}$ — рефлективная подкатегория категории $\mathscr{H}$, а $\mathscr{K}'$ — рефлективная подкатегория категории $\mathscr{K}$, то $\mathscr{K}'$ — рефлективная подкатегория категории $\mathscr{H}$. При этом рефлектором $\mathscr{R}' : \mathscr{H} \to \mathscr{K}'$ служит композиция $\mathscr{R}''\mathscr{R}$ рефлекторов $\mathscr{R} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ и $\mathscr{R}'' : \mathscr{K} \to \mathscr{K}'$.

(2) Пусть $\mathscr{K}$ — рефлективная подкатегория категории $\mathscr{H}$. Тогда для любой малой категории $\mathscr{D}$ категория $\operatorname{Funct}(\mathscr{D}, \mathscr{K})$ будет рефлективной подкатегорией категории $\operatorname{Funct}(\mathscr{D}, \mathscr{H})$.

(3) Пусть CBool обозначает подкатегорию категории Bool, состоящую из полных булевых алгебр и булевых мономорфизмов. Тогда CBool — рефлективная подкатегория категории Bool. Рефлектором булевой алгебры служит ее порядковое пополнение, см. 2.2.8.

(4) Пусть $\mathrm{AVLat}(\mathbb{R})$ — полная подкатегория категории $\mathrm{VLat}(\mathbb{R})$, состоящая из архимедовых векторных решеток. Тогда $\mathrm{AVLat}(\mathbb{R})$ будет рефлективной подкатегорией категории $\mathrm{VLat}(\mathbb{R})$. Рефлектором векторной решетки X служит фактор-решетка $X/\mathscr{N}$, где $\mathscr{N}$ — порядковый идеал, состоящий из элементов $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $|x| \leqslant ny$ для некоторого $0 \leqslant y \in X$ и для всех $n \in \mathbb{N}$.

(5) Пусть $\mathrm{CVLat}(\mathbb{R})$ — подкатегория категории $\mathrm{AVLat}(\mathbb{R})$, состоящая из порядково полных векторных решеток и порядково непрерывных решеточных гомоморфизмов. Тогда $\mathrm{CVLat}(\mathbb{R})$ будет рефлективной подкатегорией категории $\mathrm{AVLat}(\mathbb{R})$. Рефлектором векторной решетки служит ее дедекиндово пополнение.

(6) Пусть TTop — категория вполне регулярных (тихоновских) хаусдорфовых топологических пространств и непрерывных отображений. Тогда полная подкатегория Comp является рефлективной подкатегорией, причем рефлектор отображает каждое тихоновское пространство в его компактификацию Стоуна — Чеха.

(7) Обозначим символом EDComp полную подкатегорию категории Comp, состоящую из экстремально несвязных компактов. Тогда EDComp является корефлективной подкатегорией, причем корефлектор отображает каждый компакт в его абсолют.

3.4. Топосы

Здесь собраны определения и простейшие свойства топосов — категорий, составляющих социум для различных вариантов теории множеств.

3.4.1. Рассмотрим произвольную категорию $\mathscr{K}$. *Подобъектом* $\mathscr{K}$-объекта d называют любой мономорфизм $f : a \to d$ с концом в d. Введем отношение включения для подобъектов. Возьмем два подобъекта $f : a \to d$ и $g : b \to d$ объекта d. Если существует такой $\mathscr{K}$-морфизм $h : a \to b$, что $f = g \circ h$, то пишут $f \subset g$. Введенное отношение $\subset$, очевидно, рефлексивно и транзитивно, однако оно не антисимметрично. В действительности, если $f \subset g$ и $g \subset f$, то $f = g \circ h$ и $g = f \circ k$ для некоторых $\mathscr{K}$-морфизмов $h : a \to b$ и $k : b \to a$. Более того, h и k взаимно обратны. Следовательно, f и g имеют изоморфные начала. На этом основании подобъекты f и g мы будем называть изоморфными и писать $f \simeq g$.

Итак, отношение $\subset$ является предпорядком на классе всех подобъектов и для образования упорядоченного множества необходима факторизация (см. 1.5.8). Обозначим символом $\mathrm{Sub}(d)$ фактор-класс предупорядоченного класса всех подобъектов объекта d. В дальнейшем, допуская обычную вольность, мы будем отождествлять класс эквивалентности и представитель этого класса. Согласно этому соглашению подобъект — это и мономорфизм, и класс эквивалентности этого мономорфизма, а что подразумевается в точности, видно из контекста.

3.4.2. Пусть $\mathscr{K}$ — категория с конечным объектом $\mathbb{1}$. *Классификатором подобъектов* для $\mathscr{K}$ называют $\mathscr{K}$-объект Ω и $\mathscr{K}$-морфизм $\top : \mathbb{1} \to \Omega$, удовлетворяющие условию: для любого мономорфизма $f : a \to d$ существует и притом единственный $\mathscr{K}$-морфизм $\chi_f : d \to \Omega$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

является декартовым квадратом. Морфизм χ_f называют *характеристическим морфизмом* или *характером* мономорфизма f.

(1) *Любой морфизм, началом которого служит конечный объект, мономорфен. В частности,* $\top : \mathbb{1} \to \Omega$ *— мономорфизм.*

$\lhd$ Следует непосредственно из определений. $\rhd$

(2) *Справедливы следующие равенства*:

$$\chi_\top = 1_\Omega, \quad \chi_{1_\Omega} = \top \circ |_\Omega.$$

◁ Легко видеть, что следующие три диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "1_\Omega"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1} \arrow[d, "\top"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "1_\Omega"] \arrow[d, "|_\Omega"'] & \Omega \arrow[d, "|_\Omega"] \\
\mathbb{1} \arrow[r] & \mathbb{1}
\end{tikzcd}
$$

являются декартовыми квадратами. Первый квадрат дает $1_\Omega = \chi_\top$, а два других в силу леммы о квадратах влекут $\top \circ |_\Omega = \chi_{1_\Omega}$. ▷

(3) *Если существует классификатор подобъектов, то он единствен с точностью до изоморфизма.*

◁ Действительно, если $\top : \mathbb{1} \to \Omega$ и $\top' : \mathbb{1} \to \Omega'$ — классификаторы подобъектов, то $\top$ и $\top'$ мономорфны ввиду (1), и можно построить характер $\chi_{\top'}$ морфизма $\top'$ относительно классификатора $\top$ и характер $\chi'_\top$ морфизма $\top$ относительно классификатора $\top'$. Привлекая лемму о квадратах, несложно усмотреть, что квадрат с вершинами $\mathbb{1}$, $\mathbb{1}$, Ω, Ω и со сторонами $1_\mathbb{1} : \mathbb{1} \to \mathbb{1}$, $\top : \mathbb{1} \to \Omega$, $\chi_{\top'} \circ \chi'_\top : \Omega \to \Omega$ декартов. Однако указанный квадрат декартов и в том случае, если $\chi_{\top'} \circ \chi'_\top$ заменить на 1_Ω, следовательно, $\chi_{\top'} \circ \chi'_\top = 1_\Omega$. Поменяв в этом рассуждении местами $\top$ и $\top'$, получим, что $\chi_{\top'}$ и $\chi'_\top$ взаимно обратны. ▷

3.4.3. Теорема. *В категории с классификатором подобъектов два подобъекта изоморфны в том и только в том случае, если их характеристические морфизмы совпадают. Иными словами, если $f : a \rightarrowtail d$ и $g : b \rightarrowtail d$ — мономорфизмы, то $f \simeq g \leftrightarrow \chi_f = \chi_g$.*

◁ $\leftarrow$: Предположим, что $\chi_f = \chi_g$, и рассмотрим диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, tail, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "|_b"'] & & \\
& a \arrow[r, tail, "f"'] \arrow[d, "|_a"] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
& \mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Внешний квадрат коммутативен (и даже декартов) ввиду равенства $\chi_f = \chi_g$. Но внутренний квадрат декартов по определению χ_f. Следовательно, в силу свойства универсальности существует морфизм k, пропускающий g через f. Значит, $g \subset f$. Меняя местами g и f, получим $f \subset g$. Стало быть, $f \simeq g$.

$\to$: Пусть теперь $f \simeq g$ и внутренний квадрат указанной диаграммы декартов. Тогда существует изоморфизм $k : b \to a$, для которого верхний треугольник коммутативен. Отсюда следует, что внешний квадрат также декартов. Из определения классификатора подобъектов, примененного к g, получаем $\chi_f = \chi_g$. ▷

3.4.4. *В категории $\mathscr{K}$ с классификатором подобъектов классы* $\mathrm{Sub}(d)$ *и* $\mathscr{K}(d, \Omega)$ *биективны. В частности,* $\mathrm{Sub}(d)$ *— множество.*

◁ Отображение χ, сопоставляющее классу эквивалентности мономорфизма $f : a \to d$ характер χ_f, является инъективным вложением $\mathrm{Sub}(d)$ в $\mathscr{K}(d, \Omega)$

согласно теореме 3.4.3. Для обоснования сюръективности возьмем произвольный морфизм $h : d \to \Omega$. Пусть пара морфизмов $f : a \to d$ и $|_a : a \to \mathbb{1}$ служит обратным образом пары $h : d \to \Omega$ и $\top : \mathbb{1} \to \Omega$, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "|_a"'] & d \arrow[d, "h"] \\ \mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

является декартовым квадратом. Иными словами, h есть подъем $\top$ вдоль h. В этом случае f — мономорфизм, так как $\top$ — мономорфизм (3.4.2 (1)), а подъем мономорфизма есть мономорфизм (3.2.7). По определению классификатора подобъектов $h = \chi_f$. $\triangleright$

3.4.5. Категорию называют *элементарным топосом,* если она декартово замкнута и имеет классификатор подобъектов. Вспомнив определение декартово замкнутой категории из 3.3.9, можно дать развернутое определение: элементарный топос — это категория $\mathscr{K}$, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) $\mathscr{K}$ конечно полна,

(2) $\mathscr{K}$ конечно кополна,

(3) $\mathscr{K}$ допускает экспоненцирование,

(4) $\mathscr{K}$ имеет классификатор подобъектов.

В соответствии с 3.2.9 условия (1) и (2) можно заменить соответственно требованиями:

(1′) $\mathscr{K}$ обладает конечным объектом и обратными образами,

(2′) $\mathscr{K}$ имеет начальный объект и амальгамы.

Кроме того, можно показать что условие (2) следует из остальных аксиом топоса.

3.4.6. Рассмотрим примеры топосов.

(1) Категория Set представляет собой топос. Конечные объекты и обратные образы в этой категории описаны соответственно в 3.2.2 и 3.2.5.

Для множеств A и B экспоненциалом служит множество-степень B^A, а морфизмом значения — отображение $\mathrm{ev} : B^A \times A \to B$, действующее по правилу $\mathrm{ev}(f, x) := f(x)$. Действительно, взяв множество C и произвольное отображение $g : C \times A \to B$, определим отображение $\bar{g} : C \to B^A$ по формуле $\bar{g}(c) := g_c$ $(c \in C)$, где $g_c : A \to B$ задано правилом $g_c(a) := g(c, a)$ $(a \in A)$. Тогда для любой пары $(c, a) \in C \times A$ выполнено равенство $\mathrm{ev}(\bar{g}(c), a) = g_c(a) = g(c, a)$, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} C \times A \arrow[r, "\bar{g} \times \mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "g"'] & B^A \times A \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

коммутативна. Легко видеть, что такое отображение $\bar{g}$ единственно.

Классификатором подобъектов является множество $2 = \{0,1\}$ вместе с отображением $\top : 1 \to 2$, $\top(0) = 1$.

(2) *Если $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ — топосы, то произведение категорий $\mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2$ также топос.*

$\lhd$ Пусть при $k := 1,2$ задан топос $\mathscr{E}_k$ с классификатором подобъектов $\mathbb{1}_k \to \Omega_k$. Конечные пределы в произведении $\mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2$ вычисляются отдельно по каждому сомножителю, и поэтому существуют. Экспоненцирование задают формулами

$$(b_1, b_2)^{(a_1,a_2)} := (b_1^{a_1}, b_2^{a_2}), \quad \mathrm{ev} := (\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_2),$$

где ev_k — морфизм значения топоса $\mathscr{E}_k$. Кроме того, пара (Ω_1, Ω_2) является классификатором подобъектов в $\mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2$. $\rhd$

(3) Категория морфизмов $m\,\mathrm{Set}$, построенная по категории множеств и отображений Set, будет топосом. Конечным объектом служит тождественная функция из $\{0\}$ в $\{0\}$.

(4) *Возьмем произвольный топос $\mathscr{E}$ и произвольный $\mathscr{E}$-объект a. Тогда категория $\mathscr{E}^a$ морфизмов в a также будет топосом.*

$\lhd$ Доказательство см. у Р. Голдблатта [40] и П. Фрейда [230]. $\rhd$

Отметим, что конечным объектом в $\mathscr{E}^a$ служит морфизм $1_a : a \to a$. Пусть классификатором подобъектов в $\mathscr{E}$ является объект Ω с морфизмом $\top : \mathbb{1} \to \Omega$. Тогда классификатором подобъектов в $\mathscr{E}^a$ будет $\mathscr{E}^a$-объект $\mathrm{pr}_a : \Omega \times a \to a$ вместе с морфизмом $\langle \top_a, 1_a \rangle$, где $\top_a := \top \circ |_a$, в соответствии с диаграммой

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\langle \top_a, 1_a \rangle"] \arrow[dr, "1_a"'] & \Omega \times a \arrow[d, "\mathrm{pr}_a"] \\ & a \end{tikzcd}$$

(5) Рассмотрим *категорию пучков* $\mathrm{Shv}(Q)$. Пусть Q — топологическое пространство. *Пучком* над Q называют пару (A, ρ), где A — топологическое пространство, а $\rho : A \to Q$ — непрерывное отображение, являющееся локальным гомеоморфизмом. Последнее означает, что для каждой точки $x \in A$ имеется открытая окрестность, которая посредством ρ гомеоморфно отображается на открытое множество в Q. Множества $A_q := \rho^{-1}(q)$ $(q \in Q)$ называют *слоями* пучка (A, ρ). В качестве морфизмов из (A, ρ) в (B, σ) возьмем все непрерывные отображения $h : A \to B$, для которых $\rho = h \circ \sigma$. Отображение h будет локальным гомеоморфизмом и, следовательно, открытым. Как видно, такое отображение h действует в слоях, т. е. $h(A_q) \subset B_q$, где $B_q := \sigma^{-1}(q)$. Вообще, многие категорные понятия для пучков оказываются расслоениями соответствующих понятий для категории Set.

Легко проверить, что классы всех пучков над Q и всех морфизмов между такими пучками вместе с обычной суперпозицией отображений в качестве композиции образуют категорию, обозначаемую $\mathrm{Shv}(Q)$. На самом деле эта категория — топос, называемый *пространственным.*

3.4.7. Теорема. *Категория* $\mathrm{Shv}(Q)$ *является топосом.*

$\lhd$ Ограничимся для экономии места описанием классификатора подобъектов. Все прочие подробности можно найти в книге Р. Голдблатта [40].

Непосредственно из определений видно, что конечным объектом служит пара $\mathbb{1} := (Q, \iota)$, где $\iota := \mathrm{id}_Q : Q \to Q$. Для произвольного объекта (A, ρ) единственным морфизмом $(A, \rho) \to (Q, \iota)$ будет отображение ρ.

Решетка открытых множеств τ представляет собой гейтингову алгебру (см. 2.6.6 (1)). Взяв $q \in Q$, обозначим символом $\tau/\!\sim$ гейтингову алгебру из 2.6.6 (2), т. е. росток открытых множеств в точке q. Пусть $U \mapsto [U]_q$ — каноническое фактор-отображение. Положим $\widehat{Q} := \bigcup_{q\in Q} \Omega_q$, где $Q_q := \{(q, [U]_q) : U \in \tau\}$. Топологию в $\widehat{Q}$ мы определим базой, состоящей из множеств вида $\{(q, [U]_q) : q \in V\}$, где $U, V \in \tau$ и $U \subset V$. Отображение $\pi : \widehat{Q} \to Q$, определяемое формулой $\pi(q, [U]_q) := q$, будет локальным гомеоморфизмом. Следовательно, $\Omega := (\widehat{Q}, \pi)$ — пучок.

По определению произвольный $\mathrm{Shv}(Q)$-морфизм $s : \mathbb{1} \to \Omega$ представляет собой непрерывное отображение $s : Q \to \widehat{Q}$ такое, что $s(q) \in \Omega_q$ (или $\pi(s(q)) = q$) для всех $q \in Q$. Такое отображение s называют *непрерывным сечением* пучка $(\widehat{Q}, \pi)$. Примером непрерывного сечения указанного пучка служит отображение $s_U : q \mapsto (q, [U]_q)$, где $U \subset Q$ — произвольное открытое множество. Значит, $s_U : \mathbb{1} \to \Omega$ для любого $U \in \tau$. При этом для любого непрерывного сечения $s : \mathbb{1} \to \Omega$ будет $s = s_U$, если положить $U := \{q : s(q) = (q, [Q]_q)\}$. Таким образом, множество всех морфизмов из $\mathbb{1}$ в Ω биективно с решеткой τ.

Морфизм $\top : \mathbb{1} \to \Omega$ — такое непрерывное сечение $\top : Q \to \widehat{Q}$, что $\top(q) = (q, [Q]_q)$ для всех $q \in Q$. Возьмем мономорфизм $h : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Тогда $h : X \to Y$ — инъективный локальный гомеоморфизм. Следовательно, мы можем считать, что X — открытое подмножество Y, а h — тождественное вложение. Характеристический морфизм $\chi_h : (Y, \sigma) \to (\widehat{Q}, \iota)$ представляет собой непрерывное отображение $\chi_h : Y \to \widehat{Q}$, определяемое следующим образом. Возьмем окрестность U точки $y \in Y$, в которой σ является гомеоморфизмом. В качестве $\chi_h(y)$ возьмем росток открытого множества $\sigma(X \cap U)$ в точке $\sigma(y)$, т. е. положим $\chi_h(y) := (\sigma(y), [\sigma(X \cap U)]_{\sigma(y)})$. $\rhd$

3.4.8. В произвольной категории изоморфизм является мономорфизмом и эпиморфизмом. Существуют категории, в которых не верно обратное утверждение. Между тем для топоса такое невозможно.

(1) *В каждом топосе произвольный мономорфизм* $f : a \to b$ *является уравнителем* χ_f *и* $\top_b := \top \circ |_b$.

$\lhd$ Так как по определению конечного объекта $|_a = |_b \circ f$, а по определению характера подобъекта декартов квадрат из первой диаграммы

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "|_a"'] & b \arrow[d, "\chi_f"] \arrow[dl, "|_b"'] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, tail, "f"] & & b \arrow[r, shift left, "\chi_f"] \arrow[r, shift right, "\top_b"'] & \Omega \\
& c \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

коммутативен, то $\chi_f \circ f = \top \circ |_a = \top_b \circ f$. Если же для какого-нибудь морфизма

$g : c \to b$ выполняется $\chi_f \circ g = \top_b \circ g$, то, учитывая очевидное равенство $|_c = |_b \circ g$, выводим: $\top \circ |_c = \top \circ |_b \circ g = \top_b \circ g = \chi_f \circ g$. В силу свойства универсальности указанного декартова квадрата существует единственный морфизм $h : c \to a$, для которого $g = h \circ f$, т. е. вторая диаграмма коммутативна. $\rhd$

(2) *В произвольном топосе морфизм является изоморфизмом в том и только в том случае, если он одновременно мономорфен и эпиморфен.*

$\lhd$ В соответствии с (1) эпиморфный мономорфизм будет эпиморфным уравнителем. Но последний всегда является изоморфизмом в силу 3.2.4 (2). $\rhd$

3.4.9. Докажем теперь, что в произвольном топосе каждый морфизм имеет эпи-моно-разложение. Взяв произвольный морфизм $f : a \to b$, построим амальгаму f с f. Пусть эта амальгама определена парой морфизмов $h : b \to c$ и $k : b \to c$ (см. 3.2.8), как показано ниже на первой диаграмме. Пусть $\operatorname{im} f : f(a) \to b$ — уравнитель морфизмов h и k. Так как $h \circ f = k \circ f$, то по определению уравнителя существует единственный морфизм $f^* : a \to f(a)$, для которого вторая диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "h"] \\
b \arrow[r, "k"'] & c
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
f(a) \arrow[r, tail, "\operatorname{im} f"] & b \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & c \\
a \arrow[u, dashed, "f^*"] \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}
$$

коммутативна. Согласно 3.2.4 (1) $\operatorname{im} f$ является мономорфизмом. Можно показать, что f^* — эпиморфизм, см. [40, следствие 3 теоремы 5.2.1].

Таким образом, всякий морфизм в топосе $f : a \to b$ допускает *эпи-моно-разложение*, т. е. представление в виде $f = \operatorname{im} f \circ f^* : a \twoheadrightarrow f(a) \rightarrowtail b$. Свойства единственности эпи-моно-разложения описаны в следующем утверждении.

Теорема. *Если для некоторых эпиморфизма g и мономорфизма h имеет место представление $f = h \circ g : a \twoheadrightarrow c \rightarrowtail b$, то существует единственный изоморфизм $k : f(a) \to c$, для которого диаграмма*

$$
\begin{tikzcd}
& f(a) \arrow[dr, tail, "\operatorname{im} f"] \arrow[dd, dashed, "k"] & \\
a \arrow[ur, two heads, "f^*"] \arrow[dr, two heads, "g"'] & & b \\
& c \arrow[ur, tail, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

коммутативна.

$\lhd$ Доказательство см. у Р. Голдблатта [40, теорема 5.2.2]. $\rhd$

3.4.10. *Если в топосе квадрат*

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & b \arrow[d, "v"] \\
c \arrow[r, "k"'] & d
\end{tikzcd}
$$

декартов, то существует морфизм $h : f(a) \to g(c)$ такой, что в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, two heads, "f^*"] \arrow[d, "u"'] & f(a) \arrow[r, tail, "\operatorname{im} f"] \arrow[d, "h"] & b \arrow[d, tail, "v"] \\
c \arrow[r, two heads, "g^*"'] & g(c) \arrow[r, "\operatorname{im} g"'] & d
\end{tikzcd}$$

правый квадрат также декартов.

$\lhd$ Пусть пара морфизмов $h' : e \to g(c)$ и $\imath : e \to b$ представляет собой обратный образ пары морфизмов $\operatorname{im} g : g(c) \to d$ и $v : b \to d$. Тогда ввиду 3.2.7 $\imath$ — мономорфизм и в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dashed, "f'"'] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[d, "u"'] & e \arrow[r, "\imath"'] \arrow[d, "h'"] & b \arrow[d, "v"] \\
c \arrow[r, two heads, "g^*"'] & g(c) \arrow[r, tail, "\operatorname{im} g"'] & d
\end{tikzcd}$$

правый квадрат будет декартовым. Из свойства универсальности этого квадрата следует существование морфизма f', для которого вся диаграмма коммутативна, поскольку по условию $v \circ f = g \circ u$, т. е. «периметр» диаграммы коммутативен. По лемме о квадратах левый квадрат также декартов, и вновь по 3.2.7 f' — эпиморфизм. Итак, композиция $\imath \circ f'$ — эпи-моно-разложение f. Следовательно, согласно 3.4.9 существует единственный изоморфизм $k : f(a) \to e$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & f(a) \arrow[dr, tail, "\operatorname{im} f"] \arrow[dd, dashed, "k"] & \\
a \arrow[ur, two heads, "f^*"] \arrow[dr, two heads, "f'"'] & & b \\
 & e \arrow[ur, tail, "\imath"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Полагая $h := h' \circ k$, получим требуемый морфизм. $\rhd$

3.4.11. Пусть a — произвольный объект топоса $\mathscr{E}$. *Элементом объекта* a называют любой морфизм $x : \mathbb{1} \to a$. Элемент a называют *непустым*, если он имеет хотя бы один элемент, т. е. существует хотя бы один морфизм $\mathbb{1} \to a$. Объекты, изоморфные начальному объекту $\mathbb{0}$, именуют *нулевыми*, и *ненулевыми* — в противном случае. Если нулевой элемент топоса $\mathscr{E}$ непуст, то топос *вырожден*, т. е. все объекты $\mathscr{E}$ изоморфны между собой. Следовательно, в невырожденном топосе нулевой объект не имеет элементов.

Обратное утверждение неверно. В качестве примера можно привести объект $(\varnothing, \{\varnothing\})$ топоса Set^2. Очевидно, что он не изоморфен начальному объекту $\mathbb{0} := (\varnothing, \varnothing)$ топоса Set^2. Но если существует элемент объекта $(\varnothing, \{\varnothing\})$, т. е.

Set^2-морфизм $(f,g) : \mathbb{1} := (\{\varnothing\},\{\varnothing\}) \to (\varnothing,\{\varnothing\})$, то f — отображение из $\{\varnothing\}$ в $\varnothing$, что невозможно.

Вопрос о непустоте ненулевых объектов топоса связан с *принципом экстенсиональности для топосов,* который можно сформулировать следующим образом: *если морфизмы $f : a \to b$ и $g : a \to b$ не совпадают, то существует элемент $x : \mathbb{1} \to a$ такой, что $f \circ x \neq g \circ x$.* Невырожденный топос, удовлетворяющий этому принципу экстенсиональности, называют *точечным.*

В точечном топосе каждый ненулевой объект непуст.

$\triangleleft$ Для ненулевого объекта a мономорфизмы $0_a : \mathbb{0} \to a$ и $1_a : a \to a$ имеют неизоморфные начала и, следовательно, представляют собой различные подобъекты a. Согласно 3.4.3 характеристические морфизмы χ_{0_a} и χ_{1_a} различны. По принципу экстенсиональности для некоторого $x : \mathbb{1} \to a$ будет $\chi_{0_a} \circ x \neq \chi_{1_a} \circ x$. В частности, x — элемент a. $\triangleright$

3.4.12. Пусть $\perp$ обозначает характеристический морфизм подобъекта $0_{\mathbb{1}} : \mathbb{0} \to \mathbb{1}$. Таким образом, $\perp : \mathbb{1} \to \Omega$ — единственный $\mathscr{E}$-морфизм, для которого квадрат

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{0} \arrow[r, "0_{\mathbb{1}}"] \arrow[d, "0_{\mathbb{1}}"'] & \mathbb{1} \arrow[d, "\perp"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

декартов. Итак, $\perp = \chi_{0_{\mathbb{1}}}$ — характер морфизма $0_{\mathbb{1}} : \mathbb{0} \to \mathbb{1}$.

Для произвольного $\mathscr{E}$-объекта a имеет место равенство: $\chi_{0_a} = \perp \circ |_a$.

$\triangleleft$ Рассмотрим два квадрата:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{0} \arrow[r, "0_a"] \arrow[d, "1_{\mathbb{0}}"'] & a \arrow[d, "|_a"] \\
\mathbb{0} \arrow[r, "0_{\mathbb{1}}"'] & \mathbb{1}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{0} \arrow[r, "0_{\mathbb{1}}"] \arrow[d, "0_{\mathbb{1}}"'] & \mathbb{1} \arrow[d, "\perp"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Второй квадрат декартов по определению морфизма $\perp$. Первый квадрат коммутативен, так как $|_a \circ 0_a = 0_{\mathbb{1}}$ в силу единственности морфизма $0_{\mathbb{1}} : \mathbb{0} \to \mathbb{1}$. Если для некоторых морфизмов $g : c \to \mathbb{0}$ и $h : c \to a$ выполняется $0_{\mathbb{1}} \circ g = |_a \circ h$, то $|_a \circ (0_a \circ g) = |_a \circ h$. Следовательно, $0_a \circ g = h$, так как $|_a$ — мономорфизм. Отсюда видно, что первый квадрат также декартов. Склеим теперь два указанных квадрата по общей стороне $\mathbb{0} \to \mathbb{1}$, нижней для первого квадрата и верхней для второго, и применим лемму о квадратах. Декартовость полученного при этом прямоугольника дает требуемое. $\triangleright$

3.4.13. Невырожденный топос называют *двузначным*, если Ω не содержит других элементов кроме $\top$ и $\perp$, т. е. если любой мономорфизм $\mathbb{1} \to \Omega$ совпадает либо с $\perp$, либо с $\top$.

(1) *Всякий точечный топос двузначен.*

◁ Рассмотрим произвольный элемент $f : \mathbb{1} \to \Omega$. Пусть $g : a \to \mathbb{1}$ — поднятие мономорфизма $\top$ вдоль f, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "|_a"'] & \mathbb{1} \arrow[d, "f"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

является декартовым квадратом. При этом возможны два случая: либо $a \simeq \mathbb{0}$, либо $a \not\simeq \mathbb{0}$. Если $a \simeq \mathbb{0}$, то a — начальный объект и $g = 0_{\mathbb{1}}$, поэтому $f = \chi_g = \chi_{0_{\mathbb{1}}} = \bot$. Если же $a \not\simeq \mathbb{0}$, то в силу точечности рассматриваемого топоса из 3.4.11 выводим существование элемента $x : \mathbb{1} \to a$ у объекта a. Покажем, что тогда g будет эпиморфизмом. В самом деле, если морфизмы $h, k : \mathbb{1} \to b$ таковы, что $h \circ g = k \circ g$, то $h \circ g \circ x = k \circ g \circ x$. Но $g \circ x : \mathbb{1} \to \mathbb{1}$. Значит, ввиду свойств конечного объекта $g \circ x = 1_{\mathbb{1}}$ и поэтому $h = k$. Итак, g — эпиморфизм. Но g также и мономорфизм как поднятие мономорфизма. Согласно 3.4.8 (2) g будет изоморфизмом. Итак, a — конечный объект и $f = \chi_g = \chi_{1_{\mathbb{1}}} = \top$. ▷

В произвольном топосе существуют копроизведения. В частности, существует копроизведение $\mathbb{1} + \mathbb{1}$ и копроизведение морфизмов $[\bot, \top] : \mathbb{1} + \mathbb{1} \to \Omega$. Это обстоятельство демонстрирует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r] \arrow[dr, "\bot"'] & \mathbb{1} + \mathbb{1} \arrow[d, dashed, "{[\bot,\top]}"] & \mathbb{1} \arrow[l] \arrow[dl, "\top"] \\
& \Omega &
\end{tikzcd}$$

Топос называют *классическим*, если морфизм $[\bot, \top]$ является изоморфизмом.

(2) *В произвольном топосе морфизм* $[\bot, \top]$ *мономорфен.*

◁ По определению 3.4.12 морфизмы $\bot$ и $\top$ дизъюнктны, а в силу 3.4.2 (1) они мономорфны. Осталось сослаться на 3.2.7 (2). ▷

(3) *Топос является точечным в том и только в том случае, если он классический и всякий его ненулевой объект непуст.*

◁ Доказательство см. у Р. Голдблатта [40]. ▷

3.5. Логика топоса

В категории множеств правила классической логики можно задать с помощью некоторых операций, использующих множество $2 := \{0, 1\}$. Точнее, если истина и ложь обозначены цифрами 1 и 0 соответственно, то конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и отрицание обычно определяют истинностными таблицами, представляющими собой двуместные и одноместное отображения из 2 в 2. Аналогично можно поступить и в любом топосе, используя вместо множества 2 классифицирующий объект.

3.5.1. Пусть $\mathscr{E}$ — произвольный топос с классификатором подобъектов $\top : \mathbb{1} \to \Omega$. Определим в топосе аналоги истинностных функций: $\urcorner$ — морфизм из Ω в Ω, а $\wedge$, $\vee$ и $\Rightarrow$ — морфизмы из $\Omega \times \Omega$ в Ω. Назовем их *истинностными морфизмами.*

(1) Отрицание вводят формулой $\urcorner := \chi_\perp$, т. е. $\urcorner$ — характер мономорфизма $\perp$. Таким образом, $\urcorner : \Omega \to \Omega$ — единственный $\mathscr{E}$-морфизм, для которого квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "\perp"] \arrow[d, "1_{\mathbb{1}}"'] & \Omega \arrow[d, "\urcorner"] \\ \mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

является декартовым в $\mathscr{E}$. Напомним, что сам морфизм $\perp$ является характером для морфизма $0_{\mathbb{1}} : \mathbb{0} \to \mathbb{1}$.

(2) Пусть $\langle \top, \top \rangle : \mathbb{1} \to \Omega \times \Omega$ — произведение морфизма $\top$ на себя в топосе $\mathscr{E}$. Характер мономорфизма $\langle \top, \top \rangle$ мы обозначим символом $\cap$. Таким образом, $\cap : \Omega \times \Omega \to \Omega$ — тот единственный $\mathscr{E}$-морфизм, для которого квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "{\langle \top, \top \rangle}"] \arrow[d, "1_{\mathbb{1}}"'] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\cap"] \\ \mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

является декартовым в $\mathscr{E}$.

(3) Напомним обозначение $\top_a := \top \circ |_a$. Для двух морфизмов $\top_\Omega : \Omega \to \Omega$ и $1_\Omega : \Omega \to \Omega$ рассмотрим произведение $\langle \top_\Omega, 1_\Omega \rangle : \Omega \to \Omega \times \Omega$. Рассмотрим также произведение с измененным порядком сомножителей: $\langle 1_\Omega, \top_\Omega \rangle : \Omega \to \Omega \times \Omega$. Далее, образуем копроизведение $\phi := [\langle 1_\Omega, \top_\Omega \rangle, \langle \top_\Omega, 1_\Omega \rangle] : \Omega + \Omega \to \Omega \times \Omega$. В топосе существует образ $\operatorname{im} \phi : \phi(\Omega + \Omega) \to \Omega \times \Omega$ морфизма ϕ, который является мономорфизмом. Характер этого мономорфизма мы обозначим символом $\cup$. Значит, $\cup : \Omega \times \Omega \to \Omega$ — единственный морфизм, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} \phi(\Omega + \Omega) \arrow[r, "\operatorname{im} \phi"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\cup"] \\ \mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

является декартовым квадратом в $\mathscr{E}$.

(4) Пусть $e : \circledleq \to \Omega \times \Omega$ служит уравнителем пары морфизмов $\cap : \Omega \times \Omega \to \Omega$ и $\mathrm{pr}_1 : \Omega \times \Omega \to \Omega$, где $\cap$ — истинностный морфизм конъюнкции, а pr_1 — проекция на первый сомножитель произведения $\Omega \times \Omega$, т. е. $\mathrm{pr}_1 \circ \langle f, g \rangle = f$ для любых морфизмов $f, g : c \to \Omega$. Обозначим символом $\Rightarrow$ характер мономорфизма $\circledleq$. Итак, $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \to \Omega$ — единственный $\mathscr{E}$-морфизм, для которого квадрат

$$\begin{tikzcd}
\circledleq \arrow[r, "e"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\Rightarrow"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

является декартовым в $\mathscr{E}$.

3.5.2. Для пары морфизмов $f, g : \mathbb{1} \to \Omega$ определено произведение $\langle f, g \rangle : \mathbb{1} \to \Omega \times \Omega$ относительно канонических проекций произведения $\Omega \times \Omega$. Положим по определению $f \cap g := \cap \circ \langle f, g \rangle$, $f \cup g := \cup \circ \langle f, g \rangle$ и $f \Rightarrow g := \Rightarrow \circ \langle f, g \rangle$.

В произвольном топосе $\mathscr{E}$ морфизмы $\top$ и $\perp$ удовлетворяют следующим условиям:

(1) $\urcorner \circ \top = \perp, \urcorner \circ \perp = \top$;

(2) $\top \cap \top = \top,\ \top \cap \perp = \perp,\ \perp \cap \top = \perp,\ \perp \cap \perp = \perp$;

(3) $\top \cup \top = \top,\ \top \cup \perp = \top,\ \perp \cup \top = \top,\ \perp \cup \perp = \perp$;

(4) $\top \Rightarrow \top = \top,\ \top \Rightarrow \perp = \perp,\ \perp \Rightarrow \top = \top,\ \perp \Rightarrow \perp = \top$.

$\lhd$ Эти утверждения можно вывести из определений 3.5.1. Так, например, свойства $\urcorner \circ \perp = \top$ и $\top \cap \top = \top$ вытекают непосредственно из определений 3.5.1 (1) и 3.5.1 (2). Ниже в 3.6.5 приводится доказательство, основанное на других соображениях. $\rhd$

3.5.3. Используя истинностные морфизмы из 3.5.1, исчисление высказываний можно интерпретировать в произвольном топосе $\mathscr{E}$. *Истинностными значениями* в топосе с классифицирующим объектом Ω называют морфизмы вида $\mathbb{1} \to \Omega$. Тем самым $\mathscr{E}(\mathbb{1}, \Omega)$ — множество всех истинностных значений.

Произвольное отображение v из множества пропозициональных переменных Φ_0 в множество истинностных значений топоса $\mathscr{E}(\mathbb{1}, \Omega)$ называют *$\mathscr{E}$-оценкой*. Такое отображение можно продолжить на множество всех формул Φ по следующим правилам:

(1) $v(\neg\varphi) := \urcorner \circ v(\varphi)$;

(2) $v(\varphi \wedge \psi) := \cap \circ \langle v(\varphi), v(\psi) \rangle$;

(3) $v(\varphi \vee \psi) := \cup \circ \langle v(\varphi), v(\psi) \rangle$;

(4) $v(\varphi \to \psi) := \Rightarrow \circ \langle v(\varphi), v(\psi) \rangle$.

Итак, каждой формуле φ исчисления высказываний ставится в соответствие истинностное значение $v(\varphi) : \mathbb{1} \to \Omega$. Формулу φ называют *$\mathscr{E}$-общезначимой* и пишут $\mathscr{E} \vDash \varphi$, если $v(\varphi) = \top : \mathbb{1} \to \Omega$ для любой $\mathscr{E}$-оценки v.

(5) *Любое $\mathscr{E}$-общезначимое предложение выводимо в классическом исчислении высказываний* CL*:*

$$\mathscr{E} \vDash \varphi \ \to \vdash_{\mathrm{CL}} \varphi.$$

$\lhd$ Возьмем произвольную классическую оценку $v : \Phi_0 \to \{0, 1\}$. Построим $\mathscr{E}$-оценку v', полагая $v'(x) := \top$, если $v(x) := 1$ и $v'(x) = \perp$, если $v(x) = 0$. Нетрудно видеть, что v' принимает только два значения — $\top$ или $\perp$, причем

$v'(\varphi) = \top$ в том и только в том случае, если $v(\varphi) = 1$. В самом деле, это утверждение очевидным образом выполняется, когда φ — переменная; далее, действуя индукцией по длине формулы φ, на шагах индукции для формул $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$ и $\neg\varphi$ получаем требуемое, если оно выполняется для φ и ψ, так как в силу 3.5.2 (1–4) решетки $\{0, 1\}$ и $\{\bot, \top\}$ изоморфны.

Предположим, что $\mathscr{E} \vDash \varphi$ для некоторой пропозициональной формулы φ. Тогда по определению $v'(\varphi) = \top$. Следовательно, по указанной выше причине $v(\varphi) = 1$. Осталось вспомнить теорему о полноте исчисления высказываний (см. у Ю. Л. Ершова и Е. А. Палютина [60]). $\rhd$

Отметим, что утверждение, обратное к (5), вообще говоря, неверно. Тем не менее, имеет место следующий факт.

(6) *Если $\mathscr{E}$ — двузначный топос, то справедлива эквивалентность*

$$\mathscr{E} \vDash \varphi \leftrightarrow \vdash_{\mathrm{CL}} \varphi.$$

$\lhd$ Очевидно, так как для двузначного топоса соответствие $v \mapsto v'$ является биекцией. $\rhd$

3.5.4. Для определения истинностных морфизмов кванторов необходимо ввести еще несколько специальных морфизмов. Как и выше, рассматриваем произвольный топос $\mathscr{E}$ с классификатором подобъектов $\top : \mathbb{1} \to \Omega$. Пусть a — некоторый $\mathscr{E}$-объект.

(1) По определению произведения (см. 3.2.3 (3)) существует произведение морфизмов $\Delta_a := \langle 1_a, 1_a \rangle : a \to a \times a$ относительно проекции p_a, которое однозначно задается равенством $p_a \circ \Delta_a = 1_a$. Нетрудно видеть, что Δ_a — мономорфизм. Характеристику морфизма Δ_a мы обозначим символом δ_a. Таким образом, $\delta_a : a \times a \to \Omega$ — единственный морфизм, для которого квадрат

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\Delta_a"] \arrow[d, "!_a"'] & a \times a \arrow[d, "\delta_a"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

является декартовым в $\mathscr{E}$.

(2) *Объектом-степенью* объекта a называют объект $\mathscr{P}(a)$, если существуют объект $\in_a$ и мономорфизм $\in : \in_a \rightarrowtail \mathscr{P}(a) \times a$ такие, что для произвольного объекта b и подобъекта $r : R \rightarrowtail b \times a$ существует единственный морфизм $f_r : b \to \mathscr{P}(a)$, для которого существует $\mathscr{E}$-морфизм $R \to \in_a$, делающий декартовым следующий квадрат:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "r"] \arrow[d] & b \times a \arrow[d, "f_r \times 1_a"] \\
\in_a \arrow[r, "\in"'] & \mathscr{P}(a) \times a
\end{tikzcd}$$

3.5.5. *Для произвольного $\mathscr{E}$-объекта a объект-степень существует и имеет вид Ω^a.*

$\lhd$ Положим $\mathscr{P}(a) := \Omega^a$. Так как топос допускает экспоненцирование, то существует морфизм значения $\mathrm{ev}_a : \Omega^a \times a \to \Omega$. Пусть теперь $\in : \in_a \rightarrowtail \Omega^a \times a$ — подъем $\perp$ вдоль ev_a, т. е. квадрат

$$\begin{tikzcd}
\in_a \arrow[r, "\in"] \arrow[d, "!_{\in_a}"'] & \Omega^a \times a \arrow[d, "\mathrm{ev}_a"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

является декартовым. Так как $\top : \mathbb{1} \to \Omega$ — мономорфизм, а подъем мономорфизма также мономорфизм, то $\in$ будет подобъектом объекта $\Omega^a \times a$ и при этом $\mathrm{ev}_a = \chi_{\in}$. Возьмем произвольный мономорфизм $r : R \rightarrowtail b \times a$, и пусть $\chi_r : b \times a \to \Omega$ — его характеристика. Пусть $f_r : b \to \Omega^a$ — морфизм, экспоненциально присоединенный к χ_r (см. 3.3.9), т. е. f_r — единственный морфизм, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd}
b \times a \arrow[r, "f_r \times 1_a"] \arrow[dr, "\chi_r"'] & \Omega^a \times a \arrow[d, "\mathrm{ev}_a"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}$$

коммутативна: $\mathrm{ev}_a \circ (f_r \times 1_a = \chi_r)$. Отсюда, учитывая определение классифицирующего объекта, выводим, что в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "r"] \arrow[d, dashed] \arrow[dd, bend right=60, "!_R"'] & b \times a \arrow[d, "f_r \times 1_a"] \\
\in_a \arrow[r, "\in"] \arrow[d] & \Omega^a \times a \arrow[d, "\mathrm{ev}_a"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

квадрат с вершинами $(R, b \times a, \Omega, \mathbb{1})$ декартов. В силу отмеченного выше свойства универсальности нижнего декартова квадрата существует единственный морфизм $R \to \in_a$, для которого вся диаграмма коммутативна. По лемме о квадратах верхний квадрат также декартов, что равносильно требуемому.

Единственность f_r видна из следующих рассуждений. Если в последней диаграмме декартовость верхнего квадрата вместо f_r обеспечивает какой-нибудь морфизм f, то по лемме о квадратах декартовым будет и внешний квадрат с тем же самым f. Тогда по определению классификатора подобъектов имеет место равенство $\mathrm{ev}_a \circ (f \times 1_a) = \chi_r$, откуда ввиду единственности экспоненциально присоединенного к χ_r морфизма получаем $f = f_r$. $\rhd$

3.5.6. Введем истинностные морфизмы кванторов.

(1) Итак, для произвольного $\mathscr{E}$-объекта a имеется подобъект $\in : \in_a \rightarrowtail \Omega^a \times a$ объекта $\Omega^a \times a$ с характером $\mathrm{ev}_a : \Omega^a \times a \to \Omega$. Пусть $p_a : \Omega^a \times a \to \Omega^a$ — первая проекция, т. е. для любых морфизмов $f : c \to \Omega^a$ и $g : c \to a$ будет $p_a \circ \langle f, g \rangle = f$. Построим эпи-моно-разложение морфизма $p_a \circ \in$, т. е. представление $\mathrm{im}(p_a \circ \in) \circ (p_a \circ \in)^* : \in_a \twoheadrightarrow \in(\in_a) \rightarrowtail \Omega^a$. Обозначим теперь символом $\exists_a : \Omega^a \to \Omega$ характер мономорфизма $\mathrm{im}(p_a \circ \in)$. Тогда мы имеем диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
\in_a \arrow[r, tail, "\in"] \arrow[d, "(p_a \circ \in)^*"'] & \Omega^a \times a \arrow[d, "p_a"] \\
\in(\in_a) \arrow[r, tail, "\mathrm{im}(p_a \circ \in)"] \arrow[d, "|_{\in(\in_a)}"'] & \Omega^a \arrow[d, "\exists_a"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

в которой верхний квадрат — эпи-моно-разложение, а нижний квадрат декартов.

(2) Пусть $\mathrm{pr}_a : \mathbb{1} \times a \to a$ — вторая проекция произведения $\mathbb{1} \times a$. Рассмотрим композицию $\tau := \top_a \circ \mathrm{pr}_a = \top \circ |_a \circ \mathrm{pr}_a : \mathbb{1} \times a \to \Omega$. Обозначим символом $\widehat{\tau}$ морфизм, экспоненциально присоединенный к τ, т. е. $\widehat{\tau} : \mathbb{1} \to \Omega^a$ — единственный морфизм, для которого $\mathrm{ev} \circ (\widehat{\tau} \times 1_a) = \tau$. Существует единственный морфизм $\forall_a : \Omega^a \to \Omega$, для которого диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "\widehat{\tau}"] \arrow[d, "1_{\mathbb{1}}"'] & \Omega^a \arrow[d, "\forall_a"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

является декартовым квадратом.

3.5.7. Используя введенные в 3.5.1 и 3.5.6 истинностные морфизмы, теперь мы в состоянии развить исчисление предикатов в произвольном топосе $\mathscr{E}$. На этом пути возникают определенные технические трудности, преодоление которых не входит в круг наших намерений. Мы ограничимся здесь простым упоминанием нескольких результатов в указанном направлении. Подробности и доказательства можно найти у Р. Голдблатта [40].

Рассмотрим интуиционистское исчисление предикатов (см. 1.1.10). Понятие $\mathscr{E}$-модели мы поясним на примере простой сигнатуры σ, содержащей один 2-арный предикатный символ R и один символ константы c. Скажем, что тройка (a, r, f_c) служит $\mathscr{E}$-моделью сигнатуры σ, если выполнены условия:

(a) a — непустой $\mathscr{E}$-объект, т. е. $\mathscr{E}(\mathbb{1}, a) \neq \varnothing$;

(b) $r : a \times a \to \Omega$ — произвольный $\mathscr{E}$-морфизм;

(c) $f_c : \mathbb{1} \to a$ — некоторый элемент объекта a.

Возьмем формулу φ сигнатуры σ. Натуральное число m называют *подходящим* для формулы φ, если все переменные этой формулы, как свободные, так и связанные, содержатся в списке $\{v_1, \dots, v_m\}$. Список может содержать и другие переменные, не входящие в φ. Стало быть, если $k \geqslant m$, то $k \in \mathbb{N}$ также является подходящим для φ. Индукцией по длине формулы φ можно определить $\mathscr{E}$-морфизм $[\![\varphi]\!]^m : a^m \to \Omega$ для любого подходящего числа m.

Начнем с термов. Из 3.2.3 видно что m-кратное произведение $a^m := a \times \ldots \times a$ объекта a на себя определяет набор m проекций $\mathrm{pr}_l^m : a^m \to a$ со следующим свойством универсальности: для любых морфизмов $f_1, \dots, f_m : c \to a$ существует и притом единственный морфизм $\langle f_1, \dots, f_m \rangle : c \to a^m$ такой, что $f_l = \mathrm{pr}_l^m \circ \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ $(l := 1, \dots, m)$. В силу этого свойства для любого $1 \leqslant l \leqslant m$ существует морфизм $\tau_l^{m+1} : a^{m+1} \to a^m$, для которого $\mathrm{pr}_k^{m+1} = \mathrm{pr}_k^m \circ \tau_l^{m+1}$ при $l \neq k \leqslant m$ и $\mathrm{pr}_{m+1}^{m+1} = \mathrm{pr}_l^m \circ \tau_l^{m+1}$.

Если t — терм, то либо $t = v_l$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, либо $t = c$. В первом случае положим $\rho_t^m := \mathrm{pr}_l^m : a^m \to a$, во втором случае — $\rho_t^m := f_c \circ |_{a^m}$. Если определен морфизм $[\![\varphi]\!]^m : a^m \to \Omega$, то символом $|\varphi|_l^m : a^m \to \Omega^a$ мы обозначим морфизм, экспоненциально присоединенный к композиции $[\![\varphi]\!]^m \circ \tau_l^{m+1}$. Теперь индуктивное определение морфизма $[\![\varphi]\!]^m : a^m \to \Omega$ содержится в следующих восьми формулах:

(1) $[\![t = u]\!]^m := \delta_a \circ \langle \rho_t^m, \rho_u^m \rangle$;

(2) $[\![tRu]\!]^m := r \circ \langle \rho_t^m, \rho_u^m \rangle$;

(3) $[\![\neg\varphi]\!]^m := \urcorner \circ [\![\varphi]\!]^m$;

(4) $[\![\varphi \wedge \psi]\!]^m := [\![\varphi]\!]^m \cap [\![\psi]\!]^m$;

(5) $[\![\varphi \vee \psi]\!]^m := [\![\varphi]\!]^m \cup [\![\psi]\!]^m$;

(6) $[\![\varphi \to \psi]\!]^m := [\![\varphi]\!]^m \Rightarrow [\![\psi]\!]^m$;

(7) $[\![(\forall\, x_l)\varphi]\!]^m := \forall_a \circ |\varphi|_l^m$;

(8) $[\![(\exists\, x_l)\varphi]\!]^m := \exists_a \circ |\varphi|_l^m$.

Пусть формула $\varphi := \varphi(v_{l_1}, \dots, v_{l_n})$ имеет ровно n свободных переменных. Выберем подходящее для φ число m. Возьмем произвольный морфизм $g : a^n \to a$. Обозначим символом $f : a^n \to a^m$ произведение $\langle p_1, \dots, p_m \rangle$, где $p_\jmath := \mathrm{pr}_k^n$ при $\jmath = l_k$ для некоторого $1 \leqslant k \leqslant n$ и $p_\jmath = g$ — в противном случае. Положим $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}} := [\![\varphi]\!]^m \circ f$, где $\mathfrak{A} := (a, r, f_c)$. Морфизм $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}}$ не зависит от выбора m и g. Говорят, что φ истинна в $\mathscr{E}$-модели $\mathfrak{A}$, если $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}} = \top_{a^n} = \top \circ |_{a^n}$. Наконец, формулу φ (сигнатуры σ) называют *$\mathscr{E}$-общезначимой*, если φ истинна в любой $\mathscr{E}$-модели (сигнатуры σ).

Теорема. *Формула φ является $\mathscr{E}$-общезначимой в каждом топосе $\mathscr{E}$ в том и только в том случае, если φ выводима в интуиционистском исчислении предикатов.*

$\triangleleft$ Доказательство см. у Р. Голдблатта [40]. $\triangleright$

3.5.8. Пусть $\mathscr{E}$ — произвольный топос, а d — его объект. Определим операции дополнения, пересечения и объединения на множестве $\mathrm{Sub}(d)$ всех подобъектов объекта d.

(1) Рассмотрим мономорфизм $f : a \rightarrowtail d$. *Дополнением подобъекта* f относительно d называют подобъект $-f : -a \rightarrowtail d$, характеристический морфизм которого равен $\urcorner \circ \chi_f$, т. е. $\chi_{-f} = \urcorner \circ \chi_f$ (см. 3.5.1 (1)). Значит, $-f$ будет обратным образом морфизма $\top$ относительно $\rceil\circ\chi_f$ в соответствии с декартовым квадратом

$$\begin{tikzcd}
-a \arrow[r, "-f"] \arrow[d, "|_{-a}"'] & d \arrow[d, "\rceil\circ\chi_f"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

(2) *Пересечением подобъектов* $f : a \rightarrowtail d$ и $g : b \rightarrowtail d$ называют подобъект $f \cap g : a \cap b \rightarrowtail d$, получаемый подъемом $\top$ вдоль $\chi_f \cap \chi_g := \cap \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$ (см. 3.5.1 (2)). Значит, $\chi_{f\cap g} = \cap \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$ в соответствии с декартовым квадратом

$$\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, "f\cap g"] \arrow[d, "|_{a\cap b}"'] & d \arrow[d, "\chi_f \cap \chi_g"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

(3) *Объединением подобъектов* $f : a \rightarrowtail d$ и $g : b \rightarrowtail d$ называют подобъект $f \cup g : a \cup b \rightarrowtail d$, получаемый подъемом $\top$ вдоль $\chi_f \cup \chi_g := \cup \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$, см 3.5.1 (3). Значит, $\chi_{f\cup g} = \cup \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$ в соответствии с декартовым квадратом

$$\begin{tikzcd}
a \cup b \arrow[r, "f\cup g"] \arrow[d, "|_{a\cup b}"'] & d \arrow[d, "\chi_f \cup \chi_g"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

(4) Введем попутно еще одну операцию $\Rrightarrow$ над подобъектами, используя импликацию $\Rightarrow$ из 3.5.1 (4). Для подобъектов $f : a \rightarrowtail d$ и $g : b \rightarrowtail d$ символом $f \Rrightarrow g : (a \Rrightarrow b) \rightarrowtail d$ мы обозначим подобъект, получаемый подъемом $\top$ вдоль $\chi_f \Rightarrow \chi_g := \Rightarrow \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$. Значит, $\chi_{f \Rrightarrow b} = \Rightarrow \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$ в соответствии с декартовым квадратом

$$\begin{tikzcd}
a \Rrightarrow b \arrow[r, "f\Rrightarrow g"] \arrow[d, "|_{a\Rrightarrow b}"'] & d \arrow[d, "\chi_f \Rightarrow \chi_g"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Введенные понятия пересечения и объединения подобъектов обладают важным свойством универсальности, описанным в следующих двух теоремах.

3.5.9. Теорема. *Для любых $\mathscr{E}$-мономорфизмов $f : a \rightarrowtail d$ и $g : b \rightarrowtail d$ в $\mathscr{E}$ существует декартов квадрат*

$$\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, tail, "g'"'] & b \arrow[d, tail, "g"] \\
a \arrow[r, tail, "f"'] & d
\end{tikzcd}$$

причем для морфизма $h : g \circ f' = f \circ g'$ *выполнено* $\chi_h = \chi_{f \cap g}$ *или, что то же самое,* $h \simeq f \cap g$.

◁ Доказательство можно провести по следующей схеме. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, "h"] \arrow[d, "|_{a\cap b}"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\langle \top, \top \rangle"] \arrow[d, "1_{\mathbb{1}}"'] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\cap"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Сначала отметим, что верхний квадрат декартов. Нижний квадрат декартов по определению $\cap$. По лемме о квадратах внешний квадрат будет также декартовым. Значит, в силу определения классифицирующего объекта будет $\chi_h = \cap \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$. ▷

3.5.10. Теорема. *Пусть* $f : a \rightarrowtail d$ *и* $g : b \rightarrowtail d$ *— некоторые* $\mathscr{E}$*-мономорфизмы, а* $[f, g] : a + b \to d$ *— их копроизведение. Положим* $h := \mathrm{im}[f, g]$. *Тогда* $\chi_h = \chi_{f \cup g}$ *и* $h \simeq f \cup g$. *Следовательно, эпи-моно-разложение морфизма* $[f, g]$ *имеет вид:*

$$\begin{tikzcd}
a + b \arrow[rr, "{[f,g]}"] \arrow[dr, "{[f,g]^*}"'] & & d \\
& a \cup b \arrow[ur, "f \cup g"'] &
\end{tikzcd}$$

◁ Сначала заметим, что два малых квадрата из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\chi_g \circ f"'] & d \arrow[d, "(\chi_f, \chi_g)"] & b \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "\chi_f \circ g"] \\
\Omega & \Omega \times \Omega \arrow[l, "\langle \top_\Omega, 1_\Omega \rangle"] \arrow[r, "\langle 1_\Omega, \top_\Omega \rangle"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

декартовы. Так как копроизведения сохраняют обратные образы, то декартовым будет также и квадрат

$$\begin{tikzcd}
a+b \arrow[r, "{[f,g]}"] \arrow[d, "\chi_g\circ f+\chi_f\circ g"'] & d \arrow[d, "{\langle\chi_f,\chi_g\rangle}"] \\
\Omega+\Omega \arrow[r, "k"'] & \Omega\times\Omega
\end{tikzcd}$$

где $k := [\langle\top_\Omega, 1_\Omega\rangle, \langle 1_\Omega, \top_\Omega\rangle]$. Теперь воспользуемся предложением 3.4.10 и возьмем морфизм $j : [f,g](a+b) \to k(\Omega+\Omega)$, для которого квадрат

$$\begin{tikzcd}
{[f,g](a+b)} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "j"'] & d \arrow[d, "{\langle\chi_f,\chi_g\rangle}"] \\
k(\Omega+\Omega) \arrow[r, "\operatorname{im} k"'] & \Omega\times\Omega
\end{tikzcd}$$

является декартовым. Из определения 3.5.1 (3) видно, что морфизм $\cup : \Omega\times\Omega \to \Omega$ является характером для подобъекта $\operatorname{im} k$. Стало быть, квадрат

$$\begin{tikzcd}
k(\Omega+\Omega) \arrow[r, "\operatorname{im} k"] \arrow[d, "1_{k(\Omega+\Omega)}"'] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cup"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

также декартов. Последние две диаграммы в силу леммы о квадратах дают $\chi_h = \cup\circ\langle\chi_f, \chi_g\rangle$. $\triangleright$

3.6. Булевы топосы

В предыдущем параграфе мы выяснили, что в топосе естественным образом возникает внутреннее логическое исчисление, основанное на принципах интуиционистской логики. От этого обстоятельства существенно зависит, в частности, строение упорядоченного множества подобъектов, наделенного операциями, введенными в конце предыдущего параграфа.

3.6.1. Теорема. *Упорядоченное множество* $(\mathrm{Sub}(d), \subset)$ *является решеткой с нулем* 0_d *и единицей* 1_d*, в которой точные границы совпадают с пересечением и объединением подобъектов, определенными в* 3.5.8.

$\triangleleft$ (1): Для произвольного мономорфизма $f : a \rightarrowtail d$ следующие диаграммы коммутативны (первая из них означает, что $0_d \subset f$, а вторая — $f \subset 1_d$):

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dr, "f"] & \\
\mathbb{0} \arrow[ur, "0_a"] \arrow[rr, "0_d"'] & & d
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f"] & \\
d \arrow[rr, "1_d"'] & & d
\end{tikzcd}$$

(2): Возьмем два подобъекта $f : a \rightarrowtail d$ и $g : b \rightarrowtail d$. По теореме 3.5.9 $f \cap g$ — обратный образ морфизмов f и g. Это означает, что существует декартов квадрат

$$\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & d \arrow[d, "g"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "f"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Отсюда видно, что $f \cap g \subset f$ и $f \cap g \subset g$, так как $f \cap g \simeq g \circ f'$ и $f \cap g \simeq f \circ g'$ согласно 3.5.9. Если $h \subset f$ и $h \subset g$ для некоторого мономорфизма $h : c \rightarrowtail d$, то по определению порядка в $\mathrm{Sub}(d)$ найдутся мономорфизмы $\jmath : c \to a$ и $k : c \to b$, для которых $h = g \circ k = f \circ \jmath$. Но в силу свойства универсальности указанного декартова квадрата можно подобрать морфизм $h' : c \to a \cap b$ так, что $\jmath = g' \circ h'$ и $k = f' \circ h'$. Тем самым $h = f \circ \jmath = f \circ g' \circ h' \simeq (f \cap g) \circ h'$ и, стало быть, $h \subset f \cap g$.

(3): Из 3.5.10 и определения копроизведения морфизмов следует коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\imath_a"] \arrow[d, tail, "f"'] & a + b \arrow[d, two heads, "{[f,g]^*}"] & b \arrow[l, "\imath_b"'] \arrow[d, tail, "g"] \\
d & a \cup b \arrow[l, "f \cup g"'] \arrow[r, "f \cup g"] & d
\end{tikzcd}$$

Тем самым f и g пропускаются через $f \cup g$, т. е. $f = h_f \circ (f \cup g)$ и $g = h_g \circ (f \cup g)$, где $h_f \colon [f,g]^* \circ \imath_a$ и $h_g := [f,g]^* \circ \imath_b$. Поэтому $f \subset f \cup g$ и $g \subset f \cup g$. Допустим, что $f \subset h$ и $g \subset h$ для некоторого подобъекта $h : c \rightarrowtail d$. Тогда по определению f и g пропускаются через h, т. е. существуют h_a и h_b, для которых диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& d & \\
a \arrow[ur, tail, "f"] \arrow[r, "h_a"'] & c \arrow[u, tail, "h"] & b \arrow[ul, tail, "g"'] \arrow[l, "h_b"]
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Отсюда, используя свойства копроизведения морфизмов, выводим: $[f,g] = [h \circ h_a, h \circ h_b] = h \circ [h_a, h_b]$. Если $k := \mathrm{im}[h_a, h_b]$ и $\jmath := [h_a, h_b]^*$, то имеет место эпи-моно-разложение $[h_a, h_b] = k \circ \jmath$. Таким образом, мы получаем представление $[f,g] = (h \circ k) \circ \jmath$, которое является эпи-моно-разложением, ибо $\jmath$ — эпиморфизм, а $h \circ k$ — мономорфизм. В силу единственности с точностью до изоморфизма эпи-моно-разложения существует изоморфизм $\imath : a \cup b \to [h_a, h_b](a+b)$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
a + b \arrow[r, "{[f,g]^*}"] \arrow[d, "\jmath"'] & a \cup b \arrow[dl, "\imath"'] \arrow[d, "f \cup g"] \\
{[h_a, h_b](a,b)} \arrow[r, "h \circ k"'] & d
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Итак, $f \cup g = h \circ (k \circ \imath)$ и, стало быть, $f \cup g$ пропускается через h посредством $k \circ \imath$. Поэтому $f \cup g \subset h$. $\rhd$

3.6.2. *Пусть $\mathscr{E}$ — топос, d — произвольный $\mathscr{E}$-объект и $f : a \rightarrowtail d$, $g : b \rightarrowtail d$, $h : c \rightarrowtail d$ — некоторые подобъекты объекта d. Справедливы следующие эквивалентности:*

(1) $f \cap h \simeq g \cap h \leftrightarrow \chi_f \circ h = \chi_g \circ h$;

(2) $\chi_f \cap \chi_h = \chi_g \cap \chi_h \leftrightarrow \chi_f \circ h = \chi_g \circ h$;

(3) $f \cap h \subset g \leftrightarrow \chi_{f\cap g} \circ h = \chi_f \circ h$.

$\lhd$ (1): Рассмотрим следующие две диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
a \cap c \arrow[r, tail, "h_1"] \arrow[d] \arrow[dr, "f \cap h"] & c \arrow[d, "h"] \\
a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
b \cap c \arrow[r, tail, "h_2"] \arrow[d] \arrow[dr, "g \cap h"] & c \arrow[d, "h"] \\
b \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_g"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Верхние квадраты в этих диаграммах декартовы по теореме 3.5.9, а нижние квадраты — по определению классификатора подобъектов 3.4.2. Привлекая лемму о квадратах и определение классификатора подобъектов, выводим: $\chi_f \circ h = \chi_{h_1}$ и $\chi_g \circ g = \chi_{h_2}$. Значит, равенство $\chi_f \circ h = \chi_g \circ h$ равносильно соотношению $h_1 \simeq h_2$. Последнее выполнено тогда и только тогда, когда $h_1 \circ k = h_2$ для некоторого изоморфизма $k : b \cap c \to a \cap c$. Но в силу равенств $f \cap h = h \circ h_1$ и $g \cap h = h \circ h_2$ изоморфизм k обеспечивает соотношения $h_1 \circ k = h_2$ и $(f \cap h) \circ k = g \cap h$ одновременно. Значит, соотношения $h_1 \simeq h_2$ и $f \cap h \simeq g \cap h$ также равносильны.

(2): Следует из (1) и из определения 3.5.8 (2).

(3): В произвольной решетке равносильны соотношения $f \cap h \subset g$ и $(f \cap g) \cap h = f \cap h$. Осталось применить (1). $\rhd$

3.6.3. Теорема. *Для любых подобъектов f, g и h из* $\mathrm{Sub}(d)$ *справедливы следующие утверждения*:

(1) *$h \subset f \Rrightarrow g$ в том и только в том случае, если $f \cap h \subset g$;*

(2) *$f \subset g$ в том и только в том случае, если $f \Rrightarrow g \simeq 1_d$;*

(3) *$f \subset g$ в том и только в том случае, если $\chi_f \Rightarrow \chi_g = \top_d$.*

$\lhd$ (1): Рассмотрим диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
a \Rrightarrow b \arrow[r, tail, "f \Rrightarrow g"] \arrow[d, dashed, "\jmath"'] \arrow[dd, bend right=60, "|_{a \Rrightarrow b}"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
\leqslant \arrow[r, tail, "e"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\Rightarrow"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

«Граница» этой диаграммы коммутативна в силу определения объекта $f \Rrightarrow g$. Нижний квадрат декартов по определению импликации $\Rightarrow$. Следовательно, существует морфизм $\jmath$, для которого вся диаграмма будет коммутативной. Вновь привлекая определение объекта $f \Rrightarrow g$, видим декартовость прямоугольника. По лемме о квадратах верхний квадрат также будет декартовым. Дальнейшие рассуждения видны из следующей диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, dashed, "k"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
a \Rrightarrow b \arrow[rr, "f \Rrightarrow g"] \arrow[d, "\jmath"'] & & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] & \\
\textcircled{$\leqslant$} \arrow[rr, "e"] & & \Omega \times \Omega \arrow[r, shift left, "\cap"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_1"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Справедливость включения $h \subset f \Rrightarrow g$ означает по определению существование морфизма $k : c \to a \Rrightarrow b$, для которого верхний треугольник коммутативен. Так как квадрат этой диаграммы декартов, то существование такого морфизма k равносильно тому, что $e \circ u = \langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ h$ для некоторого морфизма $u : c \to \textcircled{$\leqslant$}$. Ввиду свойства универсальности уравнителя e последнее равносильно, в свою очередь, равенству $\mathrm{pr}_1 \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ h = \cap \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ h$ или, что то же, $\chi_f \circ h = \chi_{f \cap g} \circ h$. Согласно 3.6.2 (3) полученное равенство выполнено в том и только в том случае, если $f \cap h \subset g$.

(2): Если $f \subset g$, то $f \cap h \subset f \subset g$ для любого $h \in \mathrm{Sub}(d)$. (Это утверждение выполняется в любой решетке.) Но тогда в силу доказанного в (1) $h \subset f \Rrightarrow g$ для произвольного $h \in \mathrm{Sub}(d)$. Следовательно, $f \Rrightarrow g$ — единица решетки $\mathrm{Sub}(d)$, т. е. $f \Rrightarrow g \simeq 1_d$.

(3): Это вытекает из (2) и определения операции $\Rrightarrow$, поскольку $\chi_{1_d} = \top_d$ (см. 3.4.2 (2)). $\triangleright$

3.6.4. Теорема. *Для произвольного мономорфизма $f : a \rightarrowtail d$ имеет место соотношение $-f = f \Rrightarrow 0_d$. В частности, $f \cap -f \simeq 0_d$.*

$\triangleleft$ Согласно теореме 3.6.3 (1) достаточно установить равносильность соотношений $f \cap h \subset 0_d$ и $h \subset -f$ для произвольного мономорфизма $h : b \rightarrowtail d$.

Пусть $f \cap h \subset 0_d$ или, что то же самое, $f \cap h \simeq 0_d$. Тогда в соответствии с 3.6.2 (3) будет $\chi_f \circ h = \chi_{f \cap 0_b} \circ h = \chi_{0_b} \circ h$. Учитывая равенства $\chi_{0_d} = \perp \circ |_d$ (3.4.12) и $\urcorner \circ \perp = \top$ (3.5.2 (1)), получим $\urcorner \circ \chi_f \circ h = \top \circ |_d \circ h$. Отсюда видно, что диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, "h"] \arrow[ddr, "|_d \circ h"'] & & \\
 & -a \arrow[r, "-f"'] \arrow[d, "|_{-a}"] & d \arrow[d, "\urcorner \circ \chi_f"] \\
 & \mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

коммутативна. Так как внутренний квадрат декартов по определению $-f$ (см. 3.5.8 (1)), то существует единственный морфизм $k : b \to -a$, для которого $h = (-f) \circ k$ и $|_{-a} \circ k = |_d \circ h$. Отсюда согласно определению 3.4.1 вытекает $h \subset -f$.

3.6.5. Теорема. *Для произвольного объекта d топоса упорядоченное множество* $(\mathrm{Sub}(d), \subset)$ *представляет собой гейтингову алгебру.*

$\lhd$ В самом деле, теорема 3.6.1 утверждает, что $\mathrm{Sub}(d)$ — решетка с нулем и единицей, а по теореме 3.6.3 в ней существуют относительные псевдодополнения. $\rhd$

Теперь мы в состоянии дать доказательство предложения 3.5.2.

$\lhd$ Рассмотрим гейтингову алгебру $\mathrm{Sub}(\mathbb{1})$. Нулем и единицей в этой алгебре будут морфизмы $\mathbf{1} := 1_{\mathbb{1}}$ и $\mathbf{0} := 0_{\mathbb{1}}$ соответственно. Значит, $\top = \chi_{\mathbf{1}}$ и $\bot = \chi_{\mathbf{0}}$. Следовательно, отображение $f \mapsto \chi_f$ осуществляет изоморфизм решеток $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ и $\{\bot, \top\}$. Осталось заметить, что в $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ решеточные операции и относительное дополнение устроены в соответствии с 3.5.2. Так, например, для $\cup$ получаем:

$$\begin{gathered}
\top \cup \top = \chi_{\mathbf{1}} \cup \chi_{\mathbf{1}} = \chi_{\mathbf{1} \cup \mathbf{1}} = \chi_{\mathbf{1}} = \top, \\
\top \cup \bot = \bot \cup \top = \chi_{\mathbf{1}} \cup \chi_{\mathbf{0}} = \chi_{\mathbf{1} \cup \mathbf{0}} = \chi_{\mathbf{0}} = \bot, \\
\bot \cup \bot = \chi_{\mathbf{0}} \cup \chi_{\mathbf{0}} = \chi_{\mathbf{0} \cup \mathbf{0}} = \chi_{\mathbf{0}} = \bot.
\end{gathered}$$

В силу 3.6.3 (3) будет $\mathbf{1} \Rrightarrow \mathbf{1} \simeq \mathbf{0} \Rrightarrow \mathbf{1} \simeq \mathbf{0} \Rrightarrow \mathbf{0} \simeq \mathbf{1}$. Кроме того, $\mathbf{1} \Rrightarrow \mathbf{0} \subset \mathbf{1} \Rrightarrow \mathbf{0}$ и поэтому по 3.6.3 (1) $\mathbf{1} \cap (\mathbf{1} \Rrightarrow \mathbf{0}) \subset \mathbf{0}$. Следовательно, $\mathbf{1} \Rrightarrow \mathbf{0} \simeq \mathbf{0}$. Отсюда, как и выше, выводим:

$$\begin{gathered}
\top \Rightarrow \top = \chi_{\mathbf{1}} \Rightarrow \chi_{\mathbf{1}} = \chi_{\mathbf{1} \Rrightarrow \mathbf{1}} = \chi_{\mathbf{1}} = \top, \\
\bot \Rightarrow \top = \chi_{\mathbf{0}} \Rightarrow \chi_{\mathbf{1}} = \chi_{\mathbf{0} \Rrightarrow \mathbf{1}} = \chi_{\mathbf{1}} = \top, \\
\bot \Rightarrow \bot = \chi_{\mathbf{0}} \Rightarrow \chi_{\mathbf{0}} = \chi_{\mathbf{0} \Rrightarrow \mathbf{0}} = \chi_{\mathbf{1}} = \top, \\
\top \Rightarrow \bot = \chi_{\mathbf{1}} \Rightarrow \chi_{\mathbf{0}} = \chi_{\mathbf{1} \Rrightarrow \mathbf{0}} = \chi_{\mathbf{0}} = \bot. \rhd
\end{gathered}$$

3.6.6. Теорема 3.6.5 утверждает, что алгебра подобъектов в произвольном топосе представляет собой гейтингову алгебру, которая не является, вообще говоря, булевой алгеброй. Следовательно, логика топоса может не выражать аристотелевы принципы. Выделим класс топосов, интерпретирующих классическую логику.

Топос $\mathscr{E}$ называют *булевым,* если для каждого $\mathscr{E}$-объекта d решетка $\mathrm{Sub}(d)$ является булевой алгеброй. Мы уже знаем, что $\mathrm{Sub}(d)$ — гейтингова алгебра, которая будет булевой алгеброй в том и только в том случае, когда в ней каждый элемент имеет дополнение. Следовательно, $\mathscr{E}$ будет булевым топосом, если и только если для любого $\mathscr{E}$-объекта d и любого его подобъекта $f \in \mathrm{Sub}(d)$ выполняется $f \cup -f \simeq 1_d$.

Для характеризации булевых топосов необходимы некоторые вспомогательные утверждения, которые приведены ниже в 3.6.7–3.6.9.

3.6.7. (1) *Мономорфизмы $\bot$ и $-\top$ определяют один и тот же элемент решетки* $\mathrm{Sub}(\Omega)$.

$\lhd$ Привлекая определения классификатора подобъектов, морфизма $\urcorner$ и подобъекта $-f$ при $f := \top$ (см. 3.4.2 (2), 3.5.1 (1) и 3.5.8 (1)) можно написать цепочку равенств:

$$\chi_{\bot} = \urcorner = \urcorner \circ 1_{\Omega} = \urcorner \circ \chi_{\top} = \chi_{-\top}. \rhd$$

(2) *Если морфизм* $\top : \mathbb{1} \to \Omega$ *имеет дополнение в решетке* $\mathrm{Sub}(\Omega)$, *то оно совпадает с* $\perp : \mathbb{1} \to \Omega$.

$\lhd$ Предположим, что мономорфизм $h : a \to \Omega$ является дополнением $\top : \mathbb{1} \to \Omega$ в решетке $\mathrm{Sub}(\Omega)$. Тогда $\top \cap h \simeq 0_\Omega$ и по теореме 3.5.9 имеется декартов квадрат

$$\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, "0_a"] \arrow[d, "0_{\mathbb{1}}"'] & a \arrow[d, "h"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Отсюда по определению классификатора подобъектов мы получаем $h = \chi_{0_a} = \perp \circ |_a$. Последнее по определению подобъекта влечет $h \subset \perp$. По условию $\top \cup h \simeq 1_\Omega$ и, используя общие свойства решеток, выводим $\top \cup h \subset \top \cup \perp$. Значит, $\top \cup \perp \simeq 1_\Omega$. Осталось заметить, что в силу 3.6.4 и (1) $\top \cap \perp = \top \cap -\top \simeq 0_\Omega$. Таким образом, $\perp$ — дополнение $\top$, а поскольку дополнение в дистрибутивной решетке единственно, то $h \simeq \perp$. $\rhd$

3.6.8. *Пусть* $\mathscr{E}$ *— произвольный топос с начальным объектом* $\mathbb{0}$ *и конечным объектом* $\mathbb{1}$, *а* $\imath_1$ *и* $\imath_2 : \mathbb{1} \to \mathbb{1} + \mathbb{1}$ *— инъекции, соответствующие копроизведению* $\mathbb{1} + \mathbb{1}$ (*см.* 3.2.3 (2)). *Тогда диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{0} \arrow[r, "0_{\mathbb{1}}"] \arrow[d, "0_{\mathbb{1}}"'] & \mathbb{1} \arrow[d, "\imath_1"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\imath_2"'] & \mathbb{1} + \mathbb{1}
\end{tikzcd}$$

представляет собой декартов квадрат.

$\lhd$ Указанная диаграмма коммутативна по определению начального объекта. Она будет также и кодекартовым квадратом в силу свойства универсальности пары инъекций $(\imath_1, \imath_2)$ (см. 3.2.3 (4)). Дальнейшие рассуждения иллюстрирует следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[drr] \arrow[dr, dashed, "\jmath"'] \arrow[ddr] & & & \\
& \mathbb{0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{1} \arrow[d, "\imath_2"'] \arrow[ddr, "\perp"] & \\
& \mathbb{1} \arrow[r, "\imath_2"] \arrow[drr, "\top"'] & \mathbb{1} + \mathbb{1} \arrow[dr, dashed, "k"] & \\
& & & \Omega
\end{tikzcd}$$

В этой диаграмме квадрат с вершинами $(\mathbb{1}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \Omega)$ коммутативен в соответствии с определениями классификатора подобъектов и морфизма $\perp$. Но тогда в силу отмеченной кодекартовости существует единственный морфизм $k : \mathbb{1} + \mathbb{1} \to \Omega$, для которого коммутативна вся диаграмма, если исключить из нее все морфизмы с началом в a. Предположим теперь, что коммутативен квадрат с вершинами $(\mathbb{1}, a, \mathbb{1}, \mathbb{1} + \mathbb{1})$. Тогда коммутативным будет и внешний квадрат с вершинами

$(\mathbb{1}, a, \mathbb{1}, \Omega)$. Ввиду декартовости квадрата с вершинами $(\mathbb{1}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \Omega)$ (определение $\perp$) отсюда вытекает существование и единственность морфизма $\jmath : a \to \mathbb{0}$, необходимого для обоснования требуемого. $\rhd$

3.6.9. *Если в топосе $\mathscr{E}$ мономорфизм $\imath_1 : \mathbb{1} \to \mathbb{1} + \mathbb{1}$ служит классификатором подобъектов, то $[f, -f]$ — эпиморфизм для любого $\mathscr{E}$-мономорфизма f.*

$\lhd$ Итак, пусть имеется два (изоморфных) классификатора подобъектов Ω и $\mathbb{1} + \mathbb{1}$. Возьмем произвольный $\mathscr{E}$-мономорфизм f. Наряду с χ_f и $\perp$ определим морфизмы χ'_f и $\perp'$, используя $\imath_1 : \mathbb{1} \to \mathbb{1} + \mathbb{1}$ вместо Ω. Согласно 3.6.8, $\imath_2 = \perp'$. Рассмотрим теперь две диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "|_a"'] & d \arrow[d, "\chi'_f"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\imath_1"'] & \mathbb{1} + \mathbb{1}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
-a \arrow[r, "-f"] \arrow[d, "|_{-a}"'] & d \arrow[d, "\chi'_f"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\imath_2"'] & \mathbb{1} + \mathbb{1}
\end{tikzcd}
$$

Первая из них будет декартовым квадратом по определению χ'_f. Декартовость второй диаграммы видна из следующих рассуждений. Рассмотрим диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
-a \arrow[r, "-f"] \arrow[d, dashed, "\jmath"'] \arrow[dd, bend right=60, "|_{-a}"'] & d \arrow[d, "\chi'_f"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\imath_2"] \arrow[d, "1_{\mathbb{1}}"'] & \mathbb{1} + \mathbb{1} \arrow[d, "\rceil"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

и заметим, что в ней нижний квадрат служит определением $\rceil$, а внешний квадрат определяет $-f$ относительно классификатора подобъектов $\mathbb{1} + \mathbb{1}$. Следовательно, оба эти квадрата декартовы и, в частности, коммутативны. В силу свойства универсальности нижнего квадрата существует морфизм $\jmath : -a \to \mathbb{1}$, для которой вся диаграмма становится коммутативной. По лемме о квадратах верхний квадрат также декартов. По определению конечного объекта $\mathbb{1}$ будет $\jmath = |_{-a}$.

Так как копроизведение сохраняет обратные образы, то и квадрат

$$
\begin{tikzcd}
a + (-a) \arrow[r, "{[f,-f]}"] \arrow[d, "|_a + |_{-a}"'] & d \arrow[d, "\chi'_f"] \\
\mathbb{1} + \mathbb{1} \arrow[r, "{[\imath_1, \imath_2]}"'] & \mathbb{1} + \mathbb{1}
\end{tikzcd}
$$

будет декартовым. Но морфизм $[\imath_1, \imath_2] = 1_{\mathbb{1}+\mathbb{1}}$ эпиморфен. Следовательно, морфизм $[f, -f]$, который служит подъемом эпиморфизма, также будет эпиморфизмом. $\rhd$

3.6.10. Теорема. *Для произвольного топоса $\mathscr{E}$ с начальным объектом $\mathbb{0}$, конечным объектом $\mathbb{1}$ и классифицирующим объектом Ω равносильны следующие утверждения*:

(1) $\mathscr{E}$ *булев*;

(2) $\mathrm{Sub}(\Omega)$ *является булевой алгеброй*;

(3) $\top : \mathbb{1} \to \Omega$ *имеет дополнение в решетке* $\mathrm{Sub}(\Omega)$;

(4) $\bot : \mathbb{1} \to \Omega$ *является дополнением* $\top$ *в решетке* $\mathrm{Sub}(\Omega)$;

(5) $\top \cup \bot \simeq 1_\Omega$ *в решетке* $\mathrm{Sub}(\Omega)$;

(6) $\mathscr{E}$ *— классический топос*;

(7) $\imath_1 : \mathbb{1} \to \mathbb{1} + \mathbb{1}$ *служит классификатором подобъектов.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Вытекает из определения булева топоса.

(2) $\to$ (3): Следует из определения булевой алгебры.

(3) $\to$ (4): Это является следствием предложения 3.6.7 (2).

(4) $\to$ (5): Нужно лишь сослаться на определение дополнения в решетке.

(5) $\to$ (6): Морфизм $[\top, \bot]$ является мономорфизмом (см. 3.4.13 (2)) и поэтому композиция $[\top, \bot] \circ 1_{\mathbb{1}+\mathbb{1}}$ будет его эпи-моно-разложением. Отсюда согласно теореме 3.5.10 получаем $\top \cup \bot \simeq [\top, \bot]$. Но по условию $\top \cup \bot \simeq 1_\Omega$ и поэтому $[\top, \bot] \simeq 1_\Omega$. Следовательно, $[\top, \bot]$ — изоморфизм.

(6) $\to$ (7): Следует из того, что всякий морфизм, изоморфный классификатору подобъектов, сам будет классификатором подобъектов.

(7) $\to$ (1): Предполагая выполненным (7), нужно убедиться в том, что для всякого мономорфизма $f : a \rightarrowtail d$ мономорфизм $-f$ служит дополнением в $\mathrm{Sub}(d)$, т. е. $f \cup -f \simeq 1_d$. Тогда решетка $\mathrm{Sub}(d)$ будет булевой алгеброй. В силу 3.6.9 $[f, -f]$ — эпиморфизм и, значит, по свойству универсальности эпи-моно-разложения существует морфизм $k : d \to a \cup -a$, пропускающий 1_d через $f \cup -f$:

$$\begin{tikzcd}
 & a \cup -a \arrow[dr, "f\cup -f"] & \\
a + (-a) \arrow[ur, "{[f,-f]^*}"] \arrow[dr, "{[f,-f]}"'] & & d \\
 & d \arrow[uu, dashed, "k"'] \arrow[ur, "1_d"'] &
\end{tikzcd}$$

Так как $f \cup -f$ — мономорфизм по определению, то k — изоморфизм. Стало быть, $f \cup -f \simeq 1_d$. $\rhd$

3.6.11. Теорема. *В любом топосе $\mathscr{E}$ следующие условия эквивалентны*:

(1) $\mathscr{E}$ *— булев топос*;

(2) $f \Rrightarrow g \simeq (-f) \cup g$ *для любых* $f, g \in \mathrm{Sub}(\Omega)$;

(3) $\top = -\bot$ *в* $\mathrm{Sub}(\Omega)$;

(4) $\neg \circ \neg = 1_\Omega$.

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Если $\mathscr{E}$ — булев топос, то $\mathrm{Sub}(\Omega)$ — булева алгебра и, следовательно, относительное псевдодополнение в ней имеет указанный в (2) вид.

(2) $\to$ (3): В силу 3.6.7 (1) из (2) выводим: $\top \cup \bot = (-\top) \cup \top = \top \Rightarrow \top \simeq 1_\Omega$. Осталось сослаться на 3.6.10 (5).

(3) $\to$ (4): Если выполнено (3), то, привлекая 3.5.1 (1), 3.5.8 (1), видим, что $1_\Omega = \chi_\top = \chi_{-\bot} = \neg \circ \chi_\bot = \neg \circ \neg$.

(4) $\to$ (1): Если выполнено (4), то для подобъекта f произвольного объекта d будет $\chi_{-(-f)} = \urcorner \circ \urcorner \circ \chi_f = \chi_f$. Тогда $f \simeq -(-f)$ и, стало быть, гейтингова алгебра $\mathrm{Sub}(d)$ состоит из регулярных элементов. Такая гейтингова алгебра на самом деле является булевой алгеброй (см. 2.6.4). $\rhd$

3.7. Комментарии

3.7.1. (1) Категории и функторы были введены в 1944 году С. Маклейном и С. Эйленбергом в связи с исследованиями по гомологической алгебре. В последующие десятилетия теория категорий вышла далеко за пределы алгебраической топологии, превратилась в самостоятельную дисциплину и стала играть существенную роль в различных разделах математики. Каждая категория представляет собой особый универсум — мир математических суждений и конструкций. Теория категорий вырабатывает выразительные и технические средства работы с такими универсумами.

(2) Основы теории категорий и функторов изложены в монографиях: И. Букура и А. Деляну [18], С. Маклейна [142], М. Ш. Цаленко и Е. Г. Шульгейфера [171]. Всюду в этой книге мы рассматриваем категории, являющиеся классами (собственными или нет). Поэтому для изложения теории категорий и функторов достаточно тех средств, которые доставляет аксиоматическая система фон Неймана — Гёделя — Бернайса. Категории, не являющиеся классами, из рассмотрения нами исключены. Обсуждение логических вопросов основания теории категорий имеется в работе В. К. Захарова и А. В. Михалева [62].

(3) Концепция двойственности математических объектов имеет давнюю историю. Уже у Евклида мы сталкиваемся с дуализмом первичных математических понятий, отраженном в определениях точки и монады. Развитие проективной геометрии сделало двойственность рабочим инструментом исследования. Геометрическая идея двойственности принадлежит к фундаментальным концепциям топологии и функционального анализа. О роли двойственности в выпуклом анализе см. в монографиях А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [63], А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [115, 116], Р. Т. Рокафеллара [157], а также в обзоре В. М. Тихомирова [165]. О принципе двойственности для булевых алгебр см. у Д. А. Владимирова [33] и Р. Сикорского [160].

(4) Относительные категории из 3.1.7 являются частными случаями общей конструкции, называемой *категорией запятой*. Рассмотрим три категории $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ и $\mathscr{E}$ и два функтора $\mathscr{S} : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ и $\mathscr{T} : \mathscr{E} \to \mathscr{C}$. Объектами категории запятой $(\mathscr{T}{\downarrow}\mathscr{S})$ служат всевозможные тройки (e, d, f), где $d \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$, $e \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{E}$ и $f : \mathscr{T}(e) \to \mathscr{S}(d)$. В качестве морфизма из (e, d, f) в (e', d', f') в этой категории приняты пары (k, h), где морфизмы $k : e \to e'$ и $h : d \to d'$ таковы, что $f \circ \mathscr{T}(k) = \mathscr{S}(h) \circ f$. Композицию морфизмов $(k', h') \circ (k, h)$ определяют как пару $(k' \circ k, h' \circ h)$. Категорию запятой ввел Ф. У. Ловер. Подробности см. у С. Маклейна [142].

3.7.2. (1) Универсальные конструкции, описанные в параграфе 3.2, имеют весьма важное значение для построения категорных аналогов математических понятий и конструкций. Примеры универсальных объектов или морфизмов существовали давно, но явное определение было выделено П. Сэмюэлем [365]. Значительную роль в распространении универсальных конструкций сыграла деятельность Н. Бурбаки, см. [19].

(2) Приведем общее определение универсального морфизма. Рассмотрим категории $\mathscr{D}$ и $\mathscr{C}$ и функтор $\mathscr{S} : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. Возьмем произвольный $\mathscr{C}$-объект c. Пару (r, u), состоящую из $\mathscr{D}$-объекта r и $\mathscr{C}$-морфизма $u : c \to \mathscr{S}(r)$, называют *универсальным морфизмом* из c в $\mathscr{S}$, если для любых $\mathscr{D}$-объекта d и $\mathscr{C}$-морфизма $f : c \to \mathscr{S}(d)$ существует единственный морфизм $f' : r \to d$, для которого $\mathscr{S}(f') \circ u = f$. Аналогично вводят и двойственное понятие: пару (r, v), состоящую из $\mathscr{D}$-объекта r и $\mathscr{C}$-морфизма $v : \mathscr{S}(r) \to c$, называют универсальным морфизмом из $\mathscr{S}$ в c, если для любых $\mathscr{D}$-объекта d и $\mathscr{C}$-морфизма $f : \mathscr{S}(d) \to c$ существует единственный морфизм $f' : d \to r$ такой, что $f = v \circ \mathscr{S}(f')$. Подробности см. у С. Маклейна [142].

(3) Важными примерами универсальных конструкций являются пределы. Приведем определение предела функтора, используя понятие универсального морфизма. Пусть $\mathscr{C}$ — произвольная категория, а D — произвольная малая категория. Рассмотрим категорию функторов $\mathscr{C}^D := \operatorname{Funct}(D, \mathscr{C})$ (см. 3.3.4). *Диагональный функтор* $\Delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^D$ вводят так: для $\mathscr{C}$-объекта c функтор $\Delta(c) : D \to \mathscr{C}$ постоянен и действует по правилу $\Delta(c) : d \mapsto c$, $\Delta(c) : \varphi \mapsto 1_c$, где $d \in \operatorname{Ob} D$ и $\varphi \in \operatorname{Mor} D$; если же $f : c \to c'$ — какой-нибудь $\mathscr{C}$-морфизм, то $\Delta(f)$ — естественное преобразование функтора $\Delta(c)$ в функтор $\Delta(c')$, принимающее на любом объекте $d \in \operatorname{Ob} D$ одно и то же значение f. Возьмем теперь произвольный функтор $\mathscr{F} : D \to \mathscr{C}$. Так как $\mathscr{F}$ — объект категории $\mathscr{C}^D$, то можно говорить об универсальном морфизме из $\mathscr{F}$ в Δ. *Копределом* (или *индуктивным пределом*) *функтора* $\mathscr{F}$ называют универсальный морфизм (r, u) из $\mathscr{F}$ в Δ; при этом пишут $r := \varinjlim \mathscr{F}$. Аналогично, универсальный морфизм (r, u) из Δ в $\mathscr{F}$ называют *пределом* (или *проективным пределом*) *функтора* $\mathscr{F}$ и обозначают символом $r := \varprojlim \mathscr{F}$, см. у С. Маклейна [142], М. Ш. Цаленко и Е. Г. Шульгейфера [171].

3.7.3. (1) Функторы и естественные преобразования функторов появились в 1942 г. в работах С. Маклейна и С. Эйленберга.

(2) Сопряженные функторы начал изучать Д. Кан в 1958 году (см. [264]). Сопряженные функторы широко распространены в различных областях математики и играют в них существенную роль. Многочисленные примеры сопряженных функторов можно найти в монографиях И. Букура и А. Деляну [18], Р. Голдблатта [40], П. Т. Джонстона [57], С. Маклейна [142], З. Семадени [372], М. Ш. Цаленко и Е. Г. Шульгейфера [171].

(3) Эквивалентность категорий можно выразить следующим образом. Категорию называют *скелетной*, если в ней изоморфные объекты совпадают. *Скелетом* категории $\mathscr{C}$ называют полную подкатегорию $\mathscr{C}_0$ категории $\mathscr{C}$, если $\mathscr{C}_0$ скелетна и каждый $\mathscr{C}$-объект изоморфен некоторому $\mathscr{C}_0$-объекту. У каждой категории имеется скелет. В этом можно убедиться с помощью теоремы Фреге — Рассела — Скотта. При этом две категории эквивалентны в том и только в том случае, если они имеют изоморфные скелеты.

3.7.4. (1) Определение элементарного топоса, данное в 3.4.5, принадлежит Ф. У. Ловеру и М. Тьерне (см. об этом у Р. Голдблатта [40], П. Т. Джонстона [57], П. Фрейда [230]). Ими же было введено понятие классифицирующего объекта (см. 3.4.2). С. Миккелсен [312] установил, что условие 3.4.5 (2) вытекает из остальных аксиом топоса (см. [57]).

(2) Пример 3.4.6 (3) представляет собой частный случай более общей конструкции, доставляющей целый спектр топосов. Именно, для любой малой категории $\mathscr{K}$ категория функторов $\mathrm{Funct}(\mathscr{K}, \mathrm{Set})$ является топосом. Строение топоса $\mathrm{Funct}(\mathscr{K}, \mathrm{Set})$ подробно описано у Р. Голдблатта [40, § 9.3].

(3) Утверждение 3.4.6 (4) составляет часть результата, названного П. Фрейдом в [230] *основной теоремой теории топосов*. Приведем полную формулировку этого результата.

Теорема. *Для любого топоса $\mathscr{E}$ и для любого $\mathscr{E}$-объекта a относительная категория $\mathscr{E}^a$ является топосом. Для любого $\mathscr{E}$-морфизма $f : a \to b$ функтор обратного образа $f^* : \mathscr{E}^b \to \mathscr{E}^a$ имеет сопряженный слева и сопряженный справа.*

(4) Истоки теории топосов находятся в трех областях (см. [308]). Во-первых, это алгебраическая геометрия, а именно теория пучков, развитие которой привело к топологии Гротендика и понятию пучка для такой топологии (см. работы Р. Годемана [39], А. Гротендика и Ж. Вердье [239]). Во-вторых, — теория категорий, в рамках которой возникла проблема категорной аксиоматизации теории множеств и дано первое решение этой проблемы Ф. У. Ловером. Наконец, в-третьих, — теория моделей, породившая метод форсинга П. Дж. Коэна и булевозначные модели Скотта — Соловея — Вопенки (см. работы Дж. Белла [191], Т. Йеха [64] и П. Дж. Коэна [84]).

3.7.5. (1) Основная идея параграфа 3.5 состоит в том, что каждый топос порождает внутренний язык, который можно использовать для образования высказываний относительно объектов и морфизмов топоса. Эта идея принадлежит У. Митчелу. Относительно дальнейшего ее развития см. у Р. Голдблатта [40], П. Т. Джонстона [57], М. П. Фурмана [169], М. П. Фурмана и Д. Скотта [226].

(2) Пусть $\mathscr{E}$ — топос. *Топологией* на топосе $\mathscr{E}$ называют морфизм $\tau : \Omega \to \Omega$, удовлетворяющий следующим трем условиям: 1) $\tau \circ \top = \top$; 2) $\tau \circ \tau = \tau$; 3) $\cap \circ (\tau \times \tau) = \tau \circ \cap$. Топология τ индуцирует отображение $\mathscr{T}$ из $\mathrm{Sub}(d)$ в $\mathrm{Sub}(d)$ для любого $\mathscr{E}$-объекта d. Отображение $\mathscr{T}$ ставит в соответствие подобъекту $f : a \rightarrowtail d$ подобъект $\mathscr{T}(f) : \mathscr{T}(a) \rightarrowtail d$ по правилу $\chi_{\mathscr{T}(f)} = \tau \circ \chi_f$. Мономорфизм (подобъект) $f : a \rightarrowtail d$ называют *τ-плотным*, если $\mathscr{T}(f) \simeq 1_d$.

(3) Пусть τ — топология на топосе $\mathscr{E}$. Объект b топоса $\mathscr{E}$ называют τ-пучком, если для произвольных $\mathscr{E}$-объекта d, τ-плотного мономорфизма $f : a \rightarrowtail d$ и $\mathscr{E}$-морфизма $g : a \to b$ существует единственный морфизм $g' : d \to b$, для которого $g' \circ f = g$. Символом $\mathrm{sh}_\tau(\mathscr{E})$ обозначают полную подкатегорию топоса $\mathscr{E}$, объектами которой являются τ-пучки. Ф. У. Ловер и М. Тьерне установили, что для любого топоса $\mathscr{E}$ категория $\mathrm{sh}_\tau(\mathscr{E})$ является топосом (доказательство см. у Р. Голдблатта [40], П. Т. Джонстона [57], А. Кока и Г. Райса [270], П. Фрейда [230]).

(4) Если в какой-нибудь категории $\mathscr{K}$ существуют объекты-степени, то объект $\Omega \simeq \Omega^{\mathbb{1}} := \mathscr{P}(\mathbb{1})$ вместе с мономорфизмом $\in_{\mathbb{1}}$: $\Omega^{\mathbb{1}} \times \mathbb{1} \to \Omega^{\mathbb{1}}$ представляет собой классификатор подобъектов в $\mathscr{K}$. Более того, объекты-степени можно использовать для построения экспоненциалов. Эти факты установили А. Кок и С. Миккелсен (см. работы Р. Голдблатта [40] и П. Т. Джонстона [57]). Таким образом, категория является топосом в том и только в том случае, когда она конечно полна и имеет объекты-степени.

3.7.6. (1) Как показано в 2.6.4, регулярные элементы гейтинговой алгебры образуют булеву алгебру. Оказывается, что и «регулярные» элементы топоса образуют булев топос. Точнее, имеют место следующие результаты. Для любого топоса $\mathscr{E}$ морфизм $\tau := \urcorner \circ \urcorner$ является топологией. Ее называют *топологией двойного отрицания.* При этом $\mathrm{sh}_\tau(\mathscr{E})$ — булев топос для любого топоса $\mathscr{E}$. Эти факты установили Ф. У. Ловер и М. Тьерне.

(2) Аксиому выбора можно сформулировать в следующем виде: *всякое сюръективное отображение имеет правое обратное отображение, т. е. если $f : X \to Q$ — сюръективное отображение, то существует такое отображение $s : Q \to X$, что* $f \circ s = 1_Q$. В терминах расслоений это означает, что всякое расслоение имеет сечение. Поэтому аксиому выбора в указанной формулировке называют также принципом ES. Р. Диаконеску [208] установил, что если в топосе выполнен принцип ES, то этот топос булев, см. работы Р. Голдблатта [40] и П. Т. Джонстона [57].

(3) Иная формулировка аксиомы выбора AC принадлежит С. Маклейну и звучит следующим образом: *если $a \not\simeq 0$, то для любого морфизма $f : a \to b$ существует морфизм $g : b \to a$, для которого* $f \circ g \circ f = f$. Можно показать, что если в топосе $\mathscr{E}$ справедлива аксиома AC, то в нем выполняется ES и этот топос двузначен. Верно также, что если топос точечный и в нем имеет место ES, то в нем справедлива аксиома AC. Вообще, условие $\mathscr{E} \models \mathrm{AC}$ выполнено для топоса $\mathscr{E}$ в том и только в том случае, если $\mathscr{E} \models \mathrm{ES}$ и любой неначальный объект в $\mathscr{E}$ непуст. Тем самым ввиду (2) из $\mathscr{E} \models \mathrm{AC}$ вытекает булевость $\mathscr{E}$. Все эти утверждения можно найти у Р. Голдблатта [40].

(4) Анализ других теоретико-множественных аксиом, понятий и конструкций во внутреннем языке топоса приводит к их более глубокому пониманию. Большое число результатов в этом направлении содержится в книгах Р. Голдблатта [40, главы 12, 13], П. Джонстона [57, глава 9]. В частности, в [57] имеется категорное доказательство независимости гипотезы континуума от аксиом теории множеств.

Глава 4
Булевозначный универсум

Общей чертой нестандартных методов анализа является привлечение специальных весьма нетрадиционных моделей теории множеств. Аппарат булевозначного анализа базируется на свойствах некоторой кумулятивной иерархии $\mathbb{V}^{(B)}$, очередной слой которой составляют функции, отправляющиеся из предыдущих слоев и прибывающие в наперед выбранную полную булеву алгебру B. Построение этой иерархии — булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ — и изучение общих свойств $\mathbb{V}^{(B)}$ служат главными темами текущей главы. Идея, заложенная в конструкцию булевозначного универсума, проста. Заметим, что вместо множества можно предъявить его характеристическую функцию. Путешествуя по этажам универсума фон Неймана и осуществляя последовательные замены, мы приходим к иерархии, составленной только из двузначных функций. Замена 2 на произвольную булеву алгебру B и повторение процесса приводят к искомому $\mathbb{V}^{(B)}$.

Наиболее тонкие моменты, заслуживающие особого внимания, состоят в точном разъяснении того смысла, в котором $\mathbb{V}^{(B)}$ можно рассматривать в качестве модели теории множеств. Мы подробно излагаем процедуру определения и способы нахождения оценок истинности теоретико-множественных формул. Столь же большое внимание уделено освещению основных технических приемов, составляющих фундамент булевозначного анализа, — принципов переноса, перемешивания и максимума.

Соображения логической строгости и возможно более полной независимости изложения заставили нас уделить много места построению отделимого универсума и интерпретации NGB в $\mathbb{V}^{(B)}$. При первом чтении с этими более специальными фрагментами читатель, интересующийся лишь содержательными приложениями к анализу, может познакомиться достаточно бегло.

4.1. Универсум над булевой алгеброй

В этом разделе мы определяем булевозначный универсум, строим булевы оценки истинности теоретико-множественных формул и приводим соответствующие простейшие факты.

4.1.1. Начнем с неформальных наводящих соображений, после знакомства с которыми конструкции булевозначного универсума и булевых оценок истинности, возможно, покажутся естественными. Пусть $2 := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ — обычная двухэлементная булева алгебра. Возьмем произвольное множество $x \in \mathbb{V}$ и свяжем с ним какую-либо (характеристическую) функцию χ_x со значениями в 2, определяемую (вообще говоря, неоднозначно) теми условиями, что $x \subset \operatorname{dom}(\chi_x)$ и

$\chi_x(t) = \mathbb{1}$ в том и только в том случае, если $t \in x$. Понятно, что есть веские основания отождествить x с любой такой функцией χ_x. Для того чтобы элементы области определения $\mathrm{dom}(\chi_x)$ двузначной функции χ_x также оказались двузначными функциями, следовало, конечно, предварительно на этаже V_β, $\beta < \mathrm{rank}(x)$, в котором располагается $\mathrm{dom}(\chi_x)$, все имеющиеся элементы заменить подходящими характеристическими функциями. Если же хочется обслужить в этом смысле весь мир множеств, т. е. универсум $\mathbb{V}$, то следует начинать с нулевого этажа $\varnothing$. Формализуя эти наблюдения, мы приходим к понятию 2-*значного универсума*

$$\mathbb{V}^{(2)} := \big\{x : \ (\exists\, \alpha \in \mathrm{On})(x \in V_\alpha^{(2)})\big\},$$

где $V_0^{(2)} := \varnothing$, $V_1^{(2)} := \{\varnothing\}$, $V_2^{(2)} := \{\{\varnothing\}, (\{\varnothing\}, \mathbb{1})\}$ и т. д. Точнее, по аналогии с $\mathbb{V}$ по $\in$-рекурсии мы определяем кумулятивную иерархию

$$V_\alpha^{(2)} := \big\{x : \ \mathrm{Fnc}\,(x) \wedge \mathrm{im}(x) \subset 2 \wedge (\exists\, \beta < \alpha)(\mathrm{dom}(x) \in V_\beta^{(2)})\big\}.$$

Ясно, что $\mathbb{V}^{(2)}$ состоит из двузначных функций, причем с каждым элементом $x \in \mathbb{V}^{(2)}$ связано множество $\bar{x} := \{y \in \mathbb{V}^{(2)} : x(y) = \mathbb{1}\}$. Правда, разным элементам $\mathbb{V}^{(2)}$ может соответствовать одно и то же множество. Поэтому мы отождествим те функции x и $y \in \mathbb{V}^{(2)}$, для которых $\bar{x} = \bar{y}$, не обращая внимания на формальные трудности и препоны, неминуемо встречающиеся на этом пути. Возьмем произвольные $x, y \in \mathbb{V}^{(2)}$. В силу произведенного выше отождествления равенство $x = y$ верно в том и только в том случае, если $\bar{x} = \bar{y}$. Формулу же $x \in y$ естественно считать истинной лишь в том случае, если $\bar{x} \in \bar{y}$. Положим $[\![x = y]\!] := \mathbb{1}$, $[\![x \in y]\!] := \mathbb{1}$ в случае истинности формул $x = y$, $x \in y$, и пусть $[\![x = y]\!] := \mathbb{0}$, $[\![x \in y]\!] := \mathbb{0}$ — в противном случае. Тогда справедливы представления:

$$[\![x \in y]\!] = \bigvee_{t \in \mathrm{dom}(y)} y(t) \wedge [\![t = x]\!],$$

$$[\![x = y]\!] = \bigvee_{t \in \mathrm{dom}(x)} x(t) \Rightarrow [\![t \in y]\!] \wedge \bigvee_{t \in \mathrm{dom}(y)} y(t) \Rightarrow [\![t \in x]\!].$$

Полезно сравнить эти формулы со следующими предложениями теории множеств:

$$u \in v \leftrightarrow (\exists\, w)(w \in v \wedge w = u),$$

$$u = v \leftrightarrow (\forall\, w)(w \in u \to w \in v) \wedge (w \in v \to w \in u).$$

4.1.2. Пусть B — фиксированная полная булева алгебра, являющаяся элементом универсума фон Неймана $\mathbb{V}$. Булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ возникает как предел кумулятивной иерархии (1.6.1), если $x_0 := 0$, $R := I_{\mathbb{V}}$, а Q задано формулой

$$y \in Q(x) \leftrightarrow \mathrm{Fnc}\,(y) \wedge \mathrm{dom}(y) \subset x \wedge \mathrm{im}(y) \subset B.$$

Таким образом, иерархия $(V_\alpha^{(B)})_{\alpha \in \mathrm{On}}$ имеет вид

$$V_0^{(B)} := 0,$$

$$V_{\alpha+1}^{(B)} := \Big\{y : \ \mathrm{Fnc}\,(y) \wedge \mathrm{dom}(y) \subset V_\alpha^{(B)} \wedge \mathrm{im}(y) \subset B\Big\},$$

$$V_\alpha^{(B)} := \bigcup \Big\{V_\beta^{(B)} : \ \beta < \alpha\Big\} \quad (\alpha \in K_{\mathrm{II}}).$$

По определению

$$\mathbb{V}^{(B)} := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha^{(B)}.$$

Учитывая, что пустое множество — это функция с пустой областью определения, выпишем первый и второй этажи булевозначного универсума: $V_1^{(B)} = \{0\}$, $V_2^{(B)} = \{0\} \cup \{(0, b) : b \in B\}$. Ординальный ранг элемента $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ обозначим символом $\rho(x)$.

4.1.3. Поскольку отношение $y \in \mathrm{dom}(x)$ вполне фундированно, то из 1.5.11 (1) вытекает следующий *принцип индукции* для $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$(\forall\, x \in \mathbb{V}^{(B)})((\forall\, y \in \mathrm{dom}(x))\varphi(y) \to \varphi(x)) \to (\forall\, x \in \mathbb{V}^{(B)})\varphi(x),$$

где φ — произвольная формула ZFC.

4.1.4. Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы приписать оценку истинности каждой формуле ZFC, свободные переменные которой заменены элементами $\mathbb{V}^{(B)}$. Такая оценка должна быть элементом B и обладать тем свойством, что теоремы ZFC станут «истинными» в $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. получат наибольшую оценку истинности — единицу.

Прежде всего, введем оценку истинности для атомарных формул $x \in y$ и $x = y$. Это делается с помощью двух класс-функций $[\![\,\cdot \in \cdot\,]\!]$ и $[\![\,\cdot = \cdot\,]\!]$ из $\mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)}$ в B.

Для произвольных $x, y \in \mathbb{V}^{(B)}$ положим

(1) $[\![x \in y]\!] := \bigvee\limits_{z\in\mathrm{dom}(y)} y(z) \wedge [\![z = x]\!]$,

(2) $[\![x = y]\!] := \bigwedge\limits_{z\in\mathrm{dom}(x)} y(z) \Rightarrow [\![z \in y]\!] \wedge \bigwedge\limits_{z\in\mathrm{dom}(y)} y(z) \Rightarrow [\![z \in x]\!]$.

Используя эти формулы и наделяя $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$ канонической структурой вполне упорядоченного класса, рекурсией по $(\rho(x), \rho(y))$ (см. 1.5.15) можно определить функции $[\![\,\cdot \in \cdot\,]\!]$ и $[\![\,\cdot = \cdot\,]\!]$. В самом деле, на нулевом уровне при $(\rho(x), \rho(y)) = (0, 0)$ имеем

$$[\![0 \in 0]\!] = \bigvee \varnothing = \mathbb{0}_B, \quad [\![0 = 0]\!] = \bigwedge \varnothing = \mathbb{1}_B.$$

Кроме того, при $z \in \mathrm{dom}(y)$ (или $z \in \mathrm{dom}(x)$) будет $(\rho(x), \rho(z)) < (\rho(x), \rho(y))$ (соответственно, $(\rho(z), \rho(y)) < (\rho(x), \rho(y))$).

Можно пойти по другому пути и воспользоваться трансфинитной рекурсией 1.5.9. Именно, если при всех $u, v \in V_\alpha^{(B)}$ значения $[\![u \in v]\!]$ и $[\![u = v]\!]$ определены, то для $x, y \in V_{\alpha+1}^{(B)}$ можно вычислить

$$[\![x = y]\!] = \bigwedge_{u\in\mathrm{dom}(x)} \Bigg(x(u) \Rightarrow \bigvee_{v\in\mathrm{dom}(y)} y(v) \wedge [\![u = v]\!] \Bigg) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{v\in\mathrm{dom}(y)} \Bigg(y(v) \Rightarrow \bigvee_{u\in\mathrm{dom}(x)} x(u) \wedge [\![u = v]\!] \Bigg),$$

так как $\mathrm{dom}(x) \subset V_\alpha^{(B)}$ и $\mathrm{dom}(y) \subset V_\alpha^{(B)}$. Теперь уже известны значения $[\![x = z]\!]$ для всех $z \in \mathrm{dom}(y)$. Поэтому можно вычислить

$$[\![x \in y]\!] = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(y)} y(z) \wedge [\![z = x]\!].$$

Случай предельного ординала α не вызывает затруднений.

4.1.5. Рассмотрим подробнее обоснование рекурсивного определения 4.1.4. Для $k := 1, 2, 3, 4$ и $x \in \mathbb{V}$ положим

$$\pi_x^k(u, v) := \bigvee \{b \in B : (\exists\, c_1, c_2, c_3, c_4 \in B)((u, v, c_1, c_2, c_3, c_4) \in x \wedge c_k = b)\}.$$

Пусть π_1 и π_2 — функции, сопоставляющие каждой упорядоченной шестерке $(u, v, c_1, c_2, c_3, c_4)$ соответственно первую и вторую компоненты u и v. В этих обозначениях опишем некоторый однозначный класс Q. Множество $Q(x)$ состоит из всевозможных шестерок $(u, v, c_1, c_2, c_3, c_4)$, удовлетворяющих условиям

$$\mathrm{Fnc}\,(u),\ \mathrm{Fnc}\,(v),\ \mathrm{im}(u) \cup \mathrm{im}(v) \subset B,$$

$$\mathrm{dom}(u) \subset \pi_1\text{“}x, \quad \mathrm{dom}(v) \subset \pi_2\text{“}x;$$

$$c_1 = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(v)} v(z) \wedge \pi_x^3(u, z), \quad c_2 = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} u(z) \wedge \pi_x^4(v, z),$$

$$c_3 = c_4 = \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(u)} u(z) \Rightarrow \pi_x^1(z, v) \wedge \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(v)} v(z) \Rightarrow \pi_x^2(u, z).$$

Согласно 1.6.1 существует кумулятивная иерархия $(F(\alpha))_{\alpha \in \mathrm{On}}$, для которой

$$F(0) = (0, 0, \mathbb{0}_B, \mathbb{0}_B, \mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B),$$

$$F(\alpha + 1) = Q(F(\alpha)) \quad (\alpha \in \mathrm{On}),$$

$$F(\alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} F(\beta) \quad (\alpha \in K_{\mathrm{II}}).$$

Легко заметить, что класс $X := \mathrm{im}(F)$ — это функция, причем $\mathrm{im}(X) \subset B^4$ и $\mathrm{dom}(X) = \mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)}$. Если $P_k : B^4 \to B$ символизирует k-ю проекцию, то по определению мы будем полагать, что

$$[\![\,\cdot \in \cdot\,]\!] := P_1 \circ X, \quad [\![\,\cdot = \cdot\,]\!] := P_3 \circ X.$$

4.1.6. Опишем теперь способ осмысления всякой формулы теории множеств как утверждения об элементах булевозначного универсума. Мы намерены тем самым интерпретировать классическую теорию множеств в универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$ с помощью рассмотренных в 4.1.4 функций $[\![\,\cdot \in \cdot\,]\!]$ и $[\![\,\cdot = \cdot\,]\!]$.

Прежде всего, мы определим *интерпретационный класс* I как совокупность всех отображений из множества символов переменных языка теории множеств в универсум $\mathbb{V}^{(B)}$.

Интерпретацией переменной x мы будем называть отображение вычисления $\bar{x}$, сопоставляющее каждому $\nu \in I$ элемент $\bar{x}(\nu) := \nu(x)$.

В качестве интерпретаций формул $x \in y$ и $x = y$ возьмем функции $\nu \mapsto [\![\bar{x}(\nu) \in \bar{y}(\nu)]\!]$, $\nu \mapsto [\![\bar{x}(\nu) = \bar{y}(\nu)]\!]$ $(\nu \in I)$. Теперь для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ с n свободными переменными определим интерпретацию $\nu \mapsto [\![\varphi(\bar{x}_1(\nu), \dots, \bar{x}_n(\nu))]\!]$ индукцией по длине формулы φ следующими правилами:

$$
\begin{gathered}
[\![\varphi(x) \wedge \psi(y)]\!] : \nu \mapsto [\![\varphi(\bar{x}(\nu))]\!] \wedge [\![\psi(\bar{y}(\nu))]\!],\\
[\![\varphi(x) \vee \psi(y)]\!] : \nu \mapsto [\![\varphi(\bar{x}(\nu))]\!] \vee [\![\psi(\bar{y}(\nu))]\!],\\
[\![\neg\varphi(x)]\!] : \nu \mapsto [\![\varphi(\bar{x}(\nu))]\!]^{*},\\
[\![\varphi(x) \rightarrow \psi(y)]\!] : \nu \mapsto [\![\varphi(\bar{x}(\nu))]\!] \Rightarrow [\![\psi(\bar{y}(\nu))]\!],\\
[\![(\forall\, t)\varphi(t, x)]\!] : \nu \mapsto \bigwedge \big\{[\![\varphi(\bar{t}(\nu'), \bar{x}(\nu'))]\!] :\, \nu' \in I_\nu(x)\big\},\\
[\![(\exists\, t)\varphi(t, x)]\!] : \nu \mapsto \bigvee \big\{[\![\varphi(\bar{t}(\nu'), \bar{x}(\nu'))]\!] :\, \nu' \in I_\nu(x)\big\},
\end{gathered}
$$

где $x := (x_1, \dots, x_n)$, $y := (y_1, \dots, y_m)$, $\bar{x}(\nu) := (\bar{x}_1(\nu), \dots, \bar{x}_n(\nu))$, $\bar{y}(\nu) := (\bar{y}_1(\nu), \dots, \bar{y}_m(\nu))$, $I_\nu(x) := \{\nu' \in I : \nu(x) = \nu'(x)\}$, причем все свободные переменные формул φ и ψ содержатся среди $t, x_1, \dots, x_n$ и $t, y_1, \dots, y_m$ соответственно.

Заметим, что $[\![\varphi(\bar{x}(\nu))]\!]$ зависит только от значений $\bar{x}_k(\nu) = \nu(x_k)$ $(k := 1, \dots, n)$. Поэтому мы пишем $[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!]$ вместо $[\![\varphi(\bar{x}(\nu))]\!] = [\![\varphi(\bar{x}_1(\nu), \dots, \bar{x}_n(\nu))]\!]$, если $u_k := \bar{x}_k(\nu) \in \mathbb{V}^{(B)}$ $(k := 1, \dots, n)$. Величина $[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!]$ — это булева *оценка истинности* формулы $\varphi(u_1, \dots, u_n)$.

Если $\varphi := \varphi(x_1, \dots, x_n)$ — формула и $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}^{(B)}$, то полагают по определению

$$
\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(u_1, \dots, u_n) \leftrightarrow [\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] = \mathbb{1}_B.
$$

В этой ситуации говорят, что φ *истинна внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ *при заданных значениях* $u_1, \dots, u_n$ *переменных* $x_1, \dots, x_n$ или просто: утверждение $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ *справедливо в* $\mathbb{V}^{(B)}$.

Иногда мы прибегаем к формуле φ, выраженной в естественном языке, — это обстоятельство отмечается кавычками: $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «φ». Отметим также, что *знак удовлетворения* $\models$ приводит к употреблению теоретико-модельных выражений типа «$\mathbb{V}^{(B)}$ — это *булевозначная модель* для φ» вместо $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi$ и т. п.

4.1.7. Введенное понятие интерпретации позволяет судить об элементах $\mathbb{V}^{(B)}$. Однако зачастую более удобным для этой цели оказывается так, называемый *B-язык.* Этот язык получается присоединением к алфавиту языка теории множеств по одному символу константы для каждого элемента из $\mathbb{V}^{(B)}$. При этом, как обычно, элементы из $\mathbb{V}^{(B)}$ принято отождествлять с соответствующими символами констант. Формулы и высказывания B-языка называют *B-формулами* и *B-высказываниями.* Тогда всякая B-формула (B-высказывание) получается из некоторой формулы теории множеств путем задания значений из $\mathbb{V}^{(B)}$ для некоторых (соответственно для всех) свободных переменных.

Посмотрим теперь, как упрощаются определения булевых оценок истинности из 4.1.6 при использовании B-языка. Именно, булеву оценку истинности любого

B-высказывания можно получить, полагая

$$
\begin{gathered}
[\![\sigma \wedge \tau]\!] := [\![\sigma]\!] \wedge [\![\tau]\!], \quad [\![\sigma \vee \tau]\!] := [\![\sigma]\!] \vee [\![\tau]\!], \\
[\![\neg\sigma]\!] := [\![\sigma]\!]^*, \quad [\![\sigma \to \tau]\!] := [\![\sigma]\!] \Rightarrow [\![\tau]\!], \\
[\![(\forall\, x)\varphi(x)]\!] := \bigwedge \Big\{ [\![\varphi(u)]\!] : \, u \in \mathbb{V}^{(B)} \Big\}, \\
[\![(\exists\, x)\varphi(x)]\!] := \bigvee \Big\{ [\![\varphi(u)]\!] : \, u \in \mathbb{V}^{(B)} \Big\},
\end{gathered}
$$

где σ и τ — произвольные B-высказывания, а φ — какая-либо B-формула с одной свободной переменной x.

Говорят, что B-высказывание σ *истинно в* (*внутри*) $\mathbb{V}^{(B)}$, и пишут $\mathbb{V}^{(B)} \models \sigma$, если $[\![\sigma]\!] = \mathbb{1}_B$.

В дальнейшем без специальных оговорок мы используем оба языковых средства 4.1.6 и 4.1.7. При этом нам удобно употреблять одни и те же буквы при обозначении как переменных, так и элементов универсума $\mathbb{V}^{(B)}$. Если в рассмотрении одновременно находятся несколько булевых алгебр $B, C, \dots$ и есть потребность детализации, то наряду с $[\![\varphi]\!]$ мы будем писать $[\![\varphi]\!]^B$, $[\![\varphi]\!]^C$ и т. д.

4.1.8. Теорема. *Если формула $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ доказуема в исчислении предикатов, то $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(B)}$. В частности, для $x, y, z \in \mathbb{V}^{(B)}$ справедливы соотношения*:

(1) $[\![x = x]\!] = \mathbb{1}$;

(2) $x(y) \leqslant [\![y \in x]\!]$ *для всех* $y \in \operatorname{dom}(x)$;

(3) $[\![x = y]\!] = [\![y = x]\!]$;

(4) $[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leqslant [\![x = z]\!]$;

(5) $[\![x \in y]\!] \wedge [\![x = z]\!] \leqslant [\![z \in y]\!]$;

(6) $[\![y \in x]\!] \wedge [\![x = z]\!] \leqslant [\![y \in z]\!]$;

(7) $[\![x = y]\!] \wedge [\![\varphi(x)]\!] \leqslant [\![\varphi(y)]\!]$ *для любой B-формулы φ.*

$\lhd$ Легко проверить, что аксиомы исчисления предикатов истинны внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а правила вывода истинность увеличивают. Точнее, если формула φ выводима в исчислении предикатов из формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, то $[\![\varphi_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![\varphi_n]\!] \leqslant [\![\varphi]\!]$.

Покажем теперь справедливость (1)–(7).

(1): Это свойство мы установим индукцией по вполне фундированному отношению $y \in \operatorname{dom}(x)$. Предположим, что $[\![y = y]\!] = \mathbb{1}$ при всех $y \in \operatorname{dom}(x)$. Тогда по 4.1.4 (1)

$$
[\![y \in x]\!] = \bigvee_{t \in \operatorname{dom}(x)} x(t) \wedge [\![t = y]\!] \geqslant x(y) \wedge [\![y = y]\!] \geqslant x(y)
$$

и, следовательно, в силу 2.1.5 (4) будет

$$
[\![x = x]\!] = \bigwedge_{y \in \operatorname{dom}(x)} x(y) \Rightarrow [\![y \in x]\!] = \mathbb{1}.
$$

(2): Учитывая 4.1.4 (1) и доказанное в (1), при $y \in \operatorname{dom}(x)$ оцениваем

$$
[\![y \in x]\!] \geqslant x(y) \wedge [\![y = y]\!] = x(y).
$$

(3): Вытекает из того, что выражение в 4.1.4 (2), задающее булевозначную оценку истинности равенств, симметрично.

Утверждения (4)–(6) мы установим одновременной индукцией. Пусть $\rho(x,y,z) := (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathrm{On}^3$ — такая перестановка тройки ординалов $\rho(x)$, $\rho(y)$ и $\rho(z)$, что $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. (Естественно, мы наделяем On^3 канонической структурой вполне упорядоченного класса, см. 1.5.15.) Допустим, что $x,y,z \in \mathbb{V}^{(B)}$ и для всех $u,v,w \in \mathbb{V}^{(B)}$ при $\rho(u,v,w) < \rho(x,y,z)$ выполнены неравенства (4)–(6). Индукционный шаг производится для каждого случая раздельно.

(4): Пусть $t \in \mathrm{dom}(x)$. Поскольку $[\![x = y]\!] \leqslant x(t) \Rightarrow [\![t \in y]\!]$, то согласно 2.1.5 (3)

$$x(t) \wedge [\![x = y]\!] \leqslant [\![t \in y]\!],$$
$$x(t) \wedge [\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leqslant [\![t \in y]\!] \wedge [\![y = z]\!].$$

Заметив, что $\rho(t,y,z) < \rho(x,y,z)$, и применив индукционное предположение для (6), получим

$$[\![t \in y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leqslant [\![t \in z]\!],$$
$$x(t) \wedge [\![y = x]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leqslant [\![t \in z]\!].$$

Воспользуемся вновь соотношением 2.1.5 (3). Тогда

$$[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leqslant x(t) \Rightarrow [\![t \in z]\!]$$

и, следовательно,

$$[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leqslant \bigwedge_{t \in \mathrm{dom}(x)} x(t) \Rightarrow [\![t \in z]\!].$$

Аналогично

$$[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leqslant \bigwedge_{t \in \mathrm{dom}(z)} z(t) \Rightarrow [\![t \in x]\!].$$

В силу 4.1.4 (2) заключаем: $[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leqslant [\![x = z]\!]$.

(5): Рассмотрим $t \in \mathrm{dom}(y)$. Тогда $\rho(t,x,z) < \rho(x,y,z)$. Значит, по индукционному предположению, для (4) будет

$$y(t) \wedge [\![t = x]\!] \wedge [\![x = z]\!] \leqslant y(t) \wedge [\![t = z]\!] \leqslant [\![z \in y]\!].$$

Отсюда ввиду 2.1.6 (2)

$$[\![x = z]\!] \wedge \bigvee_{t \in \mathrm{dom}(y)} y(t) \wedge [\![t = x]\!] \leqslant [\![z \in y]\!]$$

или $[\![x = z]\!] \wedge [\![x \in y]\!] \leqslant [\![z \in y]\!]$.

(6): Опять возьмем $t \in \mathrm{dom}(x)$. Тогда

$$x(t) \wedge [\![x = z]\!] \leqslant [\![t \in z]\!],$$
$$[\![t = y]\!] \wedge x(t) \wedge [\![x = z]\!] \leqslant [\![t = y]\!] \wedge [\![t \in z]\!].$$

На этот раз снова $\rho(t, y, z) < \rho(x, y, z)$. Поэтому по индукционному предположению для (5) и формулы 2.1.6 (2) получаем

$$x(t) \wedge [\![x = z]\!] \wedge [\![t = y]\!] \leqslant [\![y \in z]\!],$$

$$[\![x = z]\!] \wedge \bigvee_{t \in \operatorname{dom}(x)} x(t) \wedge [\![t = y]\!] \leqslant [\![y \in z]\!].$$

Итак, $[\![x = z]\!] \wedge [\![y \in x]\!] \leqslant [\![y \in z]\!]$ согласно 4.1.4 (1).

(7): Доказывается индукцией по длине формулы с учетом уже установленных соотношений. $\triangleright$

В качестве следствия из теоремы 4.1.8 укажем следующие правила вычисления булевых значений истинности формул с ограниченными кванторами.

4.1.9. *Для любой B-формулы φ с одной свободной переменной x и для каждого $u \in \mathbb{V}^{(B)}$ справедливы соотношения*

$$[\![(\exists\, x \in u)\, \varphi(x)]\!] = \bigvee_{v \in \operatorname{dom}(u)} u(v) \wedge [\![\varphi(v)]\!],$$

$$[\![(\forall\, x \in u)\, \varphi(x)]\!] = \bigwedge_{v \in \operatorname{dom}(u)} u(v) \Rightarrow [\![\varphi(v)]\!].$$

$\triangleleft$ Эти формулы двойственны друг другу. Поэтому достаточно доказать одну из них, например, первую. Ввиду 4.1.8 (2) справедливо неравенство

$$[\![(\exists\, x \in u)\, \varphi(x)]\!] \geqslant \bigvee_{v \in \operatorname{dom}(u)} u(v) \wedge [\![\varphi(v)]\!].$$

С другой стороны, привлекая 4.1.4 (1) и 4.1.8 (7), получим

$$[\![(\exists\, x \in u)\, \varphi(x)]\!] = \bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \bigvee_{v \in \operatorname{dom}(u)} u(v) \wedge [\![t = v]\!] \wedge [\![\varphi(t)]\!] \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_{v \in \operatorname{dom}(u)} u(v) \wedge [\![\varphi(v)]\!]. \ \triangleright$$

4.2. Преобразования булевозначных универсумов

Всякий гомоморфизм булевой алгебры B индуцирует некоторое преобразование универсума $\mathbb{V}^{(B)}$. Изучение таких преобразований и, в частности, анализ того, как при этом ведут себя булевы оценки истинности формул — тема текущего параграфа.

4.2.1. Пусть π — гомоморфизм B в полную булеву алгебру C. Рекурсией по вполне фундированному отношению $y \in \operatorname{dom}(x)$ мы можем определить отображение $\pi^* : \mathbb{V}^{(B)} \to \mathbb{V}^{(C)}$ такое, что $\operatorname{dom}(\pi^* x) := \{\pi^* y : \ y \in \operatorname{dom}(x)\}$ и

$$\pi^* x : v \mapsto \bigvee \big\{\pi(x(z)) : \ z \in \operatorname{dom}(x),\ \pi^* z = v\big\}.$$

Если гомоморфизм π инъективен, то инъективным будет и отображение π^*. При этом

$$\pi^* x : \pi^* y \mapsto \pi(x(y)) \quad (y \in \operatorname{dom}(x)).$$

$\lhd$ В самом деле, достаточно установить, что для произвольного ординала α инъективным является сужение π^* на $V_\alpha^{(B)}$. Предположим, что это утверждение выполнено для всех $\beta < \alpha$. Пусть $x, y \in V_\alpha^{(B)}$ таковы, что $\pi^* x = \pi^* y$. Заметим, что в этом случае $\pi^* x : \pi^* z \mapsto \pi(x(z))$ $(z \in \mathrm{dom}(x))$ и $\pi^* y : \pi^* z \mapsto \pi(y(z))$ $(z \in \mathrm{dom}(y))$. Тем самым мы приходим к равенству

$$\{(\pi^* z, \pi(x(z))) : z \in \mathrm{dom}(x)\} = \{(\pi^* u, \pi(y(u))) : u \in \mathrm{dom}(y)\}.$$

Поскольку для некоторого $\beta < \alpha$ множества $\mathrm{dom}(x)$ и $\mathrm{dom}(y)$ содержатся в $V_\beta^{(B)}$, то π^* инъективен на каждом из этих множеств. Учитывая инъективность π, получим

$$\{(z, x(z)) : z \in \mathrm{dom}(x)\} = \{(u, y(u)) : u \in \mathrm{dom}(y)\},$$

или, что то же самое, $x = y$. $\rhd$

Всюду ниже π — полный гомоморфизм из B в полную булеву алгебру C.

4.2.2. Теорема. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) *если ρ — полный гомоморфизм алгебры C в полную булеву алгебру D, то $(\rho \circ \pi)^* = \rho^* \circ \pi^*$;*

(2) *если гомоморфизм π инъективен (сюръективен), то отображение π^* инъективно (соответственно, сюръективно);*

(3) *при всех x и $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ выполнены равенства*

$$[\![\pi^* x = \pi^* y]\!]^C = \pi([\![x = y]\!]^B), \quad [\![\pi^* x \in \pi^* y]\!]^C = \pi([\![x \in y]\!]^B);$$

(4) *для любых $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $t \in \mathbb{V}^{(C)}$ справедливо равенство*

$$[\![t \in \pi^* x]\!]^C = \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi([\![u = x]\!]^B) \wedge [\![t \in \pi^* u]\!]^C.$$

$\lhd$ (1): Предположим, что $(\rho \circ \pi)^* y = (\rho^* \circ \pi^*) y$ для всех $y \in \mathrm{dom}(x)$. Тогда для $u := (\rho \circ \pi)^* y$, где $y \in \mathrm{dom}(x)$, последовательно выводим (см. 2.1.1 (3)):

$$((\rho \circ \pi)^* x) u = \bigvee \big\{(\rho \circ \pi)(x(z)) : z \in \mathrm{dom}(x),\ (\rho^* \circ \pi^*) z = (\rho^* \circ \pi^*) y\big\} =$$

$$= \bigvee \Big\{\rho\big(\bigvee \{\pi(x(z)) : z \in \mathrm{dom}(x),\ \pi^* z = v\}\big) : v \in \mathrm{dom}(\pi^* x),\ \rho^* v = (\rho^* \circ \pi^*) y\Big\} =$$

$$= \bigvee \big\{\rho((\pi^* x)(v)) : v \in \mathrm{dom}(\pi^* x),\ \rho^* v = \rho^*(\pi^* y)\big\} =$$

$$= (\rho^*(\pi^* x))(\rho^*(\pi^* y)) = ((\rho^* \circ \pi^*) x) u.$$

Итак, $(\rho \circ \pi)^* x = \rho^*(\pi^* x)$. Требуемое вытекает теперь из 4.1.3.

(2): Случай инъективного π был уже разобран в 4.2.1. Допустим, что π — сюръективное отображение. Тогда существуют главный идеал B_0 булевой алгебры B и изоморфизм $\rho : C \overset{\text{на}}{\to} B_0$, для которого ρ^{-1} совпадает с сужением π_0 гомоморфизма π на B_0. Если $x \in \mathbb{V}^{(C)}$, то согласно (1) $x = I_C^* x = (\pi_0 \circ \rho)^* x = \pi_0^*(\rho^* x) \in \mathrm{im}(\pi_0^*)$. Итак, π_0^* отображает $\mathbb{V}^{(B_0)}$ на $\mathbb{V}^{(C)}$. Осталось заметить, что $\mathbb{V}^{(B_0)} \subset \mathbb{V}^{(B)}$ и сужение π^* на $\mathbb{V}^{(B_0)}$ совпадает с π_0^*.

(3): Доказательство проводится индукцией по $(\rho(x), \rho(y))$ при каноническом упорядочении класса $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$ (см. 1.5.15).

Предположим, что требуемые формулы выполнены для любых u, $v \in \mathbb{V}^{(B)}$ при $(\rho(u), \rho(v)) < (\rho(x), \rho(y))$. Если $z \in \mathrm{dom}(x)$ или $z \in \mathrm{dom}(y)$, то, очевидно, $\max\{(\rho(z), \rho(x)), (\rho(z), \rho(y))\} < (\rho(x), \rho(y))$. Следовательно, справедливы следующие выкладки (см. 2.1.1 (3) и 2.1.6 (2)):

$$[\![\pi^* x \in \pi^* y]\!] = \bigvee_{t \in \mathrm{dom}(\pi^* y)} (\pi^* y)(t) \wedge [\![t = \pi^* x]\!] = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(y)} (\pi^* y)(\pi^* z) \wedge [\![\pi^* z = \pi^* x]\!] =$$

$$= \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(y)} \Big(\bigvee \{\pi(y(u)) : u \in \mathrm{dom}(y), \pi^* u = \pi^* z\}\Big) \wedge [\![\pi^* z = \pi^* x]\!] =$$

$$= \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(y)} \bigvee \{\pi(y(u)) \wedge [\![\pi^* z = \pi^* x]\!] : u \in \mathrm{dom}(y), \pi^* u = \pi^* z\} =$$

$$= \bigvee_{u \in \mathrm{dom}(y)} \pi(y(u)) \wedge \pi([\![u = x]\!]) = \pi\Bigg(\bigvee_{u \in \mathrm{dom}(y)} y(u) \wedge [\![u = x]\!]\Bigg) = \pi([\![x \in y]\!]).$$

Аналогичные вычисления проходят и для булевых оценок истинности равенства (с последовательным применением 4.1.4 (2), 4.2.1, 2.1.1 (4), 4.1.4 (2)):

$$[\![\pi^* x = \pi^* y]\!] = \bigwedge_{t \in \mathrm{dom}(\pi^* y)} (\pi^* y)(t) \Rightarrow [\![t \in \pi^* x]\!] \wedge \bigwedge_{t \in \mathrm{dom}(\pi^* x)} (\pi^* x)(t) \Rightarrow [\![t \in \pi^* y]\!] =$$

$$= \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(y)} (\pi^* y)(\pi^* z) \Rightarrow [\![\pi^* z \in \pi^* x]\!] \wedge \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(x)} (\pi^* x)(\pi^* z) \Rightarrow [\![\pi^* z \in \pi^* y]\!] =$$

$$= \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(y)} \bigwedge \{\pi(y(u)) \Rightarrow \pi([\![u \in x]\!]) : u \in \mathrm{dom}(y), \pi^* u = \pi^* z\} \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(x)} \bigwedge \{\pi(x(u)) \Rightarrow \pi([\![u \in y]\!]) : u \in \mathrm{dom}(x), \pi^* u = \pi^* z\} =$$

$$= \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} \pi(x(u) \Rightarrow [\![u \in y]\!]) \wedge \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(y)} \pi(y(u) \Rightarrow [\![u \in x]\!]) = \pi([\![x = y]\!]).$$

(4): В силу (3) и 4.1.8 (2, 5) для $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $t \in \mathbb{V}^{(C)}$ выполнены оценки

$$[\![t \in \pi^* x]\!] = \bigvee_{s \in \mathrm{dom}(\pi^* x)} (\pi^* x)(s) \wedge [\![s = t]\!] = \bigvee_{u \in \mathrm{dom}(x)} (\pi^* x)(\pi^* u) \wedge [\![\pi^* u = t]\!] \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi([\![u \in x]\!]) \wedge [\![\pi^* u = t]\!] = \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\pi^* u \in \pi^* x]\!] \wedge [\![\pi^* u = t]\!] \leqslant [\![t \in \pi^* x]\!]. \ \triangleright$$

4.2.3. Теорема. *Пусть $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ и π — полный гомоморфизм из B в C. Пусть, далее, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — некоторая формула ZFC. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *если φ — формула класса Σ_1, а гомоморфизм π произволен, то*

$$\pi([\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!]^B) \leqslant [\![\varphi(\pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n]\!]^C;$$

(2) *если φ — ограниченная формула, а π произволен, либо если π — эпиморфизм, а φ — произвольная формула, то*

$$\pi([\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!]^B) = [\![\varphi(\pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n)]\!]^C.$$

◁ Для атомарных формул это утверждение обеспечено 4.2.2. Общий случай мы установим индукцией по длине формулы φ. При этом нетривиальный индукционный шаг возникает лишь тогда, когда φ имеет вид $(\exists\, x)\varphi_0$ или $(\forall\, x)\varphi_0$. Именно здесь необходимы дополнительные предположения о φ и π.

(1): Если на индукционном шаге был навешен ограниченный квантор общности, т. е. если φ имеет вид $(\forall\, x\in u)\varphi_0(x, u_1, \dots, u_n)$, то (см. 2.1.1 (4) и 2.1.6 (3)) мы проведем следующие выкладки:

$$[\![\varphi(\pi^*u, \pi^*u_1, \dots, \pi^*u_n)]\!] = \bigwedge_{x\in\operatorname{dom}(\pi^*u)} (\pi^*u)(x) \Rightarrow [\![\varphi_0(x, \pi^*u_1, \dots, \pi^*u_n)]\!] =$$

$$= \bigwedge_{x\in\operatorname{dom}(u)} (\pi^*u)(\pi^*x) \Rightarrow [\![\varphi_0(\pi^*x, \pi^*u_1, \dots, \pi^*u_n)]\!] =$$

$$= \bigwedge_{x\in\operatorname{dom}(u)} \bigwedge\{\pi(u(z)) \Rightarrow [\![\varphi_0(\pi^*x, \pi^*u_1, \dots, \pi^*u_n)]\!] : z\in\operatorname{dom}(u),\ \pi^*z = \pi^*x\} =$$

$$= \bigwedge_{x\in\operatorname{dom}(u)} \pi(u(x) \Rightarrow [\![\varphi_0(x, u_1, \dots, u_n)]\!]) =$$

$$= \pi[\![(\forall\, x\in u)\varphi_0(x, u_1, \dots, u_n)]\!] = \pi[\![\varphi(u, u_1, \dots, u_n)]\!].$$

Далее, для неограниченного квантора существования непосредственно из определений выводим:

$$[\![(\exists\, x)\varphi_0(x, \pi^*u_1, \dots, \pi^*u_n)]\!] \geqslant \bigvee\{[\![\varphi_0(x, \pi^*u_1, \dots, \pi^*u_n)]\!] : x\in\operatorname{im}(\pi^*)\} =$$

$$= \bigvee\left\{[\![\varphi_0(\pi^*u, \pi^*u_1, \dots, \pi^*u_n)]\!] : u\in\mathbb{V}^{(B)}\right\} =$$

$$= \bigvee\{\pi([\![\varphi_0(u, u_1, \dots, u_n)]\!]) : u\in\mathbb{V}^{(B)}\} = \pi([\![(\exists\, x)\varphi_0(x, u_1, \dots, u_n)]\!]).$$

(2): Отметим, прежде всего, что если π — сюръекция, то π^* также сюръекция, т. е. $\operatorname{im}(\pi^*) = \mathbb{V}^{(C)}$ (см. 4.2.2 (2)). Поэтому для формулы $\varphi := (\exists\, x)\varphi_0$ будет

$$[\![\varphi(\pi^*u_1, \dots, \pi^*u_n)]\!] = \bigvee\left\{[\![\varphi_0(x, \pi^*u_1, \dots, \pi^*u_n)]\!] : x\in\mathbb{V}^{(C)} = \operatorname{im}(\pi^*)\right\} =$$

$$= \bigvee\left\{[\![\varphi_0(\pi^*u, \pi^*u_1, \dots, \pi^*u_n)]\!] : u\in\mathbb{V}^{(B)}\right\} =$$

$$= \bigvee\left\{\pi([\![\varphi_0(u, u_1, \dots, u_n)]\!]) : u\in\mathbb{V}^{(B)}\right\} = \pi([\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!]).$$

Те же самые рассуждения годны и для формулы φ вида $(\forall\, x)\varphi_0(x, u_1, \dots, u_n)$.

Если же область действия рассматриваемого квантора существования ограничена, т. е. если формула $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ имеет вид $(\exists\, x\in u)\varphi_0(x, u_1, \dots, u_n)$ и $u, u_1, \dots, u_n\in\mathbb{V}^{(B)}$, то (см. определения и 2.1.1 (3) и 2.1.6 (1)) законны вычисления

$$[\![\varphi(\pi^*u, \pi^*u_1, \dots, \pi^*u_n)]\!] = \bigvee_{x\in\operatorname{dom}(\pi^*u)} (\pi^*u)(x) \wedge [\![\varphi_0(x, \pi^*u_1, \dots, \pi^*u_n)]\!] =$$

$$= \bigvee_{x \in \mathrm{dom}(u)} (\pi^* u)(\pi^* x) \wedge [\![\varphi_0(\pi^* x, \pi^* u_1, \ldots, \pi^* u_n)]\!] =$$

$$= \bigvee_{x \in \mathrm{dom}(u)} \bigvee \bigl\{ \pi(u(z)) \wedge [\![\varphi_0(\pi^* x, \pi^* u_1, \ldots, \pi^* u_n)]\!] : z \in \mathrm{dom}(u), \pi^* z = \pi^* x \bigr\} =$$

$$= \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} \pi(u(z) \wedge [\![\varphi_0(z, u_1, \ldots, u_n)]\!]) = \pi([\![\varphi(u, u_1, \ldots, u_n)]\!]).$$

Случай ограниченного квантора общности рассмотрен выше. $\triangleright$

4.2.4. *Пусть π, φ, $u_1, \ldots, u_n$ те же, что и в 4.2.3, и выполнено одно из следующих утверждений*:

(1) $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — *формула класса Σ_1, а гомоморфизм π — произволен*;

(2) π — *эпиморфизм, а $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная формула.*

Тогда

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(u_1, \ldots, u_n) \to \mathbb{V}^{(C)} \models \varphi(\pi^* u_1, \ldots, \pi^* u_n).$$

$\triangleleft$ Следует из 4.2.3 ввиду соотношений $\mathbb{1}_C = \pi(\mathbb{1}_B) = \pi([\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]) \leqslant [\![\varphi(\pi^* u_1, \ldots, \pi^* u_n)]\!]^C$. $\triangleright$

4.2.5. *Пусть π, φ и $u_1, \ldots, u_n$ те же, что и в 4.2.3, а кроме того, выполнено одно из следующих условий*:

(1) φ — *ограниченная формула, а π — мономорфизм*;

(2) π — *изоморфизм, а φ — произвольная формула.*

Тогда

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(u_1, \ldots, u_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(C)} \models \varphi(\pi^* u_1, \ldots, \pi^* u_n).$$

$\triangleleft$ Следует из 4.2.3 (2), так как при указанных предположениях равенства $\pi([\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^B) = \mathbb{1}_C$ и $[\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^B = \mathbb{1}_B$ равносильны. $\triangleright$

4.2.6. Рассмотрим теперь важный специальный случай изученной ситуации. Пусть B_0 — правильная подалгебра полной булевой алгебры B. Это означает, что B_0 — полная подалгебра и точные границы любого множества в B_0 не зависят от того, вычислены они в B_0 или в B. В этой ситуации $\mathbb{V}^{(B_0)} \subset \mathbb{V}^{(B)}$, причем если $\imath$ — тождественное вложение B_0 в B, то $\imath^*$ — вложение $\mathbb{V}^{(B_0)}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$. Из 4.2.5 (1) следует, что если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — ограниченная формула и $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{V}^{(B_0)}$, то

$$\mathbb{V}^{(B_0)} \models \varphi(u_1, \ldots, u_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(u_1, \ldots, u_n).$$

Поскольку двухэлементную алгебру $\mathbb{2} := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ можно рассматривать как правильную подалгебру булевой алгебры B, то сказанное выше справедливо и для универсума $\mathbb{V}^{(\mathbb{2})}$. Ниже мы увидим, что универсум $\mathbb{V}^{(\mathbb{2})}$ в естественном смысле изоморфен универсуму фон Неймана $\mathbb{V}$.

4.2.7. Для произвольного множества $x \in \mathbb{V}$ определим элемент $x^{\wedge} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{2})} \subset \mathbb{V}^{(B)}$ рекурсией по вполне фундированному отношению $y \in x$. Для этого положим

$$\mathrm{dom}(x^{\wedge}) := \{y^{\wedge} : y \in x\}, \quad \mathrm{im}(x^{\wedge}) := \{\mathbb{1}_B\}.$$

Из 4.2.2 (3) для любых $x, y \in V$ будет

$$[\![x^{\wedge} \in y^{\wedge}]\!]^B \in \mathbb{2}, \quad [\![x^{\wedge} = y^{\wedge}]\!]^B \in \mathbb{2}.$$

Отображение $x \mapsto x^\wedge$ $(x \in \mathbb{V})$ называют *каноническим вложением* класса всех множеств $\mathbb{V}$ в булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$. Элементы из $\mathbb{V}^{(B)}$, имеющие вид $x^\wedge$ при некотором $x \in \mathbb{V}$, именуют *стандартными*. При этом элемент $x^\wedge$ называют *стандартным именем множества* x в $\mathbb{V}^{(B)}$.

4.2.8. Теорема. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) *если* $x \in \mathbb{V}$ *и* $y \in \mathbb{V}^{(B)}$, *то*

$$[\![y \in x^\wedge]\!] = \bigvee\{[\![y = u^\wedge]\!] : u \in x\};$$

(2) *если* $x, y \in \mathbb{V}$, *то*

$$x \in y \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models x^\wedge \in y^\wedge, \quad x = y \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models x^\wedge = y^\wedge;$$

(3) *отображение* $x \mapsto x^\wedge$ *инъективно;*

(4) *для любого* $y \in \mathbb{V}^{(2)}$ *существует единственный элемент* $x \in \mathbb{V}$ *такой, что* $\mathbb{V}^{(B)} \models x^\wedge = y$;

(5) *если* π *— полный гомоморфизм из* B *в* C, *то для каждого* $x \in \mathbb{V}$ *будет* $\pi^* x^\wedge = x^{\hat{\wedge}}$, *где* $(\,\cdot\,)^{\hat{\wedge}}$ *— каноническое вложение* $\mathbb{V}$ *в* $\mathbb{V}^{(C)}$.

$\lhd$ (1): Непосредственный подсчет с привлечением определений 4.1.4 и 4.2.7 дает

$$[\![y \in x^\wedge]\!] = \bigvee_{t \in \operatorname{dom}(x^\wedge)} x^\wedge(t) \wedge [\![t = y]\!] = \bigvee_{t \in x} x^\wedge(t^\wedge) \wedge [\![t^\wedge = y]\!] = \bigvee_{t \in x} [\![t^\wedge = y]\!].$$

(2): Предположим, что для всех $z \in \mathbb{V}$ таких, что $\operatorname{rank}(z) < \operatorname{rank}(y)$, выполнены соотношения

$$(\forall\, x)(x \in z \leftrightarrow [\![x^\wedge \in z^\wedge]\!] = \mathbb{1}),$$
$$(\forall\, x)(x = z \leftrightarrow [\![x^\wedge = z^\wedge]\!] = \mathbb{1}),$$
$$(\forall\, x)(z \in x \leftrightarrow [\![z^\wedge \in x^\wedge]\!] = \mathbb{1}).$$

Согласно (1) $[\![x^\wedge \in y^\wedge]\!] = \bigvee\{[\![t^\wedge = x^\wedge]\!] : t \in y\}$. Поскольку $\operatorname{rank}(t) < \operatorname{rank}(y)$ при $t \in y$, с учетом индукционного предположения получим, что $[\![x^\wedge \in y^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ в том и только в том случае, если $[\![t^\wedge = x^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ или $t = x$ для некоторого $t \in y$. Далее, по определению

$$[\![x^\wedge = y^\wedge]\!] = \bigwedge_{t \in x} [\![t^\wedge \in y^\wedge]\!] \wedge \bigwedge_{s \in y} [\![s^\wedge \in x^\wedge]\!]$$

и $\operatorname{rank}(s) < \operatorname{rank}(y)$ при $s \in y$. Следовательно, в силу уже доказанного и по индукционному предположению правая часть последнего равенства равна единице в том и только в том случае, если $t \in y$ для всех $t \in x$ и $s \in x$ для всех $s \in y$, т. е. если $x = y$. Вновь привлекая (1), получаем

$$[\![y^\wedge \in x^\wedge]\!] = \bigvee\{[\![y^\wedge = t^\wedge]\!] : t \in x\}.$$

Значит, $[\![y^\wedge \in x^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ имеет место лишь тогда, когда $[\![y^\wedge = t^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого $t \in x$. Последнее же в силу уже установленного равносильно соотношению $(\exists\, t \in x)(t = y)$, т. е. включению $y \in x$.

(3): Вытекает из (2).

(4): Предположим, что $y \in \mathbb{V}^{(2)}$ и для любого $t \in \operatorname{dom}(y)$ уже установлено, что существует $u \in \mathbb{V}$, для которого $[\![t = u^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Определим $x \in \mathbb{V}$ равенством

$$x := \{u \in \mathbb{V} : (\exists\, t \in \operatorname{dom}(y))(y(t) = \mathbb{1} \wedge [\![u^\wedge = t]\!] = \mathbb{1})\}.$$

Тогда для $u \in x$ будет

$$[\![u^\wedge \in y]\!] = \bigvee_{t \in \operatorname{dom}(y)} y(t) \wedge [\![t = u^\wedge]\!] = \mathbb{1}.$$

Кроме того, используя индукционное предположение, для $t \in \operatorname{dom}(y)$ выводим:

$$y(t) \leqslant [\![t \in x^\wedge]\!] = \bigvee_{u \in x} [\![t = u^\wedge]\!].$$

Из всего сказанного следует, что

$$[\![x^\wedge = y]\!] = \bigwedge_{t \in \operatorname{dom}(y)} y(t) \Rightarrow [\![t \in x^\wedge]\!] \wedge \bigwedge_{u \in x} [\![u^\wedge \in y]\!] = \mathbb{1}.$$

(5): Проведем индукцию по вполне фундированному отношению $y \in x$. Предположим, что $(\forall\, y \in x)(\pi^* y^\wedge = y^{\hat{\wedge}})$. Тогда

$$\operatorname{dom}(\pi^* x^\wedge) = \{y^{\hat{\wedge}} : y \in x\} = \operatorname{dom}(x^{\hat{\wedge}}).$$

Стало быть, для $y \in x$ будет

$$(\pi^* x^\wedge)(y^{\hat{\wedge}}) = (\pi^* x^\wedge)(\pi^* y^\wedge) = \bigvee \{\pi(x^\wedge(y^\wedge)) : z \in \operatorname{dom}(x^\wedge), \pi^* z = \pi^* y^\wedge\} \geqslant$$
$$\geqslant \pi(x^\wedge(y^\wedge)) = \mathbb{1}_B = x^{\hat{\wedge}}(y^{\hat{\wedge}}).$$

Итак, $\pi^* x^\wedge = x^{\hat{\wedge}}$, что обосновывает индукционный шаг. $\triangleright$

4.2.9. *Пусть* $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}$ *и* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — *формула* ZFC. *Тогда имеют место утверждения*

(1) $\varphi(u_1, \dots, u_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(2)} \models \varphi(u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)$;

(2) *если* φ — *ограниченная формула, то*

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge);$$

(3) *если* φ — *формула класса* Σ_1, *то*

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) \to \mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge).$$

$\triangleleft$ Заметим, что в проверке нуждается лишь утверждение (1), так как (2) и (3) вытекают из (1), 4.2.4 (1) и 4.2.5 (1). Для атомарных формул (1) обеспечено 4.2.8 (2). При индукции по длине формулы φ нетривиальный шаг возникает лишь в том случае, когда появляется квантор существования. Допустим, что φ имеет вид $(\exists\, x)\psi(x, u_1, \dots, u_n)$ и $[\![\varphi(u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$, причем для ψ утверждение (1) выполнено. Тогда

$$\mathbb{1} = \bigvee \left\{[\![\psi(u, u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!]^2 : u \in \mathbb{V}^{(2)}\right\}.$$

Следовательно, $[\![\psi(v, u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого $v \in \mathbb{V}^{(2)}$. Согласно 4.2.8 (4) существует такой $u_0 \in \mathbb{V}$, что $[\![u_0^\wedge = u]\!] = \mathbb{1}$. Отсюда в силу 4.1.8 (7)

$$\mathbb{1} = [\![\psi(v, u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!] \wedge [\![v = u_0^\wedge]\!] \leqslant [\![\psi(u_0^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!].$$

По индукционному допущению имеет место $\psi(u_0, \dots, u_n)$. Значит, верно также и $\varphi(u_1, \dots, u_n)$. Наоборот, если $\varphi(u_1, \dots, u_n)$, то для некоторого $u_0 \in \mathbb{V}$ будет $\psi(u_0, u_1, \dots, u_n)$. По индукционному предположению $[\![\psi(u_0^\wedge, u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$. Еще и $[\![(\exists\, x)\psi(x, u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!] \geqslant [\![\psi(u_0^\wedge, u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!]$, откуда $[\![\varphi(u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$. $\triangleright$

4.3. Перемешивание и принцип максимума

Рассмотрим семейство функций $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$, заданных на некотором множестве A. Если $(A_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство попарно непересекающихся подмножеств множества A, то на A можно определить функцию f, сужение которой на A_ξ совпадает с сужением f_ξ на A_ξ при всех $\xi \in \Xi$. Эту функцию естественно назвать *дизъюнктным перемешиванием* семейства $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Булевозначный универсум полон в том смысле, что в нем существуют дизъюнктные перемешивания любых семейств его элементов. Указанное обстоятельство позволяет строить различные специальные элементы внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Перейдем к деталям.

4.3.1. Рассмотрим антицепь $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в булевой алгебре B и семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов универсума $\mathbb{V}^{(B)}$. *Дизъюнктным перемешиванием* или просто *перемешиванием семейства* (x_ξ) *относительно антицепи* (b_ξ) (изредка говорят: с *вероятностями* (b_ξ)) называют элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$, определенный соотношениями

$$\operatorname{dom}(x) := \bigcup\{\operatorname{dom}(x_\xi) : \xi \in \Xi\},$$

$$x(t) := \bigvee\{b_\xi \wedge x_\xi(t) : \xi \in \Xi\} \quad (t \in \operatorname{dom}(x)).$$

В последнем равенстве подразумевается, что $x_\xi(t) = \mathbb{0}$ при $t \in \operatorname{dom}(x) \setminus \operatorname{dom}(x_\xi)$. Поскольку $\alpha := \sup_{\xi\in\Xi} \rho(x_\xi) \in \mathrm{On}$, то $\operatorname{dom}(x) \subset \mathbb{V}_{\alpha+1}^{(B)}$. Значит, приведенные соотношения действительно определяют некоторый элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$. Приняты символические обозначения: $\operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi) := \operatorname{mix}\{b_\xi x_\xi : \xi \in \Xi\} := x$.

Для изучения основных свойств перемешиваний докажем один вспомогательный факт.

4.3.2. *Пусть $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $b \in B$. Определим функцию bx соотношениями*

$$\operatorname{dom}(bx) := \operatorname{dom}(x), \quad bx : t \mapsto b \wedge x(t) \quad (t \in \operatorname{dom}(x)).$$

Тогда $bx \in \mathbb{V}^{(B)}$ и для любых x и $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ справедливы равенства

$$[\![x \in by]\!] = b \wedge [\![x \in y]\!], \quad [\![bx = by]\!] = b \Rightarrow [\![x = y]\!].$$

$\triangleleft$ Проверка первого соотношения состоит в непосредственном подсчете булевых значений истинности с привлечением бесконечного дистрибутивного закона 2.1.6 (2). В самом деле,

$$[\![x \in by]\!] = \bigvee_{t\in\operatorname{dom}(by)} (by)(t) \wedge [\![t = x]\!] = b \wedge \bigvee_{t\in\operatorname{dom}(y)} y(t) \wedge [\![t = x]\!] = b \wedge [\![x \in y]\!].$$

Далее, пользуясь первым равенством и применяя последовательно 2.1.5 (2), 2.1.6 (6), 2.1.5 (4), 2.1.5 (2), 2.1.6 (6), выводим:

$$[\![bx = by]\!] = \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(by)} (by)(t) \Rightarrow [\![t \in bx]\!] \wedge \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(bx)} (bx)(t) \Rightarrow [\![t \in by]\!] =$$

$$= \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(y)} (b \wedge y(t)) \Rightarrow (b \wedge [\![t \in x]\!]) \wedge \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(x)} (b \wedge x(t)) \Rightarrow (b \wedge [\![t \in y]\!]) =$$

$$= \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(y)} ((b \wedge y(t)) \Rightarrow b) \wedge ((b \wedge y(t)) \Rightarrow [\![t \in x]\!]) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(x)} ((b \wedge x(t)) \Rightarrow b) \wedge ((b \wedge x(t)) \Rightarrow [\![t \in y]\!]) =$$

$$= \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(y)} b \Rightarrow (y(t) \Rightarrow [\![t \in x]\!]) \wedge \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(x)} b \Rightarrow (x(t) \Rightarrow [\![t \in y]\!]) = b \Rightarrow [\![x = y]\!]. \ \rhd$$

4.3.3. Теорема (принцип перемешивания)**.** *Пусть* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *— антицепь в* B *и* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *— семейство элементов* $\mathbb{V}^{(B)}$*. Положим* $x := \mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi)$*. Тогда*

$$[\![x = x_\xi]\!] \geqslant b_\xi \quad (\xi \in \Xi).$$

Если, кроме того, $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *— разбиение единицы и элемент* $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ *удовлетворяет соотношению* $[\![y = x_\xi]\!] \geqslant b_\xi$ *при всех* $\xi \in \Xi$*, то* $[\![x = y]\!] = \mathbb{1}$*.*

$\lhd$ По определению перемешивания $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ для любого $\xi \in \Xi$. Привлекая 4.3.2, выводим:

$$\mathbb{1} = [\![b_\xi x = b_\xi x_\xi]\!] = b_\xi \Rightarrow [\![x_\xi = x]\!].$$

Значит, $[\![x = x_\xi]\!] \geqslant b_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$ согласно 2.1.5 (4).

Предположим теперь, что (b_ξ) — разбиение единицы и $[\![y = x_\xi]\!]$ $(\xi \in \Xi)$. Тогда в силу 4.1.8 (4) будет

$$b_\xi \leqslant [\![x = x_\xi]\!] \wedge [\![x_\xi = y]\!] \leqslant [\![x = y]\!] \quad (\xi \in \Xi).$$

Следовательно,

$$\mathbb{1} = \bigvee\{b_\xi : \xi \in \Xi\} \leqslant [\![x = y]\!] \leqslant \mathbb{1},$$

что и требовалось. $\rhd$

4.3.4. *Возьмем* $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ *и определим* $\bar{x} \in \mathbb{V}^{(B)}$ *соотношениями*

$$\mathrm{dom}(\bar{x}) := \mathrm{dom}(x), \quad \bar{x}(t) := [\![t \in x]\!] \quad (t \in \mathrm{dom}(x)).$$

Тогда $\mathbb{V}^{(B)} \models x = \bar{x}$*.*

$\lhd$ К цели приводят следующие несложные вычисления, использующие определения из 4.1.4, а также 2.1.5 (4) и 4.1.8 (2):

$$[\![x = \bar{x}]\!] = \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(x)} x(t) \Rightarrow [\![t \in \bar{x}]\!] \wedge \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(\bar{x})} [\![t \in x]\!] \Rightarrow [\![t \in x]\!] =$$

$$= \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(x)} x(t) \Rightarrow \Bigg(\bigvee_{u\in\mathrm{dom}(\bar{x})} \bar{x}(u) \wedge [\![u = t]\!]\Bigg) \geqslant \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(x)} x(t) \Rightarrow [\![t \in x]\!] = \mathbb{1}. \ \rhd$$

4.3.5. *Возьмем разбиение единицы* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset B$ *и семейство* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathbb{V}^{(B)}$. *Положим* $x := \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi)$. *Тогда справедливы утверждения*:

(1) *если* $(x'_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathbb{V}^{(B)}$ *и* $\mathbb{V}^{(B)} \models x_\xi = x'_\xi$ $(\xi \in \Xi)$, *то*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models x = \operatorname*{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x'_\xi);$$

(2) *если элемент* $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ *таков, что* $\operatorname{dom}(y) = \operatorname{dom}(x)$ *и*

$$y(t) := \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi \wedge [\![t \in x_\xi]\!] \quad (t \in \operatorname{dom}(y)),$$

то $\mathbb{V}^{(B)} \models x = y$.

$\lhd$ Пусть $x' := \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x'_\xi)$. Из условий выводим:

$$b_\xi \leqslant [\![x_\xi = x'_\xi]\!] \wedge [\![x_\xi = x]\!] \wedge [\![x'_\xi = x']\!] \leqslant [\![x = x']\!].$$

Стало быть, $[\![x = x']\!] = \mathbb{1}$. Второе утверждение следует из первого и из 4.3.4. $\rhd$

4.3.6. *Для любых* $b \in B$ *и* $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ *справедливы формулы*

$$[\![bx = x]\!] = b \vee [\![x = \varnothing]\!], \quad [\![bx = \varnothing]\!] = b^* \vee [\![x = \varnothing]\!].$$

В частности,

$$\mathbb{V}^{(B)} \models bx = \operatorname{mix}\{bx, b^*\varnothing\}.$$

$\lhd$ Заметим, что $[\![t \in bx \to t \in x]\!] = \mathbb{1}$, ибо в силу 4.3.2 $[\![t \in bx]\!] = b \wedge [\![t \in x]\!] \leqslant [\![t \in x]\!]$. Значит, $[\![bx = x \leftrightarrow (\forall\, t)(t \in x \to t \in bx)]\!] = \mathbb{1}$. С учетом этого равенства вычисляем (см. определение $\Rightarrow$ в 2.1.5, а также 2.1.2 (4, 6), 2.1.6 (1), 4.1.7):

$$[\![bx = x]\!] = \bigwedge_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} [\![t \in x]\!] \Rightarrow [\![t \in bx]\!] = \bigwedge_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} [\![t \in x]\!]^* \vee (b \wedge [\![t \in x]\!]) =$$

$$= \bigwedge_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} (b \vee [\![t \in x]\!]^*) \wedge ([\![t \in x]\!]^* \vee [\![t \in x]\!]) = \bigwedge_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} b \vee [\![t \in x]\!]^* =$$

$$= b \vee \bigwedge_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} [\![t \in x]\!]^* = b \vee [\![(\forall\, t)(t \notin x)]\!] = b \vee [\![x = \varnothing]\!].$$

С другой стороны, вновь привлекая 4.3.2 и учитывая, что $b\varnothing = \varnothing$, можно написать

$$b^* \vee [\![x = \varnothing]\!] = b \Rightarrow [\![x = \varnothing]\!] = [\![bx = b\varnothing]\!] = [\![bx = \varnothing]\!]. \ \rhd$$

4.3.7. *Допустим, что* (b_ξ) — *разбиение единицы в* B, *а семейство* $(x_\xi) \subset \mathbb{V}^{(B)}$ *таково, что* $\mathbb{V}^{(B)} \models x_\xi \neq x_\eta$ *для любых* $\xi \neq \eta$. *Тогда существует элемент* $x \in \mathbb{V}^{(B)}$, *для которого* $[\![x = x_\xi]\!] = b_\xi$ *при всех* ξ.

$\lhd$ Положим $x := \operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$ и $a_\xi := [\![x = x_\xi]\!]$. По условию

$$a_\xi \wedge a_\eta = [\![x = x_\xi]\!] \wedge [\![x_\eta = x]\!] \leqslant [\![x_\xi \neq x_\eta]\!]^* = \mathbb{0}$$

при $\xi \neq \eta$. Кроме того, $b_\xi \leqslant a_\xi$ для всех ξ в силу свойств перемешивания. Таким образом, (a_ξ) также разбиение единицы в B. С другой стороны,

$$b_\xi^* = \bigvee_{\eta \neq \xi} b_\eta \leqslant \bigvee_{\eta \neq \xi} a_\eta = a_\xi^*$$

и поэтому $b_\xi^* \leqslant a_\xi^* \to b_\xi \geqslant a_\xi$. Итак, разбиения единицы (b_ξ) и (a_ξ) совпадают. $\triangleright$

Следующий факт, доказательство которого основано на перемешивании двух элементов, часто позволяет сократить объем вычислений.

4.3.8. *Рассмотрим B-формулы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Допустим, что для некоторого $u_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$ выполнено $[\![\varphi(u_0)]\!] = \mathbb{1}$. Тогда*

$$[\![(\forall\, x)(\varphi(x) \to \psi(x))]\!] = \bigwedge \big\{ [\![\psi(u)]\!] : \, u \in \mathbb{V}^{(B)},\, [\![\varphi(u)]\!] = \mathbb{1} \big\},$$

$$[\![(\exists\, x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))]\!] = \bigvee \big\{ [\![\psi(u)]\!] : \, u \in \mathbb{V}^{(B)},\, [\![\varphi(u)]\!] = \mathbb{1} \big\}.$$

$\triangleleft$ Докажем первое равенство. Прежде всего, очевидно (см. 4.1.7), что

$$c := [\![(\forall\, x)(\varphi(x) \to \psi(x))]\!] = \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\varphi(t)]\!] \Rightarrow [\![\psi(t)]\!] \leqslant$$

$$\leqslant \bigwedge_{\substack{t \in \mathbb{V}^{(B)} \\ [\![\varphi(t)]\!] = \mathbb{1}}} [\![\varphi(t)]\!]^* \vee [\![\psi(t)]\!] = \bigwedge_{\substack{t \in \mathbb{V}^{(B)} \\ [\![\varphi(t)]\!] = \mathbb{1}}} [\![\psi(t)]\!].$$

Обозначив правое крайнее выражение этой цепочки символом d, получим $c \leqslant d$.

Для обоснования обратного неравенства $d \leqslant c$ возьмем произвольный элемент $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ и положим $u := \operatorname{mix}\{bt, b^* u_0\}$, где $b := [\![\varphi(t)]\!]$. Тогда в силу 4.1.8 (7) и 4.3.3 можно оценить

$$b \leqslant [\![\varphi(t)]\!] \wedge [\![t = u]\!] \leqslant [\![\varphi(u)]\!],$$

$$b^* \leqslant [\![\varphi(u_0)]\!] \wedge [\![u = u_0]\!] \leqslant [\![\varphi(u)]\!].$$

Значит, $[\![\varphi(u)]\!] = \mathbb{1}$. Далее, по тем же соображениям

$$b \wedge [\![\psi(u)]\!] \leqslant [\![u = t]\!] \wedge [\![\psi(u)]\!] \leqslant [\![\psi(t)]\!].$$

Следовательно, законны оценки

$$[\![\psi(u)]\!] \leqslant b^* \vee (b \wedge [\![\psi(u)]\!]) \leqslant b^* \vee [\![\psi(t)]\!] = b \Rightarrow [\![\psi(t)]\!] = [\![\varphi(t)]\!] \Rightarrow [\![\psi(t)]\!].$$

Так как $d \leqslant [\![\psi(u)]\!]$, то $d \leqslant [\![\varphi(t)]\!] \Rightarrow [\![\psi(t)]\!]$ $(t \in \mathbb{V}^{(B)})$. Переходя к инфимуму по t в правой части последнего неравенства, получим $d \leqslant c$.

Второе равенство двойственно первому и выводится из него с помощью формул Моргана (см. 2.1.3 (2)). $\triangleright$

Установим теперь центральный результат настоящего параграфа — принцип максимума, утверждающий, что в формуле

$$[\![(\exists\, x)\varphi(x)]\!] = \bigvee \big\{ [\![\varphi(u)]\!] : \, u \in \mathbb{V}^{(B)} \big\}$$

точная верхняя граница достигается на некотором u_0 из $\mathbb{V}^{(B)}$.

4.3.9. Теорема (принцип максимума)**.** *Пусть* $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ *— некоторая формула, а* $u_1, \dots, u_n$ *— произвольные элементы из* $\mathbb{V}^{(B)}$*. Тогда существует* $u_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$ *такой, что*

$$[\![(\exists\, x)\varphi(x, u_1, \dots, u_n)]\!] = [\![\varphi(u_0, u_1, \dots, u_n)]\!].$$

В частности, если $\mathbb{V}^{(B)} \models (\exists\, x)\varphi(x, u_1, \dots, u_n)$*, то* $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(u_0, u_1, \dots, u_n)$ *для некоторого* $u_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$.

$\triangleleft$ По определению

$$b := [\![(\exists\, x)\varphi(x, u_1, \dots, u_n)]\!] = \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\varphi(u, u_1, \dots, u_n)]\!].$$

Класс $A := \{[\![\varphi(u, u_1, \dots, u_n)]\!] : u \in \mathbb{V}^{(B)}\}$ является подмножеством алгебры B. Ввиду 2.1.10 (1) существуют разбиение $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элемента b и семейство $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathbb{V}^{(B)}$, для которых выполнены соотношения

$$b_\xi \leqslant [\![\varphi(u_\xi, u_1, \dots, u_n)]\!] \quad (\xi \in \Xi),$$
$$b = \bigvee \big\{[\![\varphi(u_\xi, u_1, \dots, u_n)]\!] : \xi \in \Xi\big\}.$$

Положим $u_0 := \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi u_\xi)$ и заметим, что по 4.3.3 будет $b_\xi \leqslant [\![u_0 = u_\xi]\!]$ $(\xi \in \Xi)$. Как видно,

$$[\![\varphi(u_0, u_1, \dots, u_n)]\!] \leqslant b.$$

С другой стороны, привлекая 4.1.8 (7), получим

$$b_\xi \leqslant [\![u_0 = u_\xi]\!] \wedge [\![\varphi(u_\xi, u_1, \dots, u_n)]\!] \leqslant [\![\varphi(u_0, \dots, u_n)]\!].$$

Следовательно,

$$[\![\varphi(u_0, \dots, u_n)]\!] \geqslant \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi = b.$$

Вторая часть теоремы — непосредственное следствие первой. $\triangleright$

4.4. Принцип переноса

В этом параграфе мы установим, что универсум $\mathbb{V}^{(B)}$, построенный над произвольной полной булевой алгеброй B, вместе с булевыми функциями истинности $[\![\,\cdot \in \cdot\,]\!]$ и $[\![\,\cdot = \cdot\,]\!]$ служит булевозначной моделью теории множеств ZFC. Точнее, справедлив следующий факт.

4.4.1. Теорема (принцип переноса)**.** *Всякая теорема* ZFC *истинна в* $\mathbb{V}^{(B)}$*. Символически:* $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{ZFC}$.

Доказательство этой теоремы состоит в проверке соотношений $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{ZF}_k$ для $k := 1, 2, \dots, 6$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{AC}$. Значительная часть усилий при этом приходится на рутинный подсчет, детали которого мы приводим ради полноты изложения.

4.4.2. *Аксиома экстенсиональности* ZF_1 *истинна в* $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x)(\forall\, y)(x = y \leftrightarrow (\forall\, z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)).$$

$\lhd$ Доказательство немедленно получается из определения булевой оценки истинности равенства 4.1.4 (2) и из 4.1.9. В самом деле, для любых x и $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ положим

$$c := c(x, y) := [\![(\forall\, z \in x)(z \in y)]\!] = \bigwedge_{z \in \operatorname{dom}(x)} x(z) \Rightarrow [\![z \in y]\!].$$

Очевидно, что $c(x, y) \wedge c(y, x) = [\![x = y]\!]$ и, с другой стороны,

$$c(x, y) \wedge c(y, x) = [\![(\forall\, z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)]\!].$$

Отсюда в силу 2.1.5 (5) заключаем

$$[\![x = y \leftrightarrow (\forall\, z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)]\!] = \mathbb{1} \quad (x, y \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Переходя к инфимуму по x и y, получаем требуемое. $\rhd$

4.4.3. *Аксиома объединения* ZF_2 *истинна в* $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(z \in y \leftrightarrow (\exists\, u \in x)(z \in u)).$$

$\lhd$ Возьмем произвольный элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ и определим $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ соотношениями

$$\operatorname{dom}(y) := \bigcup \{\operatorname{dom}(u) :\ u \in \operatorname{dom}(x)\},$$
$$y(t) := [\![(\exists\, u \in x)(t \in u)]\!] \quad (t \in \operatorname{dom}(y)).$$

Достаточно показать, что $[\![y = \bigcup x]\!] = \mathbb{1}$. В силу 4.1.9 выполняется

$$\Big[\!\Big[y \subset \bigcup x\Big]\!\Big] = [\![(\forall\, t \in y)(\exists\, u \in x)(t \in u)]\!] =$$
$$= \bigwedge_{t \in \operatorname{dom}(y)} [\![(\exists\, u \in x)(t \in u)]\!] \Rightarrow [\![(\exists\, u \in x)(t \in u)]\!] = \mathbb{1}.$$

Далее заметим, что при $u \in \operatorname{dom}(x)$ и $z \in \operatorname{dom}(u)$ будет (см. 4.1.8 (2) и 4.1.9)

$$x(u) \wedge u(z) \leqslant x(u) \wedge [\![z \in u]\!] \leqslant \bigvee_{u \in \operatorname{dom}(x)} x(u) \wedge [\![z \in u]\!] =$$
$$= [\![(\exists\, u \in x)(z \in u)]\!] = y(z) \leqslant [\![z \in y]\!].$$

Отсюда $x(u) \Rightarrow (u(z) \Rightarrow [\![z \in y]\!]) = \mathbb{1}$ ввиду 2.1.5 (2, 4). Учитывая это равенство и привлекая 4.1.9, 2.1.6 (6), вычисляем

$$\Big[\!\Big[\bigcup x \subset y\Big]\!\Big] = [\![(\forall\, u \in x)(\forall\, z \in u)(z \in y)]\!] =$$
$$= \bigwedge_{u \in \operatorname{dom}(x)} x(u) \Rightarrow \Bigg(\bigwedge_{z \in \operatorname{dom}(u)} u(z) \Rightarrow [\![z \in y]\!]\Bigg) =$$
$$= \bigwedge_{u \in \operatorname{dom}(x)} \bigwedge_{z \in \operatorname{dom}(u)} x(u) \Rightarrow (u(z) \Rightarrow [\![z \in y]\!]) = \mathbb{1}.$$

Значит, $[\![y=\bigcup x]\!]=\mathbb{1}$. Следовательно,

$$\Big[\!\!\Big[(\exists\, u)\,(u=\bigcup x)\Big]\!\!\Big]=\bigvee_{u\in\mathbb{V}^{(B)}}\Big[\!\!\Big[u=\bigcup x\Big]\!\!\Big]\geqslant\Big[\!\!\Big[y=\bigcup x\Big]\!\!\Big]=\mathbb{1}.$$

Переход к инфимуму по $x\in\mathbb{V}^{(B)}$ дает требуемое:

$$\Big[\!\!\Big[(\forall\, x)(\exists\, y)\,(y=\bigcup x)\Big]\!\!\Big]=\bigwedge_{x\in\mathbb{V}^{(B)}}\Big[\!\!\Big[(\exists\, y)\Big(y=\bigcup x\Big)\Big]\!\!\Big]=\mathbb{1}.\ \rhd$$

4.4.4. *Аксиома степени* ZF_3 *истинна в* $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$\mathbb{V}^{(B)}\models(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)\,(z\in y\leftrightarrow z\subset x).$$

$\lhd$ Рассмотрим произвольный элемент $x\in\mathbb{V}^{(B)}$ и определим $y\in\mathbb{V}^{(B)}$ так:

$$\mathrm{dom}(y):=B^{\mathrm{dom}(x)},\quad y(z):=[\![z\subset x]\!]\quad(z\in\mathrm{dom}(y)).$$

Достаточно показать, что $[\![z\in y\leftrightarrow z\subset x]\!]=\mathbb{1}$ для каждого $z\in\mathbb{V}^{(B)}$. Нетрудно видеть, что

$$[\![z\in y]\!]=\bigvee_{t\in\mathrm{dom}(y)}y(t)\wedge[\![t=z]\!]=\bigvee_{t\in\mathrm{dom}(y)}[\![t\subset x]\!]\wedge[\![t=z]\!]\leqslant[\![z\subset x]\!].$$

Следовательно, $[\![z\in y\to z\subset x]\!]=\mathbb{1}$ согласно 2.1.5 (4). Теперь нужно обосновать равенство $[\![z\subset x\to z\in y]\!]=\mathbb{1}$. Для этого мы несколько модифицируем z, а именно, рассмотрим элемент $z'\in\mathrm{dom}(y)$ такой, что $\mathrm{dom}(z'):=\mathrm{dom}(x)$ и $z'(t):=[\![t\in z]\!]$ $(t\in\mathrm{dom}(z'))$. Тогда для каждого $t\in\mathbb{V}^{(B)}$ будет

$$[\![t\in z']\!]=\bigvee_{u\in\mathrm{dom}(z')}z'(u)\wedge[\![t=u]\!]=\bigvee_{u\in\mathrm{dom}(z')}[\![u\in z]\!]\wedge[\![u=t]\!]\leqslant[\![t\in z]\!],$$

значит, $[\![z'\subset z]\!]=\mathbb{1}$. С другой стороны, ввиду 4.1.8 (5) и 4.1.9 будет

$$\begin{aligned}[\![t\in z\cap x]\!]&=\bigvee_{u\in\mathrm{dom}(x)}x(u)\wedge[\![t=u]\!]\wedge[\![t\in z]\!]\leqslant\\&\leqslant\bigvee_{u\in\mathrm{dom}(x)}z'(u)\wedge[\![t=u]\!]=[\![t\in z']\!].\end{aligned}$$

Стало быть, $[\![z\cap x\subset z']\!]=\mathbb{1}$ (вновь нужна апелляция к 2.1.5 (4)). Кроме того,

$$\begin{aligned}[\![z\subset x]\!]&=\bigwedge_{t\in\mathbb{V}^{(B)}}[\![t\in z]\!]\Rightarrow[\![t\in x]\!]\leqslant\bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(z')}z'(t)\Rightarrow[\![t\in x]\!]=\\&=[\![(\forall\, t\in z')(t\in x)]\!]=[\![z'\subset x]\!]=y(z')\leqslant[\![z'\in y]\!].\end{aligned}$$

Подытоживая все сказанное относительно z и z', получаем

$$[\![z\subset x]\!]\leqslant[\![x\cap z\subset z']\!]\wedge[\![z'\subset z]\!]\wedge[\![z\subset x]\!]\leqslant[\![z=z']\!],$$
$$[\![z\subset x]\!]\leqslant[\![z'\in y]\!].$$

Из последних двух соотношений немедленно вытекает

$$[\![z \subset x]\!] = [\![z \subset x]\!] \wedge [\![z = z']\!] \leqslant [\![z' \in y]\!] \wedge [\![z = z']\!] \leqslant [\![z \in y]\!],$$

т. е. $[\![z \subset x]\!] \leqslant [\![z \in y]\!]$, что равносильно требуемому из-за 2.1.5 (4). $\triangleright$

4.4.5. *Аксиома подстановки* ZF_4^{φ} *истинна в* $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, u)(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)\ (\varphi(u, v_1) \wedge \varphi(u, v_2) \to v_1 = v_2) \to \\ \to (\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, t)((\exists\, s \in x)\ (\varphi(s,t) \leftrightarrow t \in y)).$$

$\triangleleft$ В исчислении предикатов аксиому подстановки можно вывести из аксиомы выделения (см. 1.3.6) и формулы

$$\Phi := (\forall\, x)((\forall\, t \in x)(\exists\, u)\varphi(t,u) \to (\exists\, y)(\forall\, t \in x)(\exists\, u \in y)\ \varphi(t,u))$$

(y не входит свободно в φ), т. е. $\Phi \wedge \Psi \to \mathrm{ZF}_4^{\varphi}$, где Ψ — аксиома выделения. В силу этого достаточно показать, что $\mathbb{V}^{(B)} \models \Phi$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models \Psi$.

(1): $\mathbb{V}^{(B)} \models \Psi := (\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, t)(t \in y \leftrightarrow t \in x \wedge \psi(t))$.
Возьмем произвольный элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ и рассмотрим функцию $y \in \mathbb{V}^{(B)}$, определяемую формулами

$$\mathrm{dom}(y) := \mathrm{dom}(x), \quad y(t) := x(t) \wedge [\![\psi(t)]\!] \quad (t \in \mathrm{dom}(y)).$$

Тогда $[\![(\forall\, t)(t \in y \leftrightarrow t \in x \wedge \psi(t))]\!] = a \wedge b$, где

$$a := [\![(\forall\, t \in y)(t \in x \wedge \psi(t))]\!], \quad b := [\![(\forall\, t \in x)(\psi(t) \to t \in y)]\!].$$

Однако из 4.1.8 (2) и 4.1.9 легко выводится, что $a = b = \mathbb{1}$. В самом деле,

$$a = \bigwedge_{t \in \mathrm{dom}(y)} y(t) \Rightarrow [\![t \in x \wedge \psi(t)]\!] = \\ = \bigwedge_{t \in \mathrm{dom}(y)} x(t) \wedge [\![\psi(t)]\!] \Rightarrow [\![t \in x]\!] \wedge [\![\psi(t)]\!] = \mathbb{1}.$$

Аналогично

$$b = \bigwedge_{t \in \mathrm{dom}(x)} x(t) \Rightarrow ([\![\psi(t)]\!] \Rightarrow [\![t \in y]\!]) = \\ = \bigwedge_{t \in \mathrm{dom}(x)} x(t) \wedge [\![\psi(t)]\!] \Rightarrow [\![t \in x]\!] \wedge [\![\psi(t)]\!] = \mathbb{1}.$$

(2): $\mathbb{V}^{(B)} \models \Phi$. Пусть x — произвольный элемент $\mathbb{V}^{(B)}$. Так как B — множество, то для каждого фиксированного $t \in \mathrm{dom}(x)$ множеством является класс

$$K := \left\{ [\![\varphi(t,u)]\!] :\ u \in \mathbb{V}^{(B)} \right\} \subset B.$$

Из аксиомы подстановки для множеств (т. е. в $\mathbb{V}$) вытекает существование такого ординала $\alpha(t)$, что

$$\left\{ [\![\varphi(t,u)]\!] :\ u \in V_{\alpha(t)}^{(B)} \right\} = K.$$

Положим $\alpha := \sup\{\alpha(t) : t \in \operatorname{dom}(x)\}$ и определим $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ формулами

$$\operatorname{dom}(y) := V_\alpha^{(B)}, \quad \operatorname{im}(y) = \{\mathbb{1}\}.$$

Тогда y — искомый элемент, как показывают следующие вычисления:

$$[\![(\forall\, t \in x)(\exists\, u)\varphi(t,u)]\!] = \bigwedge_{t \in \operatorname{dom}(x)} x(t) \Rightarrow \Bigg(\bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\varphi(t,u)]\!] \Bigg) =$$

$$= \bigwedge_{t \in \operatorname{dom}(x)} x(t) \Rightarrow \Bigg(\bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}_{\alpha(t)}} [\![\varphi(t,u)]\!] \Bigg) \leqslant \bigwedge_{t \in \operatorname{dom}(x)} x(t) \Rightarrow \Bigg(\bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}_{\alpha}} [\![\varphi(t,u)]\!] \Bigg) =$$

$$= \bigwedge_{t \in \operatorname{dom}(x)} x(t) \Rightarrow [\![(\exists\, u \in y)\varphi(t,u)]\!] = [\![(\forall\, t \in x)(\exists\, u \in y)\varphi(t,u)]\!]. \ \rhd$$

4.4.6. *Аксиома бесконечности* ZF_5 *истинна в* $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\exists\, x)(0 \in x \wedge (\forall\, t)(t \in x \to t \cup \{t\} \in x)).$$

$\lhd$ Эта аксиома удовлетворяется, если взять $x := \omega^\wedge$ (см. 4.2.7). Прежде всего, очевидно, что $[\![0^\wedge \in \omega^\wedge]\!] = \mathbb{1}$, так как $0^\wedge \in \operatorname{dom}(\omega^\wedge)$.

Отметим, что при $t \in \mathbb{V}$ и $u := t \cup \{t\}$ будет $[\![u^\wedge = t^\wedge \cup \{t^\wedge\}]\!] = \mathbb{1}$. В самом деле, из-за 4.2.8 (1) верно

$$[\![v \in u^\wedge]\!] = \bigvee_{s \in u} [\![s^\wedge = v]\!] = [\![t^\wedge = v]\!] \vee \bigvee_{s \in t} [\![s^\wedge = v]\!] =$$

$$= [\![t^\wedge = v]\!] \vee [\![v \in t^\wedge]\!] = [\![t^\wedge = v \vee v \in t^\wedge]\!] = [\![v \in t^\wedge \cup \{t^\wedge\}]\!].$$

Теперь с учетом этого на основании 4.1.9 и 4.2.8 (2) легко сосчитать:

$$[\![(\forall\, t \in \omega^\wedge)(t \cup \{t\}) \in \omega^\wedge]\!] = \bigwedge_{t \in \omega} [\![t^\wedge \cup \{t^\wedge\} \in \omega^\wedge]\!] = \bigwedge_{t \in \omega} [\![(t \cup \{t\})^\wedge \in \omega^\wedge]\!] = \mathbb{1}. \ \rhd$$

4.4.7. *Аксиома регулярности* ZF_6 *истинна в* $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x)(\exists\, y)(x = 0 \vee (y \in x \wedge y \cap x = 0)).$$

$\lhd$ Возьмем произвольный элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$. Покажем, что

$$b := [\![x \neq 0 \wedge (\forall\, y \in x)(y \cap x \neq 0)]\!] = \mathbb{0}_B.$$

Предположим, что $b \neq \mathbb{0}_B$. Так как $b \leqslant [\![(\exists\, u)(u \in x)]\!]$, то в силу принципа максимума 4.3.9 существует элемент $y_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $[\![y_0 \in x]\!] \wedge b \neq \mathbb{0}$, причем можно выбрать y_0 с наименьшим ординальным рангом $\rho(y_0)$ (см. 4.1.2), т. е. $\rho(y_0) \leqslant \rho(y)$ при $[\![y \in x]\!] \wedge b \neq \mathbb{0}$ $(y \in \mathbb{V}^{(B)})$.

Так как, кроме того, для каждого $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ верна оценка

$$[\![y \in x]\!] \wedge b \leqslant [\![y \cap x \neq 0]\!] = \bigvee_{z \in \operatorname{dom}(y)} y(z) \wedge [\![z \in x]\!],$$

то $[\![z \in x]\!] \wedge [\![y_0 \in x]\!] \wedge b \neq \mathbb{0}$ для некоторого $z \in \operatorname{dom}(y_0)$. Однако по определению ординального ранга из 4.1.2 $\rho(z) < \rho(y_0)$, что противоречит выбору y_0. Таким образом, $b = \mathbb{0}_B$. Отсюда

$$\mathbb{1}_B = b^* = [\![\neg(x \neq 0 \wedge (\forall\, y \in x)(y \cap x \neq 0))]\!] = [\![(\exists\, y)(x = 0 \vee (y \in x \wedge y \cap x = 0))]\!].$$

Переход к инфимуму по $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ завершает доказательство. $\triangleright$

4.4.8. Осталось проверить истинность аксиомы выбора внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Для этого нам потребуются еще некоторые вспомогательные построения.

Рассмотрим произвольные элементы $x, y \in \mathbb{V}^{(B)}$. Определим одноэлементное множество $\{x\}^B$, неупорядоченную пару $\{x, y\}^B$ и упорядоченную пару $(x, y)^B$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ соотношениями

$$\operatorname{dom}(\{x\}^B) := \{x\}, \quad \operatorname{im}(\{x\}^B) := \{\mathbb{1}\};$$
$$\operatorname{dom}(\{x, y\}^B) := \{x, y\}, \quad \operatorname{im}(\{x, y\}^B) := \{\mathbb{1}\};$$
$$(x, y)^B := \{\{x\}^B, \{x, y\}^B\}^B.$$

Элементы $\{x\}^B$, $\{x, y\}^B$ и $(x, y)^B \in \mathbb{V}^{(B)}$ соответствуют своим названиям.

Справедливы утверждения

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, t)(t \in \{x\}^B \leftrightarrow t = x),$$
$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, t)(t \in \{x, y\}^B \leftrightarrow t = x \vee t = y),$$
$$\mathbb{V}^{(B)} \models \text{ «}(x, y)^B \text{ — \textit{упорядоченная пара элементов} } x \text{ \textit{и} } y\text{»}.$$

В сокращенной записи:

$$[\![\{x\}^B = \{x\}]\!] = [\![\{x, y\}^B = \{x, y\}]\!] = [\![(x, y)^B = (x, y)]\!] = \mathbb{1}.$$

$\triangleleft$ Проверим, например, утверждение относительно неупорядоченной пары. Для любого $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ будет

$$[\![t \in \{x, y\}^B]\!] = \bigvee\{[\![t = s]\!] : s \in \operatorname{dom}(\{x, y\}^B)\} =$$
$$= [\![t = x]\!] \vee [\![t = y]\!] = [\![t = x \vee t = y]\!].$$

Следовательно,

$$[\![(\forall\, t)(t \in \{x, y\}^B \leftrightarrow t = x \vee t = y)]\!] = \mathbb{1}. \ \triangleright$$

4.4.9. Введенные в предыдущем пункте и относящиеся к паре элементов понятия можно легко обобщить на случай n-ок для произвольного $n > 2$. Пусть $x : n \to \mathbb{V}^{(B)}$. Тогда по определению $s := (x(0), \ldots, x(n-1))^B \in \mathbb{V}^{(B)}$, если существует отображение $y : n \to \mathbb{V}^{(B)}$ такое, что

$$y(0) = x(0), \quad y(n-1) = s,$$
$$y(k) = (y(k-1), x(k))^B \quad (0 < k \leqslant n-1).$$

Ясно, что тем самым определена функция из $(\mathbb{V}^{(B)})^n$ в $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$(x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1})^B \quad (x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Отметим одно важное свойство этой функции, ограничившись для простоты случаем $n = 2$. Напомним, что для любых x, y, x', $y' \in \mathbb{V}$ справедлива эквивалентность

$$(x, y) = (x', y') \leftrightarrow x = x' \wedge y = y'.$$

Это утверждение является теоремой ZF. Значит, оно верно и в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ согласно 4.4.2–4.4.7. Следовательно, для любых x, y, x', $y' \in \mathbb{V}^{(B)}$ выполняется

$$[\![(x, y) = (x', y')]\!] = [\![x = x']\!] \wedge [\![y = y']\!].$$

Так как $(x, y)^B$ — упорядоченная пара внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то будет

$$[\![(x, y)^B = (x', y')^B]\!] = [\![x = x']\!] \wedge [\![y = y']\!].$$

В частности,

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (x, y)^B = (x', y')^B \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models x = x' \wedge y = y',$$

т. е. функция $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^B$ «инъективна во внутреннем смысле». Разумеется, она инъективна и в смысле $\mathbb{V}$, т. е. если $(x, y)^B$ и $(x', y')^B$ совпадают как элементы $\mathbb{V}$, то $x = x'$ и $y = y'$. Но все же это два разных свойства.

4.4.10. Напомним, что согласно теореме 1.5.3 ординал можно определить как транзитивное множество, линейно упорядоченное отношением принадлежности E. В символической записи

$$\mathrm{Ord}\,(x) \leftrightarrow ((\forall\, u \in x)(\forall\, v \in u)(v \in x) \wedge (\forall\, u \in x)(\forall\, v \in x)(u \in v \vee u = v \vee v \in u)).$$

Отсюда видно, что $\mathrm{Ord}\,(x)$ — ограниченная формула. Значит, в силу 4.2.9 (2) верно

$$\alpha \in \mathrm{On} \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Ord}\,(\alpha^\wedge).$$

Кроме того, в 4.2.8 (2) установлено, что

$$[\![\alpha^\wedge = \beta^\wedge]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow \alpha = \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathrm{On}).$$

4.4.11. *Аксиома выбора* AC *истинна в* $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x)(\exists\, y)\,(y \text{ — выбирающая функция для } x).$$

$\lhd$ В теории ZF можно доказать, что для x найдется выбирающая функция при условии, что существуют ординал α и функция f, для которых $\alpha = \mathrm{dom}(f)$ и $\mathrm{im}(f) \supset u := \bigcup x$. В самом деле, выбирающую функцию y можно определить по формуле

$$(t, s) \in y \leftrightarrow s \in t \wedge t \in x \wedge (\exists\, \alpha_0 \in \alpha)\,(f(\alpha_0) = s) \wedge$$
$$\wedge (\forall\, \beta \in \alpha)(f(\beta) \in t \to \alpha_0 \leqslant \beta).$$

Таким образом, $y(t) = f(\alpha_0)$, где α_0 — наименьший элемент множества ординалов $\{\beta \in \alpha : f(\beta) \in t\}$.

В силу 4.4.2–4.4.7 доказанное утверждение является истинным внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Значит, нам осталось проверить, что

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, u)(\exists\, \alpha)(\exists\, f)(\mathrm{Ord}\,(\alpha) \wedge \mathrm{Fnc}\,(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = \alpha \wedge \mathrm{im}(f) \supset u).$$

Возьмем произвольный элемент $u \in \mathbb{V}^{(B)}$ и, пользуясь аксиомой выбора для множеств, подберем ординал α и функцию g так, чтобы $\mathrm{dom}(g) = \alpha$ и $\mathrm{dom}(u) \subset \mathrm{im}(g) \subset \mathbb{V}^{(B)}$. Определим $f \in \mathbb{V}^{(B)}$ соотношением

$$f := \{(\beta^\wedge, g(\beta))^B : \beta < \alpha\} \times \{\mathbb{1}_B\}.$$

Покажем, что f удовлетворяет всем требуемым условиям.

(1): $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «f — бинарное отношение». Действительно, для произвольного $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ мы имеем

$$[\![t \in f]\!] = \bigvee_{\beta<\alpha} [\![t = (\beta^\wedge, g(\beta))^B]\!] \leqslant$$
$$\leqslant \bigvee \{[\![t = (x, y)^B]\!] : x, y \in \mathbb{V}^{(B)}\} = [\![(\exists\, x)(\exists\, y)(t = (x, y))]\!].$$

(2): $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Fnc}\,(f)$. Ввиду (1) нужно лишь показать однозначность f внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Возьмем произвольные $t, s_1, s_2 \in \mathbb{V}^{(B)}$ и подсчитаем, применяя последовательно 4.1.4 (1), 4.4.9, 4.1.8 (4), 4.2.8 (2):

$$[\![(t, s_1) \in f \wedge (t, s_2) \in f]\!] = [\![(t, s_1)^B \in f]\!] \wedge [\![(t, s_2)^B \in f]\!] =$$
$$= \bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{\gamma<\alpha} [\![(t, s_1)^B = (\beta^\wedge, g(\beta))^B]\!] \wedge [\![(t, s_2)^B = (\gamma^\wedge, g(\gamma))^B]\!] =$$
$$= \bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{\gamma<\alpha} [\![t = \beta^\wedge]\!] \wedge [\![t = \gamma^\wedge]\!] \wedge [\![s_1 = g(\beta)]\!] \wedge [\![s_2 = g(\gamma)]\!] \leqslant$$
$$\leqslant \bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{\gamma<\alpha} [\![\beta^\wedge = \gamma^\wedge]\!] \wedge [\![s_1 = g(\beta)]\!] \wedge [\![s_2 = g(\gamma)]\!] =$$
$$= \bigvee_{\beta<\alpha} [\![s_1 = g(\beta)]\!] \wedge [\![s_2 = g(\beta)]\!] \leqslant [\![s_1 = s_2]\!].$$

(3): $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Ord}\,(\alpha^\wedge) \wedge \mathrm{dom}(f) = \alpha^\wedge$. То, что $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Ord}\,(\alpha^\wedge)$, было уже отмечено в 4.4.10. Далее, для $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ имеем

$$[\![t \in \mathrm{dom}(f)]\!] = [\![(\exists\, s)(t, s) \in f]\!] = \bigvee_{s \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![(t, s) \in f]\!] =$$
$$= \bigvee_{s \in \mathbb{V}^{(B)}} \bigvee_{\beta<\alpha} [\![(t, s) = (\beta^\wedge, g(\beta))]\!] = \bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{s \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![t = \beta^\wedge]\!] \wedge [\![s = g(\beta)]\!] =$$
$$= \bigvee_{\beta<\alpha} [\![t = \beta^\wedge]\!] = \bigvee_{\beta^\wedge \in \mathrm{dom}(\alpha^\wedge)} [\![t = \beta]\!] = [\![t \in \alpha^\wedge]\!].$$

(4): $\mathbb{V}^{(B)} \models \operatorname{im}(f) \supset u$. Возьмем $s \in \mathbb{V}^{(B)}$ и, принимая во внимание включение $\operatorname{dom}(u) \subset \operatorname{im}(g)$, проведем следующие вычисления:

$$[\![s \in u]\!] = \bigvee_{v \in \operatorname{dom}(u)} u(v) \wedge [\![s = v]\!] \leqslant \bigvee_{\beta \leqslant \alpha} [\![s = g(\beta)]\!] =$$

$$= \bigvee_{\beta < \alpha} \Bigg([\![s = g(\beta)]\!] \wedge \bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\beta^{\wedge} = t]\!] \Bigg) = \bigvee_{\beta < \alpha} \bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![(t, s) = (\beta^{\wedge}, g(\beta))]\!] =$$

$$= \bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![(t, s) \in f]\!] = [\![(\exists\, t)(t, s) \in f]\!] = [\![s \in \operatorname{im}(f)]\!]. \ \triangleright$$

Доказательство теоремы 4.4.1 закончено.

4.5. Отделимый булевозначный универсум

В этом параграфе будет дана конструкция отделимого булевозначного универсума, получаемого из введенного в 4.1 класса $\mathbb{V}^{(B)}$ путем надлежащей факторизации. Для нового универсума также выполнен принцип переноса, причем в форме, более удобной для приложений.

4.5.1. Для элементов x и y универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ соотношение $\mathbb{V}^{(B)} \models x = y$ вовсе не означает, что x и y совпадают как множества, т. е. как элементы $\mathbb{V}$. В самом деле, если для каждого ординала α определить $x_\alpha \in \mathbb{V}^{(B)}$ по формулам $\operatorname{dom}(x_\alpha) = V_\alpha^{(B)}$, $\operatorname{im}(x_\alpha) := \{\mathbb{0}\}$, то, как легко проверить, $[\![x_\alpha = 0]\!] = \mathbb{1}$ при всех α. Значит, каждый элемент класса $\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{On}\}$ изображает пустое множество внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Можно убедиться, что для всякого $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ имеется собственный класс элементов $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ таких, что $[\![x = y]\!] = \mathbb{1}$. Это обстоятельство приводит к техническим неудобствам и, в частности, затрудняет процесс перевода с языка $\mathbb{V}^{(B)}$ на язык $\mathbb{V}$. Указанный дефект модели $\mathbb{V}^{(B)}$ устраняется путем надлежащей факторизации по схеме Фреге — Рассела — Скотта (см. 1.6.8).

4.5.2. Введем в универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$ отношение эквивалентности $\sim$ формулой:

$$\sim := \{(x, y) \in \mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)} : \ [\![x = y]\!] = \mathbb{1}_B\}.$$

Рассмотрим фактор-класс $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} := \mathbb{V}^{(B)}/{\sim}$, и пусть $\phi : \mathbb{V}^{(B)} \to \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ — каноническое фактор-отображение. Класс $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ называют *отделимым булевозначным универсумом*. Булевы значения истинности равенства $[\![\cdot = \cdot]\!]_s$ и принадлежности $[\![\cdot \in \cdot]\!]_s$ для класса $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ введем путем снижения соответствующих функций $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ на фактор-класс:

$$[\![\cdot = \cdot]\!]_s := [\![\cdot = \cdot]\!] \circ (\phi^{-1} \times \phi^{-1}),$$
$$[\![\cdot \in \cdot]\!]_s := [\![\cdot \in \cdot]\!] \circ (\phi^{-1} \times \phi^{-1}).$$

Иными словами, для $x, y \in \mathbb{V}^{(B)}$ полагаем $[\![\phi x = \phi y]\!]_s := [\![x = y]\!]$ и $[\![\phi x \in \phi y]\!]_s := [\![x \in y]\!]$.

Теперь для любой формулы $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ и для произвольных $\widetilde{x}, \dots, \widetilde{x}_n \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ мы определим $[\![\varphi(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)]\!] \in B$ так же, как и в 4.1.7. Легко видеть, что тогда

$$[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] = [\![\varphi(\phi x_1, \dots, \phi x_n)]\!]_s \quad (x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Это можно установить индукцией по длине формулы φ. Так, например, если $\varphi(u_1,\dots,u_n) = (\forall\, u)\,\psi(u,u_1,\dots,u_n)$ и $[\![\psi(x,x_1,\dots,x_n)]\!] = [\![\psi(\phi x,\phi x_1,\dots,\phi x_n)]\!]_s$ для всех $x,x_1,\dots,x_n \in \mathbb{V}^{(B)}$, то в соответствии с 4.1.7 будет

$$[\![\varphi(\phi x_1,\dots,\phi x_n)]\!]_s = \bigwedge\{[\![\psi(\widetilde{x},\phi x_1,\dots,\phi x_n)]\!]_s :\ \widetilde{x} \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}\} =$$
$$= \bigwedge\left\{[\![\psi(x,x_1,\dots,x_n)]\!] :\ x \in \mathbb{V}^{(B)}\right\} = [\![\varphi(x_1,\dots,x_n)]\!].$$

Истинность формул в $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ задается так же, как и в 4.1.6:

$$\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \models \varphi(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n) \leftrightarrow [\![\varphi(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n)]\!]_s = \mathbb{1}_B.$$

Корректность указанных определений не вызывает сомнений, ибо в силу 4.1.8 (7) для любой формулы φ в ZFC верно

$$\mathbb{1} = [\![x = y]\!] \to [\![\varphi(x)]\!] = [\![\varphi(y)]\!] \quad (x,y \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

В частности, если $[\![x = x']\!] = \mathbb{1}_B$ и $[\![y = y']\!] = \mathbb{1}_B$, то $[\![x = y]\!] = [\![x' = y']\!]$ и $[\![x \in y]\!] = [\![x' \in y']\!]$.

Таким образом, при вычислении булевых оценок истинности в отделимом универсуме можно пользоваться произвольными представителями нужных классов эквивалентности. Из этого замечания вытекает, в частности, что теорема 4.1.8 справедлива при замене $\mathbb{V}^{(B)}$ на $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ и снабжении булевых оценок истинности нижним индексом s.

4.5.3. В качестве несколько неожиданного примера использования отделимого универсума $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ дадим следующее определение. Взяв $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, введем символ $\vee\widetilde{x}$ для так называемого *уровня* $\widetilde{x}$, т. е. положим

$$\vee\widetilde{x} := \bigvee_{t\in\mathrm{dom}(x)} x(t),$$

где $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ — представитель класса эквивалентности $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$.

Определение уровня в первый момент воспринимается как не вполне законное, так как области определения у равных внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ элементов не обязаны совпадать. В то же время

$$[\![(\exists\, y \in \widetilde{x})]\!]_s = [\![(\exists\, y \in \widetilde{x}) y = y]\!]_s = \bigvee_{t\in\mathrm{dom}(x)} x(t) \wedge [\![t = t]\!] = \bigvee_{t\in\mathrm{dom}(x)} x(t) = \vee\widetilde{x}.$$

Как видно, $\vee\widetilde{x} = [\![\widetilde{x} \neq \varnothing]\!]_s$, так что понятие уровня корректно. Аналогичным образом, взяв $\widetilde{x}$ из $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ и b из булевой алгебры B, мы можем корректно определить элемент $b\widetilde{x} := \widetilde{bx}$ (где $bx : t \mapsto b \wedge x(t)$ $(t \in \mathrm{dom}(x))$) в универсуме $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$. Действительно, если $[\![x_1 = x_2]\!] = \mathbb{1}$, то $[\![bx_1 = bx_2]\!] = b \Rightarrow [\![x_1 = x_2]\!] = \mathbb{1}$ в силу ранее установленного в 4.3.2 соотношения. В этой связи часто используют запись $0 = \varnothing$, имея в виду, в частности, что $0\varnothing = \varnothing = 0\widetilde{x}$ для всякого $x \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$.

4.5.4. Отметим, что изложенное в параграфах 4.2–4.4 с очевидными оговорками и уточнениями остается в силе для отделимого универсума $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$. Так, $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ является моделью ZFC:

(1) Теорема (принцип переноса). *Всякая теорема* ZFC *истинна в* $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$. *Символически:* $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \models$ ZFC.

$\lhd$ В самом деле, если $\varphi(u_1,\dots,u_n)$ — теорема теории ZFC, то согласно 4.4.1 для произвольных $\widetilde{x}_1=\phi x_1,\dots,\widetilde{x}_n=\phi x_n\in\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ будет $\mathbb{1}_B=[\![\varphi(x_1,\dots,x_n)]\!]=[\![\varphi(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n)]\!]_s$. $\rhd$

(2) Аналогично, если $\rho: B\to C$ — полный гомоморфизм булевых алгебр, то из 4.2.2 (3) видно, что равенство $[\![x=y]\!]=\mathbb{1}$ влечет за собой $[\![\rho^*x=\rho^*y]\!]=\mathbb{1}$. Таким образом, ρ^* оставляет инвариантным любой класс эквивалентности и, значит, ρ^* индуцирует отображение соответствующих отделимых универсумов $\rho^\star:\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}\to\widetilde{\mathbb{V}}^{(C)}$, действующее по правилу $\rho^\star(\phi x)=\rho^*(x)$ $(x\in\mathbb{V}^{(B)})$. Нетрудно видеть, что при этом остаются в силе утверждения 4.2.2–4.2.5 с заменой отображений ρ^*, π^* и $(\rho\circ\pi)^*$ на $\rho^\star$, $\pi^\star$ и $(\rho\circ\pi)^\star$, универсумы $\mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathbb{V}^{(C)}$ на $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ и $\widetilde{\mathbb{V}}^{(C)}$, булевы оценки $[\![\,\cdot\,]\!]^B$ и $[\![\,\cdot\,]\!]^C$ на $[\![\,\cdot\,]\!]^B_s$ и $[\![\,\cdot\,]\!]^C_s$.

(3) Каноническое вложение $\varkappa:\mathbb{V}\to\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ задано формулой $\varkappa:=\phi\circ(\cdot)^\wedge$. В дальнейшем для обозначения канонического вложения $\varkappa$ сохраним тот же символ $(\cdot)^\wedge$. Как видно, остаются в силе 4.2.8 и 4.2.9, если изменить символы, как это сделано в (2), и заменить $\mathbb{V}^{(2)}$ на $\widetilde{\mathbb{V}}^{(2)}$.

(4) Из равенства (см. 4.4.9)

$$[\![(x,y)^B=(x',y')^B]\!]=[\![x=x']\!]\wedge[\![y=y']\!]$$

видно, что отображение $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^B$ устойчиво относительно отношения эквивалентности 4.5.2. Поэтому существует инъективное вложение $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}\times\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}\to\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, обозначаемое тем же символом $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^B$, для которого $(\phi x,\phi y)^B=\phi((x,y)^B)$. При этом

$$[\![(\widetilde{x},\widetilde{y})^B=(\widetilde{x},\widetilde{y})]\!]_s=\mathbb{1}\quad(\widetilde{x},\widetilde{y}\in\mathbb{V}^{(B)}).$$

4.5.5. В отделимом универсуме $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ действует естественное перемешивание. При этом, сохраняется принцип максимума, который допускает существенное уточнение:

(1) Возьмем разбиение единицы (b_ξ) в B. Пусть семейства $(x_\xi)\subset\mathbb{V}^{(B)}$ и $(x'_\xi)\subset\mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что $[\![x_\xi=x_\xi]\!]=\mathbb{1}$ для всех ξ. Если $x=\operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$ и $x'=\operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, то в силу 4.3.5 $[\![x=x']\!]=\mathbb{1}$. Отсюда видно, что для семейства (y_ξ) из $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ при любом выборе представителей $x_\xi,x'_\xi\in y_\xi$ возникающие перемешивания x и x' будут эквивалентны. Таким образом, можно положить по определению

$$\operatorname*{mix}_\xi(b_\xi y_\xi):=\operatorname*{mix}_\xi(b_\xi\phi(x_\xi)):=\phi\Big(\operatorname*{mix}_\xi(b_\xi x_\xi)\Big).$$

Как видно, $y:=\operatorname{mix}_\xi(b_\xi y_\xi)$ — единственный элемент из $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, для которого выполнено соотношение

$$[\![y=y_\xi]\!]_s\geqslant b_\xi\quad(\xi\in\Xi).$$

В частности, для $b\in B$ и $y\in\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ существует единственный элемент $by\in\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ такой, что $[\![by=y]\!]_s=b$ и $[\![by=0]\!]_s=b^*$.

Если теперь (b_ξ) — произвольное дизъюнктное семейство в B и $b:=\big(\bigvee_\xi b_\xi\big)$, то вновь существует элемент $y\in\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ со свойством $[\![y=y_\xi]\!]_s\geqslant b_\xi$ $(\xi\in\Xi)$, причем для любого другого y' с теми же свойствами будет $by=by'$.

Итак, запись $y=\operatorname{mix}(b_\xi y_\xi)$ означает, что $b_\xi\leqslant[\![y=y_\xi]\!]_s$ для всех $\xi\in\Xi$.

(2) *Пусть $\varphi(u,u_1,\dots,u_n)$ — формула, $\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n\in\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ и $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}\models(\exists!\,u)$ $\varphi(u,\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n)$. Тогда существует единственный элемент $\widetilde{x}_0\in\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ такой, что $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}\models\varphi(\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n)$.*

$\triangleleft$ Пусть $\widetilde{x}_k := \phi(x_k)$, где $x_k \in \mathbb{V}^{(B)}$ $(k := 1, \dots, n)$. Тогда $\mathbb{V}^{(B)} \models (\exists!\, u)\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$. В силу принципа максимума существует элемент $x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Положим $\widetilde{x}_0 := \phi(x_0)$. Понятно, что $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \models \varphi(\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$. Если для какого-нибудь элемента $z \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ выполнено $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \models \varphi(z, \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$, то будет $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \models \varphi(\widetilde{x}_0, \dots, \widetilde{x}_n) \wedge \varphi(z, \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$. По условию $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \models z = \widetilde{x}_0$, а это и означает, ввиду отделимости $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, что $z = \widetilde{x}_0$. $\triangleright$

4.5.6. Для произвольных b и $c \in B$ положим (см. 2.1.5)

$$[\![b = c]\!] := b \Leftrightarrow c = (b \vartriangle c)^* = (b \wedge c) \vee (b^* \wedge c^*).$$

Заметим, что из-за 2.1.5 (3) $a \leqslant [\![b = c]\!]$ в том и только в том случае, если $a \wedge b = a \wedge c$.

Рассмотрим функцию $f : \mathrm{dom}(f) \to B$, область определения $\mathrm{dom}(f)$ которой лежит в $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$. Говорят, что f — *экстенсиональная функция*, если

$$[\![x = y]\!]_s \leqslant [\![f(x) = f(y)]\!] \quad (x, y \in \mathrm{dom}(f)).$$

Экстенсиональность f, как легко заметить, равносильна соотношению

$$f(x) \wedge [\![x = y]\!]_s \leqslant f(y) \quad (x, y \in \mathrm{dom}(f)).$$

Если $u : \mathrm{dom}(u) \to B$ — произвольная функция и $\mathrm{dom}(u) \subset \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, то с u можно связать экстенсиональную функцию $\bar{u} : \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \to B$ по формуле

$$\bar{u} : x \mapsto \bigvee_{t \in \mathrm{dom}(u)} u(t) \wedge [\![t = x]\!]_s \quad (x \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}).$$

Еще один класс экстенсиональных функций возникает следующим образом. Пусть φ — некоторая B-формула. Тогда экстенсиональна функция

$$\bar{\varphi} : x \mapsto [\![\varphi(x)]\!]_s \quad (x \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}).$$

4.5.7. Теорема. *Если* $u : \mathrm{dom}(u) \to B$ *— функция, причем* $\mathrm{dom}(u) \subset \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ *и* $\mathrm{dom}(u) \in \mathbb{V}$, *то существует единственный элемент* $x \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ *такой, что* $\bar{u}(t) = [\![t \in x]\!]_s$ *при всех* $t \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$. *Наоборот, если* $x \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, *то существует функция* $u : \mathrm{dom}(u) \to B$, *для которой* $\mathrm{dom}(u) \subset \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, $\mathrm{dom}(u) \in \mathbb{V}$ *и* $\bar{u}(t) = [\![t \in x]\!]_s$ $(t \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)})$.

$\triangleleft$ Пусть D — такое подмножество неотделимого универсума, что образ D при каноническом фактор-отображении ϕ совпадает с $\mathrm{dom}(u)$.

Определим элемент $x' \in \mathbb{V}^{(B)}$ формулой

$$\mathrm{dom}(x') := D, \quad x'(t) := u(\phi t) \quad (t \in D).$$

Положим, наконец, $x := \phi(x')$. Тогда для $t \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ будет

$$[\![t \in x]\!]_s = \bigvee_{y \in D} x'(y) \wedge [\![t = \phi y]\!]_s = \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(u)} x(y) \wedge [\![y = t]\!] = \bar{u}(t).$$

Если еще какой-то элемент $z \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ обладает этими свойствами, то $[\![t \in x]\!]_s = [\![t \in z]\!]_s$ для всех $t \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$. Отсюда

$$\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \models (\forall\, t)\, (t \in x \leftrightarrow t \in z).$$

В силу аксиомы экстенсиональности внутри $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ получим $[\![x = z]\!]_s = \mathbb{1}$. Отделимость $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ дает $x = z$.

Наоборот, пусть $x \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, а x' — такой элемент неотделимого универсума, что $x = \phi(x')$. Положим $\mathrm{dom}(u) := \phi``(\mathrm{dom}(x'))$ и определим $u : \mathrm{dom}(u) \to B$ так, чтобы $u(\phi t) = x'(t)$ $(t \in \mathrm{dom}(x'))$. Тогда для любого $t \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ выполнено

$$[\![t \in x]\!]_s = \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(x')} x'(y) \wedge [\![t = \phi y]\!]_s = \bigvee_{y \in \mathrm{dom}(u)} u(y) \wedge [\![y = t]\!]_s = \bar{u}(t). \ \triangleright$$

4.5.8. В дальнейшем мы в основном будем работать с отделимым булевозначным универсумом $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$. При этом часто, не оговаривая этого специально, при вычислениях булевых оценок истинности мы заменяем элементы $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ их представителями из $\mathbb{V}^{(B)}$ (как это обычно практикуется, например, при работе с пространствами классов эквивалентности измеримых функций в анализе). Кроме того, начиная со следующего параграфа, мы используем только обозначения $\mathbb{V}^{(B)}$, $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ вместо $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, $[\![\cdot = \cdot]\!]_s$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]_s$ и осуществляем все аналогичные упрощения, поскольку это не приводит к недоразумениям.

4.6. Классы в булевозначном универсуме

В текущем параграфе будет введено понятие класса в булевозначном универсуме и установлен принцип переноса для теории классов фон Неймана — Гёделя — Бернайса.

4.6.1. Как видно из 4.5.6, всякий элемент $\mathbb{V}^{(B)}$ определяет некоторое экстенсиональное отображение на $\mathbb{V}^{(B)}$ со значениями в B. В то же время лишь часть из экстенсиональных отображений $\mathbb{V}^{(B)}$ в B задается элементами $\mathbb{V}^{(B)}$. Это обстоятельство мотивирует следующее определение.

Классом внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ или $\mathbb{V}^{(B)}$-*классом* называют всякое экстенсиональное отображение $X : \mathbb{V}^{(B)} \to B$, являющееся классом в обычном смысле, т. е. в смысле $\mathbb{V}$. Каждому элементу $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ сопоставим $\mathbb{V}^{(B)}$-класс

$$\langle x \rangle := [\![\,\cdot \in x]\!] : t \mapsto [\![t \in x]\!] \quad (t \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Ясно, что возникающее отображение инъективно. Введем теперь булевы оценки истинности, полагая для $\mathbb{V}^{(B)}$-классов X и Y и элемента $z \in \mathbb{V}^{(B)}$:

$$[\![\langle z \rangle \in X]\!] := X(z),$$

$$[\![X = Y]\!] := \bigwedge_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\langle u \rangle \in X]\!] \Leftrightarrow [\![\langle u \rangle \in Y]\!],$$

$$[\![X \in Y]\!] := \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\langle u \rangle = X]\!] \wedge [\![\langle u \rangle \in Y]\!].$$

Первая и третья формулы согласованы, ибо в силу экстенсиональности X выполнено

$$[\![\langle z \rangle \in X]\!] = \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} X(u) \wedge [\![u = z]\!]$$

и, кроме того, $[\![\langle z\rangle = \langle u\rangle]\!] = [\![z = u]\!]$ при всех $u, z \in \mathbb{V}^{(B)}$. Из определений видно, что $[\![X = Y]\!] = \mathbb{1}$ влечет $X = Y$. Функция $\mathbb{U}_B : x \mapsto \mathbb{1}_B$ $(x \in \mathbb{V}^{(B)})$ представляет собой универсальный класс внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Пустой $\mathbb{V}^{(B)}$-класс — функция, тождественно равная нулю на $\mathbb{V}^{(B)}$.

4.6.2. Напомним, что формулу называют *предикативной*, если в ней связанными являются лишь переменные для множеств (см. 1.4.14).

(1) Определим булеву оценку истинности предикативной формулы индукцией по длине (см. 4.1.6). Для пропозициональных связок это делается так же, как и в 4.1.7, тем самым нужно только уточнить случай кванторов, действие которых ограничено классом множеств. При этом можно рассматривать лишь формулы, не содержащие подформул вида $X_1 \in X_2$, ибо последняя эквивалентна формуле $(\exists\, x)(x = X_1 \wedge x \in X_2)$.

Итак, пусть φ — предикативная формула со свободными переменными $X, X_1, \dots, X_n$, а $Y_1, \dots, Y_n$ — некоторые $\mathbb{V}^{(B)}$-классы. Положим по определению

$$[\![(\forall\, x)\, \varphi(x, Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \bigwedge_{y \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\varphi(y, Y_1, \dots, Y_n)]\!],$$

$$[\![(\exists\, x)\, \varphi(x, Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \bigvee_{y \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\varphi(y, Y_1, \dots, Y_n)]\!].$$

Мы будем говорить, что предикативная формула $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ *истинна внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ *при заданных значениях* $Y_1, \dots, Y_n$ *переменных* $X_1, \dots, X_n$, если $[\![\varphi(Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \mathbb{1}$. Так же, как и в 4.1.6, условимся, что

$$V^{(B)} \models \varphi(Y_1, \dots, Y_n) \leftrightarrow [\![\varphi(Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \mathbb{1}.$$

(2) Понятие истинности в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ распространяют на непредикативные формулы следующим образом. Если $\varphi(X, X_1, \dots, X_n)$ — непредикативная формула, то полагаем

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, X)\, \varphi(X, Y_1, \dots, Y_n) \quad (\mathbb{V}^{(B)} \models (\exists\, X)\, \varphi(X, Y_1, \dots, Y_n)),$$

если и только если $[\![\varphi(Y, Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \mathbb{1}$ для всякого $\mathbb{V}^{(B)}$-класса Y (соответственно существует такой $\mathbb{V}^{(B)}$-класс Y, что $[\![\varphi(Y, Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \mathbb{1}$).

$\mathbb{V}^{(B)}$-класс Y называют $\mathbb{V}^{(B)}$-*множеством*, если $\mathbb{V}^{(B)} \models M(Y)$, где $M(X) := (\exists\, Z)(X \in Z)$ (см. 1.3.1). Проще было бы вместо $\mathbb{V}^{(B)}$-множества говорить B-множество, однако этот термин мы сохраним для других объектов (см. 5.6).

4.6.3. *Если $x \in \mathbb{V}^{(B)}$, то $\mathbb{V}^{(B)}$-класс $\langle x\rangle$ является $\mathbb{V}^{(B)}$-множеством. Наоборот, если $\mathbb{V}^{(B)}$-класс X есть $\mathbb{V}^{(B)}$-множество, то $X = \langle x\rangle$ для некоторого $x \in \mathbb{V}^{(B)}$.*

$\lhd$ Для произвольного элемента $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ верно

$$[\![\langle x\rangle \in \langle \{x\}^B\rangle]\!] = [\![x \in \{x\}^B]\!] = \mathbb{1}$$

и потому $\mathbb{V}^{(B)} \models M(\langle x\rangle)$. Допустим, что для $\mathbb{V}^{(B)}$-класса X выполняется $\mathbb{V}^{(B)} \models M(X)$. Тогда по определению (см. 4.6.2 (2)) существует $\mathbb{V}^{(B)}$-класс Z, для которого

$$\bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} Z(t) \wedge [\![\langle t\rangle = X]\!] = \mathbb{1}.$$

Отсюда в силу принципа исчерпывания можно подобрать такое разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и такое семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathbb{V}^{(B)}$, что

$$[\![\langle x_\xi\rangle = X]\!] \geqslant b_\xi \quad (\xi \in \Xi).$$

Если $x := \operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, то

$$[\![\langle x\rangle = X]\!] \geqslant [\![\langle x\rangle = \langle x_\xi\rangle]\!] \wedge [\![\langle x_\xi\rangle = X]\!] \geqslant b_\xi.$$

Следовательно, $[\![\langle x\rangle = X]\!] = \mathbb{1}$ или $\langle x\rangle = X$. $\triangleright$

На основании установленного факта в дальнейшем мы будем отождествлять элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ и соответствующее $\mathbb{V}^{(B)}$-множество $\langle x\rangle$.

4.6.4. Пусть C — полная булева алгебра и $\pi : B \to C$ — полный гомоморфизм. Рассмотрим $\mathbb{V}^{(B)}$-класс X и положим по определению

$$(x, b) \in \pi^* X \leftrightarrow b = \bigvee_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} (\pi \circ X)(t) \wedge [\![x = \pi^* t]\!]^C.$$

Тогда $\pi^* X$ — это класс внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Действительно, $\pi^* X$ — подкласс $\mathbb{V}$ в силу теоремы 1.4.14, ибо

$$\pi^* X = \{(x, b) : \varphi(x, b, B, C, X, \pi^*, [\![\cdot = \cdot]\!], \mathbb{V}^{(B)})\}$$

для предикативной формулы $\varphi(Y, Z, B, \ldots)$, имеющей вид

$$Z = \bigvee_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} (\pi \circ X)(t) \wedge [\![Y = \pi^* t]\!].$$

Кроме того, $\pi^* X$ — экстенсиональная функция:

$$(\pi^* X)(x) \wedge [\![x = y]\!] = \bigvee_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} (\pi \circ X)(t) \wedge [\![x = \pi^* t]\!] \wedge [\![x = y]\!] \leqslant$$
$$\leqslant \bigvee_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} (\pi \circ X)(t) \wedge [\![y = \pi^* t]\!] = (\pi^* X)(y).$$

Легко видеть, что для классов сохраняет силу утверждение 4.2.2 (1), т. е. если ρ — полный гомоморфизм, то

$$(\rho \circ \pi)^* X = \rho^*(\pi^* X).$$

Далее, если $\mathbb{V}^{(B)} \models M(X)$, то $\mathbb{V}^{(C)} \models M(\pi^* X)$. Действительно, если $X = \langle x\rangle$, $x \in \mathbb{V}^{(B)}$, то в силу 4.2.2 (4) будет

$$\langle \pi^* x\rangle(t) = \bigvee_{u\in\mathbb{V}^{(B)}} \pi([\![u \in x]\!]) \wedge [\![t = \pi^* u]\!] =$$
$$= \bigvee_{u\in\mathbb{V}^{(B)}} (\pi \circ \langle x\rangle)(u) \wedge [\![t = \pi^* u]\!] = (\pi^* \langle x\rangle)(t).$$

Значит, $\langle \pi^* x\rangle = \pi^* \langle x\rangle = \pi^* X$. Обратное утверждение верно, если π инъективен.

Отметим еще, что данное определение согласуется с 4.4.1 благодаря 4.2.2 (4).

4.6.5. *Для каждого $\mathbb{V}^{(B)}$-класса X и для всякой предикативной B-формулы φ с одной свободной переменной имеют место представления*

$$
[\![(\forall\, x \in \pi^* X)\, \varphi(x)]\!]^C = \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi \circ X(t) \Rightarrow [\![\varphi(\pi^* t)]\!]^C,
$$

$$
[\![(\exists\, x \in \pi^* X)\, \varphi(x)]\!]^C = \bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi \circ X(t) \wedge [\![\varphi(\pi^* t)]\!]^C.
$$

$\lhd$ Достаточно обосновать одно из этих соотношений, например первое. Вот соответствующие вычисления (где мы использовали 4.6.2 (1), 2.1.6 (3), 4.1.8 (7), определение $\pi^* X$ из 4.6.4 и тождество $(a \wedge b) \Rightarrow (c \wedge b) = (a \wedge b) \Rightarrow c$):

$$
[\![(\forall\, x \in \pi^* X)\, \varphi(x)]\!] = \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(C)}} [\![x \in \pi^* X]\!] \Rightarrow [\![\varphi(x)]\!] =
$$

$$
= \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(C)}} \Bigg(\bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi \circ X(t) \wedge [\![x = \pi^* t]\!] \Bigg) \Rightarrow [\![\varphi(x)]\!] =
$$

$$
= \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(C)}} (\pi \circ X(t) \wedge [\![x = \pi^* t]\!]) \Rightarrow [\![\varphi(x)]\!] \leqslant
$$

$$
\leqslant \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi \circ X(t) \Rightarrow [\![\varphi(\pi^* t)]\!] =
$$

$$
= \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \Bigg(\bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(C)}} (\pi \circ X(t))^* \vee [\![x = \pi^* t]\!]^* \vee [\![\varphi(\pi^* t)]\!] \Bigg) =
$$

$$
= \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(C)}} (\pi \circ X(t) \wedge [\![x = \pi^* t]\!]) \Rightarrow ([\![\varphi(\pi^* t)]\!] \wedge [\![x = \pi^* t]\!]) \leqslant
$$

$$
\leqslant \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(C)}} (\pi \circ X(t) \wedge [\![x = \pi^* t]\!]) \Rightarrow [\![\varphi(x)]\!] =
$$

$$
= \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(C)}} \Bigg(\bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi \circ X(t) \wedge [\![x = \pi^* t]\!] \Bigg) \Rightarrow [\![\varphi(x)]\!] =
$$

$$
= \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(C)}} [\![x \in \pi^* X]\!] \Rightarrow [\![\varphi(x)]\!] = [\![(\forall\, x \in \pi^* X) \varphi(x)]\!]. \rhd
$$

4.6.6. *Для любых $\mathbb{V}^{(B)}$-классов X и Y выполняется*

$$
[\![\pi^* X = \pi^* Y]\!]^C = \pi [\![X = Y]\!]^B, \quad [\![\pi^* X \in \pi^* Y]\!]^C = \pi [\![X \in Y]\!]^B.
$$

$\lhd$ Прежде всего заметим, что $\pi \circ Y(t) = (\pi^* Y)(\pi^* t)$ или $\pi [\![t \in Y]\!]^B = [\![\pi^* t \in \pi^* Y]\!]^C$ при $t \in \mathbb{V}^{(B)}$. Это вытекает из определений 4.6.1 и 4.6.4 с помощью 4.2.2 (3). Далее, воспользовавшись первой из формул 4.6.5, без труда выводим:

$$
[\![\pi^* X \subset \pi^* Y]\!]^C = [\![(\forall\, x \in \pi^* X)(x \in \pi^* Y)]\!]^C = \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi \circ X(t) \Rightarrow [\![\pi^* t \in \pi^* Y]\!]^C =
$$

$$
= \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi ([\![t \in X]\!]^B \Rightarrow [\![t \in Y]\!]^B) = \pi [\![X \subset Y]\!]^B.
$$

Отсюда

$$[\![\pi^* X = \pi^* Y]\!]^C = [\![\pi^* X \subset \pi^* Y]\!]^C \wedge [\![\pi^* Y \subset \pi^* X]\!]^C = \pi[\![X = Y]\!]^B.$$

Наконец, учитывая уже доказанное, по второй из формул 4.6.5 получаем

$$[\![\pi^* X \in \pi^* Y]\!]^C = [\![(\exists\, t \in \pi^* Y)\ (t = \pi^* X)]\!]^C = \bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi \circ Y(t) \wedge [\![\pi^* t = \pi^* X]\!]^C =$$

$$= \bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi\Big(Y(t) \wedge [\![t = X]\!]^B\Big) = \pi[\![X \in Y]\!]^B. \ \triangleright$$

4.6.7. Установленное в предыдущих пунктах позволяет перенести на рассматриваемый случай различные утверждения из 4.2. Отметим из них только следующие.

(1) *Если $\varphi(Y_1, \dots, Y_n)$ — ограниченная предикативная формула, то для любых $\mathbb{V}^{(B)}$-классов $X_1, \dots, X_n$ будет*

$$\pi[\![\varphi(X_1, \dots, X_n)]\!]^B = [\![\varphi(\pi^* X_1, \dots, \pi^* X_n)]\!]^C.$$

Отсюда, в частности, следует, что если π — мономорфизм, то

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(X_1, \dots, X_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(C)} \models \varphi(\pi^* X_1, \dots, \pi^* X_n).$$

(2) *Если φ — предикативная формула класса Σ_1, то для тех же $X_1, \dots, X_n$ будет*

$$\pi[\![\varphi(X_1, \dots, X_n)]\!]^B \leqslant [\![\varphi(\pi^* X_1, \dots, \pi^* X_n)]\!]^C.$$

В частности, верна импликация

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(X_1, \dots, X_n) \to \mathbb{V}^{(C)} \models \varphi(\pi^* X_1, \dots, \pi^* X_n).$$

$\triangleleft$ Доказательство проводится по схеме 4.2.3. Возьмем для примера случай ограниченного квантора общности: $\varphi := (\forall\, x \in Y)\psi$. Для $\mathbb{V}^{(B)}$-классов $Y, X_1, \dots, X_n$ в соответствии с 4.6.5 и 4.6.6 выводим:

$$[\![\varphi(\pi^* Y, \pi^* X_1, \dots, \pi^* X_n)]\!] =$$

$$= \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\pi^* x \in \pi^* Y]\!] \Rightarrow [\![\psi(\pi^* x, \pi^* X_1, \dots, \pi^* X_n)]\!] =$$

$$= \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi[\![x \in Y]\!] \Rightarrow \pi[\![\psi(x, X_1, \dots, X_n)]\!] =$$

$$= \pi\Bigg(\bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![x \in Y]\!] \Rightarrow [\![\psi(x, X_1, \dots, X_n)]\!]\Bigg) =$$

$$= \pi[\![(\forall\, x \in Y)\psi(x, X_1, \dots, X_n)]\!] = \pi[\![\varphi(Y, X_1, \dots, X_n)]\!]. \ \triangleright$$

4.6.8. Используя каноническое вложение $(\,\cdot\,)^\wedge : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^{(B)}$, можно каждому классу $X \subset \mathbb{V}$ сопоставить $\mathbb{V}^2$-класс X' по формуле

$$X'(t) := \begin{cases} \mathbb{1}_2, \ \text{если} \ \ (\exists\, x \in X)(t = x^\wedge), \\ \mathbb{0}_2 \ \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Экстенсиональность X' тривиально следует из 4.1.8 (4). Далее, положим $X^{\wedge} := \imath^{*}``X'$, где $\imath$ — тождественное вложение $\mathbb{2}$ в B. Итак, $X^{\wedge}$ есть $\mathbb{V}^{(B)}$-класс, для которого

$$X^{\wedge}(t) = \bigvee\{[\![t = x^{\wedge}]\!] : x \in X\} \quad (t \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Отметим, что поскольку $\mathrm{Ord}\,(X)$ — ограниченная предикативная формула, то в силу 4.2.8 (4), 4.2.9 (1) и 4.6.7 (1) $\mathrm{On}^{\wedge}$ — ординальный класс внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Ord}\,(\mathrm{On}^{\wedge})$.

Формулы 4.6.5, очевидно, могут быть специализированы:

$$[\![(\forall\, x \in Y^{\wedge})\varphi(x)]\!] = \bigwedge\{[\![\varphi(x^{\wedge})]\!] : x \in Y\},$$

$$[\![(\exists\, x \in Y^{\wedge})\varphi(x)]\!] = \bigvee\{[\![\varphi(x^{\wedge})]\!] : x \in Y\}.$$

4.6.9. *Пусть φ и ψ — предикативные формулы со свободными переменными $X, X_1, \dots, X_n$, а $Y_1, \dots, Y_n$ — некоторые $\mathbb{V}^{(B)}$-классы. Тогда при условии, что $[\![\varphi(x_0, Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$, будет*

$$[\![(\exists\, x)(\varphi(x, Y_1, \dots, Y_n) \vee \psi(x, Y_1, \dots, Y_n))]\!] =$$

$$= \bigvee \Big\{[\![\psi(x, Y_1, \dots, Y_n)]\!] : x \in \mathbb{V}^{(B)},\ [\![\varphi(x, Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \mathbb{1}\Big\},$$

$$[\![(\forall\, x)(\varphi(x, Y_1, \dots, Y_n) \to \psi(x, Y_1, \dots, Y_n))]\!] =$$

$$= \bigwedge \Big\{[\![\psi(x, Y_1, \dots, Y_n)]\!] : x \in \mathbb{V}^{(B)},\ [\![\varphi(x, Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \mathbb{1}\Big\}.$$

$\lhd$ Доказательство проводится по той же схеме, что и в 4.3.8. $\rhd$

4.6.10. Теорема (принцип максимума). *Пусть $\varphi(x)$ — предикативная B-формула с одной свободной переменной (φ может содержать константы, являющиеся $\mathbb{V}^{(B)}$-классами или $\mathbb{V}^{(B)}$-множествами). Тогда имеют место следующие утверждения*:

(1) *существует элемент $x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого*

$$[\![(\exists\, x)\varphi(x)]\!] = [\![\varphi(x_0)]\!];$$

(2) *если $\mathbb{V}^{(B)} \models (\exists\, x)\varphi(x)$, то существует элемент $x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(x_0)$*;

(3) *если $\mathbb{V}^{(B)} \models (\exists !\, x)\varphi(x)$, то существует единственный элемент $x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(x_0)$.*

$\lhd$ Доказательство, основанное на принципе перемешивания (см. 4.5.5), ничем не отличается от рассуждений, приведенных в 4.3.9 и 4.5.5. $\rhd$

4.6.11. Теорема (принцип переноса). *Все теоремы* NGB *истинны в модели $\mathbb{V}^{(B)}$.*

$\lhd$ Достаточно убедиться в справедливости аксиом NGB внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

(1): Истинность аксиомы экстенсиональности для классов внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ следует сразу же из определений 4.6.1 и 4.6.2. Утверждение $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{NGB}_2$–$\mathrm{NGB}_5$ установлено в 4.4.

(2): $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{NGB}_6$. Это устанавливают так же, как и в 4.4.5. Нужно только выражения $\varphi(t, u)$ всюду заменить на $(t, u) \in X$ (см. 4.4.5 и 1.4.4).

(3): $\mathbb{V}^{(B)} \models \bigwedge_{k=7}^{13} \mathrm{NGB}_k$. Достаточно убедиться в том, что внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ истинно утверждение 1.4.14, частными случаями которого являются аксиомы NGB_7–NGB_{13}. Пусть формула $\varphi(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m)$ удовлетворяет всем условиям из 1.4.14. Рассмотрим произвольные $\mathbb{V}^{(B)}$-классы $Y_1, \dots, Y_m$ и определим $\mathbb{V}^{(B)}$-класс Z формулой

$$Z(t) := [\![(\exists\, x_1, \dots, x_n)(t = (x_1, \dots, x_n) \wedge \varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m))]\!].$$

Легко проверить, что тогда

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x_1, \dots, x_n)(\exists\, t)\big(t = (x_1, \dots, x_n) \wedge t \in Z \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_N)\big).$$

(4): $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{NGB}_{14}$. Заменив в 4.4.7 малую латинскую букву x на прописную X, получим требуемые рассуждения.

(5): $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{NGB}_{15}$. Пусть G — функция из On на $\mathbb{V}^{(B)}$. Положим

$$F(t) := \bigvee \big\{ [\![t = (\alpha^{\wedge}, G(\alpha))^B]\!] : \alpha \in \mathrm{On} \big\}.$$

Тогда F есть $\mathbb{V}^{(B)}$-класс и аналогично тому, как это сделано в 4.4.10, можно просто вычислить: $[\![\mathrm{Fnc}\,(F)]\!] = \mathbb{1}$, $[\![\mathrm{Ord}\,(\mathrm{On}^{\wedge}) \wedge \mathrm{dom}(F) = \mathrm{On}^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\mathrm{im}(F) \supset \mathbb{U}_B]\!] = \mathbb{1}$. Таким образом, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ универсальный класс $\mathbb{U}_B$ можно вполне упорядочить. Отсюда вытекает, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «существует выбирающая функция для класса $\mathbb{U}^{(B)}$». $\triangleright$

4.6.12. Теорема 4.6.11 дает возможность оперировать классами внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. В качестве примера рассмотрим определение категории в булевозначной модели.

Категория $\mathfrak{K}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ состоит из классов $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$, $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$, Com внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, называемых соответственно *классом объектов, классом морфизмов, композицией категории* $\mathfrak{K}$, таких, что $\mathbb{V}^{(B)} \models (\mathfrak{K}1)$–$(\mathfrak{K}3)$:

($\mathfrak{K}1$) существуют отображения D и R из $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ в $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ такие, что для любых объектов a и b класс $\mathfrak{K}(a, b) := H_{\mathfrak{K}}(a, b) := \{f \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K} : D(f) = a,\ R(f) = b\}$ является множеством (называемым *множеством морфизмов из a в b*);

($\mathfrak{K}2$) Com — ассоциативная частичная бинарная операция на $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$, причем

$$\mathrm{dom}(\mathrm{Com}) := \big\{(f, g) \in (\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K})^2 : D(g) = R(f)\big\};$$

($\mathfrak{K}3$) для каждого объекта $a \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ существует морфизм 1_a, называемый *тождественным морфизмом объекта* a, для которого $D(1_a) = R(1_a) = a$, $\mathrm{Com}(1_a, f) = f$ при $D(f) = a$ и $\mathrm{Com}(g, 1_a) = g$ при $R(g) = a$.

Вместо $\mathrm{Com}(f, g)$ обычно пишут gf или $g \circ f$.

4.7. Комментарии

4.7.1. (1) Разработке основ булевозначных моделей для исчисления предикатов посвящена книга Е. Расёвой и Р. Сикорского [155]. Идею о том, что булевозначные модели стоит использовать для более удобного изложения метода форсинга П. Дж. Коэна, стали независимо развивать Р. Соловей [378] и П. Вопенка [399, 400] в 1965 году. Несколько позже Д. Скотт и Р. Соловей и независимо от них П. Вопенка пришли к выводу, что в этой проблематике полезно с самого начала работать с булевозначными множествами, т. е. с объектами булевозначного универсума. Булевозначные модели, конструкция которых не вызывает отторжения у большинства «традиционных» математиков, стали весьма популярны после того, как выяснилось, что они позволяют приходить к тем же результатам, что и метод форсинга.

(2) Для каждой конкретной формулы теории множеств φ при $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $b \in B$ выражение $[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] = b$ снова будет формулой теории множеств. Однако в ZFC закон $\varphi \mapsto [\![\varphi]\!]$ не служит определимым классом, допуская лишь метаязыковое определение.

(3) Булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ используют для доказательства относительной совместимости теоретико-множественных утверждений по следующей схеме. Пусть $\mathscr{T}$ и $\mathscr{T}'$ — расширения теории ZF, причем из совместимости ZF следует совместимость $\mathscr{T}'$. Предположим, что можно определить B так, что $\mathscr{T}' \models$ «B — полная булева алгебра» и $\mathscr{T}' \models [\![\varphi]\!]^B = \mathbb{1}$ для каждой аксиомы φ теории $\mathscr{T}$. Тогда из совместимости ZF следует совместимость $\mathscr{T}$ (см. у Дж. Белла [191]).

(4) Пусть Ω — полная гейтингова решетка (см. 2.6.1). Незначительная модификация формул 4.1.4 позволяет определить оценки истинности $[\![\cdot \in \cdot]\!]^{\Omega}$ и $[\![\cdot = \cdot]\!]^{\Omega}$, действующие из $\mathbb{V}^{(\Omega)} \times \mathbb{V}^{(\Omega)}$ в Ω. Истинность в $\mathbb{V}^{(\Omega)}$ вводят так же, как и в 4.1.6. При этом в $\mathbb{V}^{(\Omega)}$ оказываются истинными все теоремы интуиционистского исчисления предикатов (см. у Р. Грейсона [238], М. Фурмана и Д. Скотта [226], Г. Такеути и С. Титани [391, 392]).

4.7.2. (1) Пусть $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр в булевой алгебре B, а $\mathfrak{U}'$ — двойственный к нему идеал, т. е. $\mathfrak{U}' := \{b^* : b \in \mathfrak{U}\}$. Тогда фактор-алгебра $B/\mathfrak{U}'$ двухэлементна и ее можно отождествить с булевой алгеброй $\mathbb{2} := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$. Фактор-гомоморфизм $\pi : B \to \mathbb{2}$ не является, вообще говоря, полным. Это не позволяет применить 4.2.4 и 4.2.5 для установления связи между истинностью в $\mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathbb{V}^{(2)}$. Однако если π полон (т. е. если ультрафильтр $\mathfrak{U}$ главный), то из 4.2.5 видно, что для любых формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и набора $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ будет

$$\mathbb{V}^{(2)} \models \varphi(\pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n) \leftrightarrow [\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] \in \mathfrak{U},$$

ибо для $b \in B$ равносильны соотношения $\pi(b) = \mathbb{1}$ и $b \in \mathfrak{U}$.

(2) Путем факторизации из универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ и ультрафильтра $\mathfrak{U}$ можно сконструировать модель, отличную от $\mathbb{V}^{(2)}$.

Введем в $\mathbb{V}^{(B)}$ отношение $\sim_{\mathfrak{U}}$ по формуле

$$\sim_{\mathfrak{U}} := \Big\{(x, y) \in \mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)} : [\![x = y]\!] \in \mathfrak{U}\Big\}.$$

Ясно, что $\sim_{\mathfrak{U}}$ — отношение эквивалентности на $\mathbb{V}^{(B)}$. Обозначим символом $\mathbb{V}^{(B)}/\mathfrak{U}$ фактор-класс (см. 1.6.8) универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ по $\sim_{\mathfrak{U}}$, рассматриваемый вместе с бинарным отношением

$$\in_{\mathfrak{U}} := \Big\{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : x, y \in \mathbb{V}^{(B)}, [\![x \in y]\!] \in \mathfrak{U}\Big\},$$

где $x \mapsto \widetilde{x}$ — каноническое фактор-отображение из $\mathbb{V}^{(B)}$ в $\mathbb{V}^{(B)}/\mathfrak{U}$. Можно показать, что

$$\mathbb{V}^{(B)}/\mathfrak{U} \models \varphi(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n) \leftrightarrow [\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] \in \mathfrak{U}$$

для $x_2, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ и формулы φ.

Читатель, знакомый с теорией ультрапроизведений, усмотрит в (2) известную теорему Лося (см. книги Дж. Белла и А. Сломсона [192], Т. Йеха [64], Ю. Л. Ершова и Е. А. Палютина [60], Г. Кейслера и Ч. Чэна [74]). Нетрудно убедиться в наличии и других глубоких связей с каноническими теоретико-модельными конструкциями. В (3) и (4) мы получим ультрапроизведения путем факторизации подходящего булевозначного универсума.

(3) Пусть T — непустое множество (не обязательно всех) главных ультрафильтров на булевой алгебре B, а $\mathbb{V}^T$ — как обычно, класс всех отображений из T в $\mathbb{V}$. Ввиду 4.2.8 (4) для каждого $x \in \mathbb{V}^{(2)}$ существует единственный элемент $x^{\vee} \in \mathbb{V}$ такой, что $[\![(x^{\vee})^{\wedge} = x]\!] = \mathbb{1}$. Определим теперь отображение $h : \mathbb{V}^{(B)} \to \mathbb{V}^T$, полагая $h(x) := \{(t, \pi_t^* x) : t \in T\}$ $(x \in \mathbb{V}^{(B)})$, где π_t — полный гомоморфизм из B в 2, определяемый ультрафильтром t, т. е. $\pi_t(b) = \mathbb{1}$, если $b \in t$ и $\pi_t(b) = \mathbb{0}$, если $b \in t'$. Можно показать, что h — сюръективное отображение.

С другой стороны, отображение h инъективно в том и только в том случае, если всякий элемент $b \in B$ принадлежит какому-нибудь ультрафильтру $t \in T$, т. е. $(\forall\, b \in B)(\exists\, t \in T)(b \in t)$ (это означает, что T определяет плотное множество точек в стоуновом компакте алгебры B, или B атомарна, или B изоморфна булеану $\mathscr{P}(T)$). Утверждение об инъективности и есть упомянутая теорема Лося. В этом случае для любых $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ и формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ будет

$$[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] \geqslant b \leftrightarrow (\forall\, t \in T)([\![\varphi(\pi_t^* u_1, \dots, \pi_t^* u_n)]\!] = \mathbb{1} \to b \in t).$$

(4) Пусть T — некоторое множество и $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр в булеане $\mathscr{P}(T)$. Пусть $\mathbb{V}^{(B)}/\mathfrak{U}$ — обычная *ультрастепень* класса $\mathbb{V}$ по $\mathfrak{U}$ с каноническим фактор-отображением $g : \mathbb{V}^T \to \mathbb{V}^T/\mathfrak{U}$ (см. 1.6.8). Положим $\lambda(\widetilde{x}) := g \circ h(x)$, где h определено в (3), а $x \mapsto \widetilde{x}$ — то же, что и в (3). Тем самым определена биекция λ между $\mathbb{V}^{(\mathscr{P}(T))}/\mathfrak{U}$ и $\mathbb{V}^T/\mathfrak{U}$. При этом для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и функций $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}^T$ будет

$$\mathbb{V}^T/\mathfrak{U} \models \varphi(\widetilde{u}_1, \dots, \widetilde{u}_n) \leftrightarrow \{t \in T : \varphi(u_1(t), \dots, u_n(t))\} \in \mathfrak{U}.$$

(5) Полезно сравнить 4.2.4 и 4.2.5 со следующим утверждением. Если M — *транзитивная модель* ZFC (т. е. M — транзитивный класс, являющийся моделью ZFC), $u_1, \dots, u_n \in M$, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — ограниченная формула и $\psi(x_1, \dots, x_n)$ — формула класса Σ_1, то

$$(M \models \varphi(u_1, \dots, u_n)) \leftrightarrow \varphi(u_1, \dots, u_n),$$
$$(M \models \psi(u_1, \dots, u_n)) \to \psi(u_1, \dots, u_n).$$

4.7.3. Д. Скотт получил принцип максимума из этого пункта как и излагаемый в следующем параграфе принцип переноса и еще многое другое. Ему же принадлежит первое схематическое изложение булевозначных моделей. Однако рукопись, подготовленная им в 1967 году так и не была опубликована, хотя имела весьма широкое хождение среди специалистов. В литературе по булевозначным моделям можно встретить также ссылки на несуществующую работу Д. Скотта и Р. Соловея, которая задумывалась как расширенный вариант упомянутой рукописи Д. Скотта. Об этой и других подробностях создания и развития теории булевозначных моделей теории множеств сказано в предисловии Д. Скотта к книге Дж. Белла [191].

4.7.4. (1) Метод доказательства в 4.4.3–4.4.5 позволяет заподозрить, что элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющий свойству φ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, можно построить, полагая $x(t) := [\![\varphi]\!]$ для всех $t \in \mathbb{V}^{(B)}$. Однако возникающее при этом отображение $t \mapsto [\![\varphi]\!]$ является классом (возможно, собственным) и не определяет, вообще говоря, элемент из $\mathbb{V}^{(B)}$. Тем не менее такие класс-функции играют роль классов внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, как мы видели в 4.6.

(2) Замена логической части ZF законами интуиционистской логики (см. 1.1.10) приводит к интуиционистской теории множеств $\mathrm{ZF_I}$. Модели $\mathrm{ZF_I}$ также можно строить по излагаемой схеме.

Именно, если Ω — полная гейтингова решетка, то универсум $\mathbb{V}^{(\Omega)}$ станет гейтинговозначной моделью теории $\mathrm{ZF_I}$, если определить соответствующие функции истинности $[\![\,\cdot \in \cdot\,]\!]$ и $[\![\,\cdot = \cdot\,]\!]$ из $\mathbb{V}^{(\Omega)} \times \mathbb{V}^{(\Omega)}$ в $\mathbb{V}^{(\Omega)}$. Подробности см. в работах Р. Грейсона [238], Г. Такеути и С. Титани [391], М. П. Фурмана и Д. Скотта [226].

(3) Пусть B — (квантовая) логика (см. 2.7.3 (3)). Если определить функции $[\![\,\cdot \in \cdot\,]\!]$ и $[\![\,\cdot = \cdot\,]\!]$ по формулам 4.1.4 (1, 2) и ввести оценки истинности формул как в 4.1.7, то в универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$ истинными окажутся аксиомы ZF_2–ZF_6 и AC.

Таким образом, в $\mathbb{V}^{(B)}$ можно развить теорию множеств. В частности, вещественные числа внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ будут соответствовать наблюдаемым в математической модели квантово-механической системы (см. у Г. Такеути [387]).

4.7.5. (1) Отделимый булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ с булевыми оценками истинности можно характеризовать аксиоматически, см. у Р. Соловея и С. Тенненбаума [379]. Подробнее об этом будет сказано в главе 6.

(2) Пусть π — полный гомоморфизм из B в полную булеву алгебру C. Тогда π^* — единственное отображение из $\mathbb{V}^{(B)}$ в $\mathbb{V}^{(C)}$, для которого, во-первых, $[\![\pi^* x = \pi^* y]\!]^C = \pi [\![x = y]\!]^B \quad (x, y \in \mathbb{V}^{(B)})$, а, во-вторых, при $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $z \in \mathbb{V}^{(C)}$ будет выполнено неравенство $[\![z \in \pi^* y]\!]^C \leqslant \sup\{[\![z = \pi^* x]\!] : x \in \mathbb{V}^{(B)}\}$.

4.7.6. Булевозначные классы появились, по-видимому, в работе Р. Соловея и С. Тенненбаума [379]. Там же сформулировано утверждение о том, что булевозначный универсум служит моделью как для теории классов фон Неймана — Гёделя — Бернайса, так и для теории классов Келли — Морса. Систематическое изложение булевозначной теории классов фон Неймана — Гёделя — Бернайса дано у А. Г. Кусраева [102].

Глава 5
Аппарат булевозначного анализа

Принципы переноса и максимума позволяют осуществлять внутри булевозначного универсума конструкции, обычные для математической практики. В булевозначной модели имеются поля вещественных и комплексных чисел, банаховы пространства, дифференциальные операторы и т. д. Изображающие их объекты можно воспринимать как нестандартные реализации исходных математических образований.

Таким образом, считая модель $\mathbb{V}^{(B)}$ нестандартным представлением математического мира и учитывая, что $\mathbb{V}^{(B)}$ строится в пределах универсума фон Неймана, мы можем заглянуть внутрь булевозначного мира и увидеть нестандартные изображения стандартных объектов. При переборе алгебр B взору наблюдателя открываются многие ипостаси одной и той же идеи, выраженной теоретико-множественной формулой. Сравнение таких ипостасей между собой составляет метод исследования заложенной в них математической идеи. При этом обнаруживается, что существенно различные аналитические объекты являются просто разными реализациями одной и той же концепции. Тем самым выявляются внутренние причины многих неочевидных параллелей и аналогий, а также возникают дополнительные возможности для изучения старых объектов.

Изложенное напоминает знаменитую платонову пещеру. Если кому-то удалось вырваться из этой пещеры, то он, желая поведать увиденное остальным, мог бы ночью зажечь снаружи пещеры несколько костров. Тогда каждая вещь на поверхности проявится внутри пещеры не одной тенью (как у Платона), а набором различных теней. Теперь узники пещеры могут постигать суть недоступных им вещей, изучая множество теней интересующего их предмета, которое несет несравненно бо́льшую информацию, нежели его одна единственная платонова тень.

Сравнительный анализ объектов с помощью булевозначных моделей проводится в два этапа, которые условно можно назвать синтаксическим и семантическим.

На *синтаксическом этапе* изучаемое математическое утверждение (определение, конструкция, свойство и т. п.) превращают в формальный текст символического языка теории множеств, а точнее, в текст подходящего арго. Здесь часто приходится изучать сложность полученного текста и, в частности, выяснять, являются ли этот текст или какие-то его фрагменты ограниченными формулами.

Семантический этап состоит в интерпретации имеющегося формального текста в булевозначном универсуме. Здесь в терминах обычной теории множеств, т. е. в универсуме фон Неймана $\mathbb{V}$, осмысливают (дешифруют, переводят) тексты, содержащие утверждения, истинные для объектов булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$. Это делается с помощью точно определенных операций над элементами и подмножествами булевозначного универсума и универсума фон Неймана.

В текущей главе мы рассматриваем основные операции булевозначного анализа — каноническое вложение, спуск, подъем и погружение. Важнейшие свойства этих операций удобно формулировать, привлекая понятия категории и функтора. Читатель может освежить свои знания основ теории категорий с помощью главы 3.

5.1. Каноническое вложение

Здесь мы более подробно изучим способ вложения класса всех множеств в булевозначный универсум.

5.1.1. Теорема. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) *если класс $X \subset \mathbb{V}$ и элемент $z \in \mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что $\mathbb{V}^{(B)} \models z \in X^{\wedge}$, то $z = \operatorname{mix}_{x \in X}(b_x x^{\wedge})$ для некоторого разбиения единицы $(b_x)_{x \in X}$ в B*;

(2) *для $\mathbb{V}^{2}$-класса Y существует единственный класс $X \subset \mathbb{V}$ такой, что $\mathbb{V}^{2} \models X^{\wedge} = Y$*;

(3) *для $X \subset \mathbb{V}$ и $Y \subset \mathbb{V}$ выполняется*

$$X \in Y \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models X^{\wedge} \in Y^{\wedge}, \quad X = Y \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models X^{\wedge} = Y^{\wedge};$$

(4) *если $\pi : B \to C$ — полный гомоморфизм, то $\pi^* X^{\wedge} = X^{\wedge\!\!\wedge}$ для каждого класса $X \subset \mathbb{V}$, где $X^{\wedge\!\!\wedge}$ — каноническое вложение X в $\mathbb{V}^{(C)}$.*

$\triangleleft$ (1): Для $x \in X$ положим $b_x := [\![x^{\wedge} = z]\!]$. Тогда при $x, y \in X$, $x \neq y$, в силу 4.2.8 (2) будет

$$b_x \wedge b_y \leqslant [\![x^{\wedge} = y^{\wedge}]\!] = \mathbb{0}.$$

С другой стороны,

$$\bigvee\{b_x : x \in X\} = X^{\wedge}(z) = [\![z \in X^{\wedge}]\!] = \mathbb{1},$$

так что $(b_x)_{x \in X}$ — разбиение единицы и $z = \operatorname{mix}_{x \in X}(b_x x^{\wedge})$.

(2): Следует из 4.2.8. В самом деле, если $X' := \{y \in \mathbb{V}^{(2)} : [\![y \in Y]\!] = \mathbb{1}_2\}$ и $X := \{x \in \mathbb{V} : x^{\wedge} \in X'\}$, то для $t \in \mathbb{V}^{(2)}$ по 4.2.8 (3, 4) будет

$$X^{\wedge}(t) = \bigvee\big\{[\![t = x^{\wedge}]\!]^2 : x \in X\big\} = \bigvee\big\{[\![t = x^{\wedge}]\!]^2 : Y(x) = \mathbb{1}_2\big\} = \\ = \bigvee\big\{Y(x) \wedge [\![t = x^{\wedge}]\!]^2 : x \in \mathbb{V}^{(2)}\big\} = Y(t).$$

Единственность вытекает из 4.2.8 (4) и 4.6.8.

(3): Нужно сопоставить 4.6.8 и (2).

(4): Если $\imath_1$ и $\imath_2$ — вложения алгебры 2 в B и C соответственно, то $\pi \circ \imath_1 = \imath_2$ и в силу 4.6.4

$$\pi^* X^{\wedge} = \pi^* \circ \imath_1^*(X^{\wedge}) = \imath_2^* X^{\wedge} = X^{\wedge\!\!\wedge}. \ \triangleright$$

5.1.2. *Если x и y — некоторые множества, то*

$$\{x\}^{\wedge} = \{x^{\wedge}\}^B, \quad \{x, y\}^{\wedge} = \{x^{\wedge}, y^{\wedge}\}^B, \quad (x, y)^{\wedge} = (x^{\wedge}, y^{\wedge})^B.$$

$\lhd$ Все три формулы ограничены. Поэтому из 4.2.9 вытекает:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \{x\}^\wedge = \{x^\wedge\} \wedge \{x,y\}^\wedge = \{x^\wedge, y^\wedge\} \wedge (x,y)^\wedge = (x^\wedge, y^\wedge).$$

Осталось привлечь нужные соотношения из 4.4.8. $\rhd$

5.1.3. *Пусть формула φ класса Σ_1 удовлетворяет всем условиям теоремы* 1.4.14. *Возьмем классы $Z_1, \dots, Z_n$, $Y_1, \dots, Y_m$, и пусть класс Y задан формулой*

$$Y := \big\{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in Z_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in Z_n \wedge \varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)\big\}.$$

Тогда внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ имеет место соотношение

$$Y^\wedge = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in Z_1^\wedge \wedge \ldots \wedge x_n \in Z_n^\wedge \wedge \varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1^\wedge, \dots, Y_m^\wedge)\}.$$

$\lhd$ Согласно теореме 1.4.14 Y — единственный класс, удовлетворяющий $\Phi(Z_1, \dots, Z_n, Y_1, \dots, Y_m)$ и $\Psi(Z_1, \dots, Z_n, Y_1, \dots, Y_m)$, где Φ и Ψ имеют вид

$$\Phi := (\forall\, u \in Y)(\exists\, x_1 \in Z_1) \ldots (\exists\, x_n \in Z_n)(u = (x_1, \dots, x_n) \wedge \varphi(x_1, \dots, Y_m)),$$

$$\Psi := (\forall\, x_1 \in Z_1) \ldots (\forall\, x_n \in Z_n)(\exists\, u)(u = (x_1, \dots, x_n) \wedge \varphi(x_1, \dots, Y_m) \to u \in Y).$$

Как видно, Φ и Ψ — формулы класса Σ_1. Значит, по 4.6.7 (2) будет

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \Phi(Z_1^\wedge, \dots, Y_m^\wedge) \wedge \Psi(Z_1^\wedge, \dots, Y_m^\wedge).$$

Последнее равносильно требуемому. $\rhd$

5.1.4. *Для любых классов $X \subset \mathbb{V}$ и $Y \subset \mathbb{V}$ справедливы утверждения*:

(1) $\mathbb{V}^{(B)} \models (X \cup Y)^\wedge = X^\wedge \cup Y^\wedge$;

(2) $\mathbb{V}^{(B)} \models (X \times Y)^\wedge = X^\wedge \times Y^\wedge$;

(3) $\mathbb{V}^{(B)} \models (\bigcup X)^\wedge = \bigcup (X^\wedge)$;

(4) $\mathrm{Rel}\,(X) \to \mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Rel}\,(X^\wedge)$;

(5) $(F : X \to Y) \to \mathbb{V}^{(B)} \models F^\wedge : X^\wedge \to Y^\wedge$;

(6) $\mathrm{Rel}\,(X) \to \mathbb{V}^{(B)} \models (X``Y)^\wedge = (X^\wedge)``(Y^\wedge)$;

(7) $\mathrm{Rel}\,(X) \to \mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{dom}(X^\wedge) = \mathrm{dom}(X)^\wedge \wedge \mathrm{im}(X^\wedge) = \mathrm{im}(X)^\wedge$.

$\lhd$ Формулы (1)–(5) следуют из 5.1.3 (см. 1.2.10). Для получения (6) и (7) нельзя применить 5.1.3. Поэтому мы выведем их прямым подсчетом, привлекая 4.4.9, 5.1.1 и 5.1.2.

Начнем с выкладки для (6):

$$[\![t \in (X^\wedge)``(Y^\wedge)]\!] = [\![(\exists\, u \in X^\wedge)(\exists\, v \in Y^\wedge)(u = (v,t))]\!] = \bigvee_{u \in X} \bigvee_{v \in Y} [\![u^\wedge = (v^\wedge, t)]\!] =$$

$$= \bigvee_{v \in Y} \bigvee_{(z,w) \in X} [\![z^\wedge = v^\wedge]\!] \wedge [\![w^\wedge = t]\!] = \bigvee \big\{[\![w^\wedge = t]\!] : v \in Y, (v,w) \in X\big\} =$$

$$= [\![(\exists\, w \in (X^\wedge)``(Y^\wedge))\,(t = w)]\!] = [\![t \in (X``Y)^\wedge]\!].$$

Завершим доказательство выкладкой для (7):

$$[\![t \in \mathrm{dom}(X^\wedge)]\!] = [\![(\exists\, u \in X^\wedge)(\exists\, v)(u = (t,v))]\!] =$$

$$= \bigvee_{(z,w) \in X} \bigvee_{v \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![z^\wedge = t]\!] \wedge [\![w^\wedge = v]\!] =$$

$$= \bigvee \{[\![z^\wedge = t]\!] : z \in \mathrm{dom}(X)\} = [\![t \in \mathrm{dom}(X)^\wedge]\!]. \rhd$$

5.1.5. Теорема. *Пусть X и Y — непустые множества, $F \subset X \times Y$. Рассмотрим соответствие $\Phi := (F, X, Y)$. Тогда элемент $\Phi^\wedge \in \mathbb{V}^{(B)}$ удовлетворяет следующим условиям*:

(1) $\mathbb{V}^{(B)} \models \Phi^\wedge$ — *соответствие из* $X^\wedge$ *в* $Y^\wedge$ *и* $\mathrm{Gr}(\Phi^\wedge) = F^\wedge$;

(2) $\mathbb{V}^{(B)} \models \Phi^\wedge(A^\wedge) = \Phi(A)^\wedge$ *при всех* $A \in \mathscr{P}(X)$;

(3) $\mathbb{V}^{(B)} \models (\Psi \circ \Phi)^\wedge = \Psi^\wedge \circ \Phi^\wedge$ *для любого соответствия* Ψ;

(4) $\mathbb{V}^{(B)} \models (I_X)^\wedge = I_{X^\wedge}$.

$\lhd$ (1): Если формула $\varphi(X, Y, F, \Phi)$ утверждает, что Φ — соответствие из X в Y и $F = \mathrm{Gr}(\Phi)$, то φ — ограниченная формула и требуемое вытекает из 4.2.9.

(2): Следует из 5.1.4 (6).

(3), (4): Опять мы имеем дело с ограниченными формулами и поэтому достаточно сослаться на 4.2.9. $\rhd$

5.1.6. *Для любого отображения $f : X \to Y$ элемент $f^\wedge$ удовлетворяет условиям*

(1) $\mathbb{V}^{(B)} \models f^\wedge : X^\wedge \to Y^\wedge$;

(2) $\mathbb{V}^{(B)} \models f^\wedge(x^\wedge) = f(x)^\wedge$ *при всех* $x \in X$;

(3) $\mathbb{V}^{(B)} \models (g \circ f)^\wedge = g^\wedge \circ f^\wedge$ *для любого* $g : Y \to Z$.

$\lhd$ Следует из 5.1.5 и 5.1.4 (5). $\rhd$

5.1.7. Остановимся на свойствах ординалов внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

(1) Нам уже известно (см. 4.4.10), что $\mathrm{Ord}\,(X)$ — ограниченная формула. Поскольку $\lim(\alpha) \leqslant \alpha$ для всякого ординала α, то формулу $\mathrm{Ord}\,(x) \wedge x = \lim(x)$ можно записать в виде $\mathrm{Ord}\,(x) \wedge (\forall\, t \in x)(\exists\, s \in x)(t \in s)$, а значит, она также ограничена. Наконец, запись

$$\mathrm{Ord}\,(x) \wedge x = \lim(x) \wedge (\forall\, t \in x)(t = \lim(t) \to t = 0)$$

убеждает, что «наименьший предельный ординал» — также ограниченная формула. Таким образом, согласно 4.2.9 α — (наименьший) предельный ординал в том и только в том случае, если $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\alpha^\wedge$ — (наименьший) предельный ординал». Так как ω — наименьший предельный ординал (см. 1.5.6), то $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\omega^\wedge$ — наименьший предельный ординал».

(2) Из 1.5.5 (2), 4.6.8 и 4.6.9 следует, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathrm{On}^\wedge$ — единственный ординальный класс, не являющийся ординалом». Таким образом, для любого $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ имеет место соотношение

$$[\![\mathrm{Ord}\,(x)]\!] = \bigvee\{[\![x = \alpha^\wedge]\!] :\, \alpha \in \mathrm{On}\}.$$

(3) *Любой ординал внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ есть перемешивание некоторого множества стандартных ординалов. Иными словами, для произвольного $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ выполнено $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Ord}\,(x)$ в том и только в том случае, если существуют ординал $\beta \in \mathrm{On}$ и разбиение единицы $(b_\alpha)_{\alpha\in\beta} \subset B$ такие, что $x = \mathrm{mix}_{\alpha\in\beta}(b_\alpha \alpha^\wedge)$.*

$\lhd$ Этот факт вытекает из (2) и 5.1.1 (1). $\rhd$

(4) Из 4.6.9 получаем формулы квантификации по ординалам:

$$[\![(\forall\, x)(\mathrm{Ord}\,(x) \to \psi(x))]\!] = \bigwedge_{\alpha\in\mathrm{On}} [\![\psi(\alpha^\wedge)]\!],$$

$$[\![(\exists\, x)(\mathrm{Ord}\,(x) \wedge \psi(x))]\!] = \bigvee_{\alpha\in\mathrm{On}} [\![\psi(\alpha^\wedge)]\!].$$

5.1.8. Класс X называют *конечным*, если X совпадает с образом некоторой функции, определенной на конечном ординале. Символически конечность класса X записывают в виде $\mathrm{Fin}(X)$, так что

$$\mathrm{Fin}(X) := (\exists\, n)(\exists\, f)(n \in \omega \wedge \mathrm{Fnc}\,(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = n \wedge \mathrm{im}(f) = X).$$

Легко заметить, что выписанная формула не ограничена. Поскольку в силу NGB_6 выполнено $\mathrm{Fin}(X) \to M(X)$, вместо конечных классов мы будем говорить о конечных множествах. Символом $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ обозначен класс всех конечных подмножеств класса X, т. е.

$$\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) := \{Y \in \mathscr{P}(X) : \mathrm{Fin}(Y)\}.$$

Выясним теперь, что происходит с конечными множествами при каноническом вложении $\mathbb{V}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. узнаем, что из себя представляет класс $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^{\wedge}$. Сначала покажем, что

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^{\wedge} \subset \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X^{\wedge}).$$

$\lhd$ Заметим, что если f — отображение из некоторого $n \in \omega$ в X, то $[\![\mathrm{im}(f^{\wedge}) \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X^{\wedge})]\!] = \mathbb{1}$. Действительно, по 5.1.6 $[\![f^{\wedge} : n^{\wedge} \to X^{\wedge}]\!] = [\![n^{\wedge} \in \omega^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}$ и поэтому

$$[\![\mathrm{im}(f^{\wedge}) \in \mathscr{P}(X^{\wedge}) \wedge \mathrm{Fin}(\mathrm{im}(f^{\wedge}))]\!] = \mathbb{1}.$$

Теперь для произвольного $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ легко сосчитать (см. 4.2.8 (1), 5.1.4 (7), 5.1.6):

$$[\![t \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^{\wedge}]\!] = \bigvee_{u \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)} [\![t = u^{\wedge}]\!] = \bigvee_{n \in \omega} \bigvee_{f : n \to X} [\![t = \mathrm{im}(f)^{\wedge}]\!] =$$

$$= \bigvee_{n \in \omega} \bigvee_{f : n \to X} [\![t = \mathrm{im}(f^{\wedge})]\!] \wedge [\![n^{\wedge} \in \omega^{\wedge}]\!] \wedge [\![f^{\wedge} : n^{\wedge} \to X^{\wedge}]\!] \leqslant [\![t \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X^{\wedge})]\!]. \rhd$$

5.1.9. *Для любого класса X выполняется*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^{\wedge} = \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X^{\wedge}).$$

$\lhd$ Предположим, что для $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ справедливы равенства

$$[\![t \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X^{\wedge})]\!] = [\![(\exists\, n \in \omega^{\wedge})(\exists\, f)(f : n \to X^{\wedge} \wedge t = \mathrm{im}(f)]\!] = \mathbb{1}.$$

Тогда существует такое счетное разбиение единицы $(b^{(n)})_{n \in \omega} \subset B$, что

$$[\![(\exists\, f)(f : n^{\wedge} \to X^{\wedge} \wedge t = \mathrm{im}(f)]\!] \geqslant b^{(n)} \quad (n \in \omega).$$

Для каждого $n \in \omega$ по принципу максимума можно подыскать $f'_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ так, чтобы было выполнено неравенство

$$[\![f'_n : n^{\wedge} \to X^{\wedge}]\!] \wedge [\![t = \mathrm{im}(f'_n)]\!] \geqslant b^{(n)}.$$

Пользуясь 5.1.6, подберем $f''_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ так, чтобы $[\![f''_n : n^{\wedge} \to X^{\wedge}]\!] \geqslant (b^{(n)})^*$, и положим $f_n := \mathrm{mix}\{b^{(n)} f'_n,\ (b^{(n)})^* f''_n\}$. Тогда $[\![f_n : n^{\wedge} \to X^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![t = \mathrm{im}(f_n)]\!] \geqslant b^{(n)}$. Далее, для каждого $k \in n$ имеем $[\![f_n(k^{\wedge}) \in X^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}$. Следовательно, $f_n(k) =$

$\mathrm{mix}(b_x^{(k)}x^\wedge)$ для некоторого разбиения единицы $(b_x^{(k)})_{x\in X}$ (см. 5.1.1 (1)). Таким образом,

$$[\![f_n(k^\wedge)=x^\wedge]\!]\geqslant b_x^{(k)}\quad(x\in X,\,k\in n).$$

Пусть X^n — как обычно, класс всех отображений из n в X. Заметим, что для $g\in X^n$ и $k\in n$ будет

$$[\![f_n(k^\wedge)=g^\wedge(k^\wedge)]\!]=[\![f_n(k^\wedge)=g(k)^\wedge]\!]\geqslant b_{g(k)}^{(k)}.$$

Стало быть, $[\![f_n=g^\wedge]\!]\geqslant b_{g,n}$, где $b_{g,n}:=\bigwedge\{b_{g(k)}^{(k)}:k\in n\}$. Но тогда выполнено также

$$[\![\mathrm{im}(f)=\mathrm{im}(g^\wedge)]\!]\geqslant b_{g,n}\quad(g\in X^n).$$

По определению $\mathrm{im}(g)\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)$, а в силу 5.1.4 (7) верно

$$[\![\mathrm{im}(g^\wedge)\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^\wedge]\!]=\mathbb{1}.$$

Отсюда

$$[\![t\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^\wedge]\!]\geqslant[\![t=\mathrm{im}(f_n)]\!]\wedge[\![\mathrm{im}(f_n)=\mathrm{im}(g^\wedge)]\!]\wedge$$
$$\wedge[\![\mathrm{im}(g^\wedge)\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^\wedge]\!]\geqslant b^{(n)}\wedge b_{g,n}.$$

Пользуясь определением элемента $b_{g,n}$ и дистрибутивными законами 2.1.6 (1, 2), можно сосчитать:

$$\bigvee\{b^{(n)}\wedge b_{g,n}:n\in\omega\wedge g\in X^n\}=\bigvee_{n\in\omega}b^{(n)}\wedge\Bigg(\bigvee_{g\in X^n}\bigwedge_{k\in n}b_{g(k)}^{(k)}\Bigg)=$$
$$=\bigvee_{n\in\omega}b^{(n)}\wedge\Bigg(\bigwedge_{k\in n}\bigvee_{g\in X^n}b_{g(k)}^{(k)}\Bigg)=\bigvee_{n\in\omega}b^{(n)}\wedge\Bigg(\bigwedge_{k\in n}\bigvee_{x\in X}b_x^{(k)}\Bigg)=\bigvee_{n\in\omega}b^{(n)}=\mathbb{1}.$$

Как видно, $[\![t\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^\wedge]\!]=\mathbb{1}$. Поэтому, привлекая 4.6.9, можно заключить,что $[\![\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X^\wedge)\subset\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^\wedge]\!]=\mathbb{1}$. Противоположное включение обосновано в 5.1.8. $\rhd$

5.1.10. *Для любого класса X и для каждого $n\in\omega$ имеют место соотношения*

(1) $\mathbb{V}^{(B)}\models(X^n)^\wedge=(X^\wedge)^{n^\wedge}$;

(2) $\mathbb{V}^{(B)}\models\mathscr{P}(X)^\wedge\subset\mathscr{P}(X^\wedge)$.

$\lhd$ (1): В силу 5.1.6 для произвольного $t\in\mathbb{V}^{(B)}$ можно написать:

$$[\![t\in(X^n)^\wedge]\!]=\bigvee\big\{[\![t=u^\wedge]\!]:u\in X^n\big\}=$$
$$=\bigvee\big\{[\![t=u^\wedge]\!]\wedge[\![u^\wedge:n^\wedge\to X^\wedge]\!]:u\in X^n\big\}\leqslant$$
$$\leqslant\bigvee\big\{[\![t=u]\!]\wedge[\![u:n^\wedge\to X^\wedge]\!]:u\in\mathbb{V}^{(B)}\big\}=$$
$$=[\![(\exists\,u)(u:n^\wedge\to X^\wedge\wedge t=u)]\!]=[\![t\in(X^\wedge)^{n^\wedge}]\!].$$

Этим установлено равенство

$$[\![(X^n)^\wedge\subset(X^\wedge)^{n^\wedge}]\!]=\mathbb{1}.$$

Для оценки истинности обратного включения рассмотрим такой элемент $u\in\mathbb{V}^{(B)}$, что $[\![u:n^\wedge\to X^\wedge]\!]=\mathbb{1}$. Тогда $[\![u(k^\wedge)\in X^\wedge]\!]=\mathbb{1}$ $(k\in n)$, значит, $[\![u(k^\wedge)=\mathrm{mix}(b_x^{(k)}x^\wedge)]\!]=\mathbb{1}$ для некоторого разбиения единицы $(b_x^{(k)})_{x\in X}$ (см.

5.1.1 (1)). Переходя к более мелким разбиениям единицы, если нужно, можно подобрать такое разбиение единицы (b_ξ) и такие семейства $(x_{k,\xi}) \subset X$ $(k \in n)$, что $[\![u(k^\wedge) = \operatorname{mix}(b_\xi x^\wedge_{k,\xi})]\!] = \mathbb{1}$ для всех $k \in n$. Определим функции $u_\xi : n \to X$ соотношениями $u_\xi(k) := x_{k,\xi}$. Тогда $[\![u = u^\wedge_\xi]\!] \geqslant b_\xi$ и $[\![u^\wedge_\xi \in (X^n)^\wedge]\!] = \mathbb{1}$, значит, $[\![u \in (X^n)^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. В силу 4.6.9 $[\![(X^\wedge)^{n^\wedge} \subset (X^n)^\wedge]\!] = \mathbb{1}$.

(2): Устанавливается прямым подсчетом. $\triangleright$

5.2. Спуск множеств

Обратимся к проблеме перевода сообщений об элементах универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ в утверждения об обычных множествах. Роль переводчика обычно выполняет операция спуска. *Слово спуск принято использовать для обозначения как результата, так и способа изображения элементов из* $\mathbb{V}^{(B)}$ *в универсуме* $\mathbb{V}$. Таким образом, неформально говоря, спуск действует из $\mathbb{V}^{(B)}$ в $\mathbb{V}$.

5.2.1. Рассмотрим произвольный $\mathbb{V}^{(B)}$-класс $X : \mathbb{V}^{(B)} \to B$ и положим

$$X{\downarrow} := \bigl\{x \in \mathbb{V}^{(B)} : [\![x \in X]\!] = \mathbb{1}_B\bigr\}.$$

Это равенство определяет некоторый подкласс $X{\downarrow}$ универсального класса $\mathbb{V}$, называемый *спуском* $\mathbb{V}^{(B)}$-класса X. Пусть $X_\varphi := \bar{\varphi}$ — класс внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, определяемый B-формулой φ (см. 4.5.6). Тогда спуск класса X_φ имеет вид

$$X_\varphi{\downarrow} = \bigl\{x \in \mathbb{V}^{(B)} :\ [\![\varphi(x)]\!] = \mathbb{1}\bigr\}.$$

При этом формулу $x \in X_\varphi{\downarrow}$ выражают словами «x удовлетворяет φ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$». Так, например, если $f \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $[\![\operatorname{Fnc}(f)]\!] = \mathbb{1}$, то говорят, что f — *функция внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ или *функция в модели* $\mathbb{V}^{(B)}$. Очевидно, что спуск универсального $\mathbb{V}^{(B)}$-класса $\mathbb{U}_B$ совпадает с $\mathbb{V}^{(B)}$. Сразу же отметим две полезные формулы, вытекающие непосредственно из 4.6.9 (φ и ψ — произвольные B-формулы):

$$[\![X_\varphi \subset X_\psi]\!] = \bigwedge \bigl\{[\![\psi(x)]\!] : x \in X_\varphi{\downarrow}\bigr\},$$
$$[\![X_\varphi \cap X_\psi \neq \varnothing]\!] = \bigvee \bigl\{[\![\psi(x)]\!] : x \in X_\varphi{\downarrow}\bigr\}.$$

В дальнейшем мы будем постоянно использовать следующий прием сокращения записей. Пусть символ f — (общепринятое) обозначение для некоторой n-местной функции, например, $\{\,\cdot\,,\cdot\,\}$, $(\,\cdot\,,\cdot\,)$, $\Phi(\,\cdot\,)$, $\pi_\Phi(\,\cdot\,)$ и т. п. Тогда для любых $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ существует единственный $x_f \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что

$$[\![x_f = f(x_1,\dots,x_n)]\!] = [\![(\exists\, x)(x_1,\dots,x_n,x) \in f]\!].$$

В этой ситуации вместо $x_f{\downarrow}$ мы пишем просто $f(x_1,\dots,x_n){\downarrow}$. Например, $\Phi(A){\downarrow}$ — это класс, определяемый соотношением

$$y \in \Phi(A) \leftrightarrow ([\![(\exists\, x \in A)(y \in \Phi(x))]\!] = \mathbb{1}).$$

5.2.2. Пусть X — подкласс класса $\mathbb{V}^{(B)}$ (т. е. $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$ в смысле $\mathbb{V}$). Говорят, что X является *циклическим* (или *полным*) и пишут $\operatorname{Cyc}(X)$, если X замкнут относительно перемешиваний любых своих подсемейств по произвольным разбиениям единицы. Иными словами, класс X цикличен, когда для любого разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset B$ и каждого семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset X$ будет $\mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi) \in X$. Очевидно, что пересечение любого множества циклических множеств — снова циклическое множество. Наименьшее циклическое множество, содержащее данное множество $M \subset \mathbb{V}^{(B)}$, называют *циклической оболочкой* или *циклическим расширением* M и обозначают $\mathrm{cyc}(M)$. Понятно, что множество $M \subset \mathbb{V}^{(B)}$ будет циклическим в том и только в том случае, если $M = \mathrm{cyc}(M)$.

5.2.3. *Пусть X и Y — классы внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Имеют место утверждения*:

(1) $[\![X \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1} \to X{\downarrow} \neq \varnothing \wedge \mathrm{Cyc}(X{\downarrow})$;

(2) $X \in \mathbb{V}^{(B)} \to X{\downarrow} \in \mathbb{V}$;

(3) $X = Y \leftrightarrow X{\downarrow} = Y{\downarrow}$.

$\lhd$ (1): Непустота класса $X{\downarrow}$ вытекает из принципа максимума. Если $(x_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset X{\downarrow}$ и $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы, то для $x := \mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi)$ выполнено

$$[\![x \in X]\!] \geqslant [\![x = x_\xi]\!] \wedge [\![x_\xi \in X]\!] \geqslant b_\xi \quad (\xi \in \Xi).$$

Значит, $[\![x \in X]\!] \geqslant \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi = \mathbb{1}$ и $x \in X{\downarrow}$.

(2): Предположим, что $X \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $x \in X{\downarrow}$. Пусть $u : \mathrm{dom}(u) \to B$ — такая функция, что $\mathrm{dom}(u) \subset \mathbb{V}^{(B)}$, $\mathrm{dom}(u) \in \mathbb{V}$ и $\bar{u}(\,\cdot\,) = [\![\,\cdot \in X]\!]$ (см. 4.5.7). Тогда

$$\bigvee \big\{u(t) \wedge [\![t = x]\!] \,:\, t \in \mathrm{dom}(u)\big\} = \mathbb{1}.$$

Привлекая следствие 2.1.10 (1) принципа исчерпывания, найдем разбиение единицы $(b_\xi) \subset B$ и семейство $(t_\xi) \subset \mathrm{dom}(u)$, для которых $u(t_\xi) \wedge [\![x = t_\xi]\!] \geqslant b_\xi$. Отсюда видно, что $x = \mathrm{mix}(b_\xi t_\xi)$. Обозначим $\mathrm{Part}(B)$ множество всех разбиений единицы в B и положим

$$Y := \bigcup \big\{(\mathrm{dom}(u))^\theta \,:\, \theta \in \mathrm{Part}(B)\big\}.$$

Рассмотрим функцию F, сопоставляющую каждому x множество упорядоченных пар (θ, v) таких, что $\theta \in \mathrm{Part}(B)$, $v : \theta \to \mathrm{dom}(u)$ и если $\theta := (b_\xi)$, то $x = \mathrm{mix}(b_\xi x_\xi)$, где $x_\xi := v(b_\xi)$. Ясно, что $\mathrm{dom}(F) \supset X{\downarrow}$, $\mathrm{im}(F) \subset \mathscr{P}(\mathrm{Part}(B) \times Y)$ и $F(x) \cap F(y) = \varnothing$ при $x \neq y$. Таким образом, $|X{\downarrow}| \leqslant |\mathscr{P}(\mathrm{Part}(B) \times Y)|$ и $X{\downarrow} \in \mathbb{V}$.

(3): Если $X{\downarrow} = Y{\downarrow}$, то согласно 4.6.9 будет

$$[\![X \subset Y]\!] = \bigwedge_{t\in X\downarrow} [\![t \in Y]\!] = \bigwedge_{t\in Y\downarrow} [\![t \in Y]\!] = \mathbb{1}.$$

Аналогично $[\![Y \subset X]\!] = \mathbb{1}$ и поэтому $[\![X = Y]\!] = \mathbb{1}$. $\rhd$

5.2.4. *Каковы бы ни были $\mathbb{V}^{(B)}$-классы X и Y, справедливы следующие формулы*:

(1) $(X \cap Y){\downarrow} = X{\downarrow} \cap Y{\downarrow}$;

(2) $(\mathbb{V}^{(B)} \models X \subset Y) \leftrightarrow X{\downarrow} \subset Y{\downarrow}$.

$\lhd$ (1): По определению для произвольного $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ будет

$$[\![x \in X \cap Y]\!] = [\![x \in X \wedge x \in Y]\!] = [\![x \in X]\!] \wedge [\![x \in Y]\!].$$

Стало быть, $x \in (X \cap Y){\downarrow}$ в том и только в том случае, если одновременно $x \in X{\downarrow}$ и $x \in Y{\downarrow}$.

(2): Учитывая (1) и 5.2.3 (3), можно написать

$$\mathbb{1} = [\![X \subset Y]\!] \leftrightarrow \mathbb{1} = [\![X \cap Y = X]\!] \leftrightarrow X{\downarrow} \cap Y{\downarrow} = X{\downarrow} \leftrightarrow X{\downarrow} \subset Y{\downarrow}. \ \triangleright$$

5.2.5. (1) Несколько иначе, чем в 5.2.4, обстоит дело со спусками дополнения к классу и объединения классов. Рассмотрим произвольный класс $Y \subset \mathbb{V}^{(B)}$. Поскольку формула $x \in \mathbb{V}^{(B)} \wedge (\forall\, y \in Y)([\![x = y]\!] = \mathbb{0})$ предикативная, существует класс $Y^{\mathfrak{c}}$, определяемый соотношением

$$x \in Y^{\mathfrak{c}} \leftrightarrow x \in \mathbb{V}^{(B)} \wedge (\forall\, y \in Y)([\![x = y]\!] = \mathbb{0}).$$

Пусть теперь X — класс внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Символом X^c мы обозначим $\mathbb{V}^{(B)}$-класс, являющийся дополнением к классу X внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е.

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x)(x \in X^c \leftrightarrow x \notin X).$$

Существование $\mathbb{V}^{(B)}$-класса X^c вытекает из 4.6.11.

(2) Рассмотрим формулу

$$\varphi(y, B, Y, \mathbb{V}^{(B)}, [\![\,\cdot = \cdot\,]\!]) := (\forall\, a)(\forall\, b)(\forall\, x)(b : a \to Y \wedge$$
$$\wedge \text{«}b \text{ — разбиение единицы»} \wedge x : a \to Y \wedge y = \operatorname*{mix}_{\alpha \in a}(b(\alpha) \cdot x(\alpha))),$$

утверждающую, что y есть перемешивание некоторого семейства элементов класса Y. Можно убедиться, что эта формула предикативна. Значит, существует класс $\operatorname{mix}(Y)$ такой, что

$$(\forall\, y)(y \in \operatorname{mix}(Y) \leftrightarrow \varphi(y, B, Y, \mathbb{V}^{(B)}, [\![\,\cdot = \cdot\,]\!]).$$

В качестве примера укажем на то, что для произвольного класса $X \subset \mathbb{V}$ будет $X^{\wedge}{\downarrow} = \operatorname{mix}(X_1)$, где $X_1 := \{x^{\wedge} : x \in X\}$, а каноническое вложение осуществляет инъекцию X в $\operatorname{mix}(X_1)$ (см. 5.1.1 (1)).

5.2.6. *Если класс Y является множеством, то*

$$\operatorname{mix}(Y) = \operatorname{cyc}(Y).$$

$\triangleleft$ Нужно лишь обосновать, что множество $\operatorname{mix}(Y)$ всевозможных перемешиваний $\operatorname{mix}_{y \in Y}(b_y y)$ элементов множества Y циклично. Рассмотрим разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и элементы

$$y_\xi := \operatorname*{mix}_{y \in Y}(b_{\xi,y} y) \quad (\xi \in \Xi)$$

в множестве $\operatorname{mix}(Y)$. Положим $y_0 := \operatorname{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi y_\xi)$ и $b_{(\xi,y)} := b_\xi \wedge b_{\xi,y}$ $(\xi \in \Xi, y \in Y)$. Если $(\xi, y) \neq (\eta, z)$, то

$$b_{(\xi,y)} \wedge b_{(\eta,z)} = b_\xi \wedge b_\eta \wedge b_{\xi,y} \wedge b_{\eta,z} = \mathbb{0}.$$

Кроме того, нетрудно вычислить (см. 2.1.6 (2))

$$\bigvee_{(\xi,y) \in \Xi \times Y} b_{(\xi,y)} = \bigvee_{\xi \in \Xi} \left(b_\xi \wedge \bigvee_{y \in Y} b_{\xi,y} \right) = \mathbb{1}.$$

Следовательно, $(b_{(\xi,y)})$ — разбиение единицы. Для любого $y \in Y$ будет

$$[\![y_0 = y]\!] \geqslant [\![y_0 = y_\xi]\!] \wedge [\![y_\xi = y]\!] \geqslant b_\xi \wedge b_{\xi,y} \quad ((\xi, y) \in \Xi \times Y).$$

Отсюда видно, что $y_0 = \mathrm{mix}(b_{(\xi,y)} y)$, а потому $y_0 \in \mathrm{mix}(Y)$, т. е. $\mathrm{mix}(Y)$ — циклическое множество. $\rhd$

5.2.7. *Для любых непустых классов X и Y внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ выполнено*:

(1) $X^c{\downarrow} = X{\downarrow}^{\mathsf{c}}$;

(2) $(X \cup Y){\downarrow} = \mathrm{mix}(X{\downarrow} \cup Y{\downarrow})$.

$\lhd$ (1): Ввиду определений и 4.6.9 имеют место эквивалентности

$$x \in X^c{\downarrow} \leftrightarrow [\![x \in X^c]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow [\![x \notin X]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow [\![x \in X]\!] = \mathbb{0} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \bigvee \big\{ [\![x = s]\!] : \, s \in X{\downarrow} \big\} = \mathbb{0} \leftrightarrow (\forall\, s \in X{\downarrow})([\![s = x]\!] = \mathbb{0}) \leftrightarrow x \in (X{\downarrow})^{\mathsf{c}}.$$

(2): Из 5.2.4 (2) видно, что $X{\downarrow} \cup Y{\downarrow} \subset (X \cup Y){\downarrow}$. Наоборот, если $z \in (X \cup Y){\downarrow}$, то

$$(\exists\, x \in X)(\exists\, y \in Y)(x = z \vee y = z).$$

Привлекая принцип максимума, подберем $x_0, y_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$ так, чтобы $b \vee c = \mathbb{1}$, где $b := [\![x_0 \in X]\!] \wedge [\![x_0 = z]\!]$ и $c := [\![y_0 \in Y]\!] \wedge [\![y_0 = z]\!]$. Возьмем произвольные $x_1 \in X{\downarrow}$ и $y_1 \in Y{\downarrow}$ и положим $x = \mathrm{mix}\{bx_0, b^* x_1\}$, $y := \mathrm{mix}\{cy_0, c^* y_1\}$. Тогда $x \in X{\downarrow}$, ибо

$$b \leqslant [\![x = x_0]\!] \wedge [\![x_0 \in X]\!] \leqslant [\![x \in X]\!],$$
$$b^* \leqslant [\![x_1 = x]\!] \wedge [\![x_1 \in X]\!] \leqslant [\![x \in X]\!].$$

По аналогичной причине $y \in Y{\downarrow}$. Кроме того,

$$b \leqslant [\![x = x_0]\!] \wedge [\![x_0 = z]\!] \leqslant [\![x = z]\!],$$
$$b^* \leqslant c \leqslant [\![y = y_0]\!] \wedge [\![y_0 = z]\!] \leqslant [\![y = z]\!],$$

т. е. $z = \mathrm{mix}\{bx, b^* y\}$ и $z \in \mathrm{mix}(X{\downarrow} \cup Y{\downarrow})$. $\rhd$

Здесь можно отметить дополнительно, что фактически

(3) $(X \cup Y){\downarrow} = \bigcup_{b \in B} bX{\downarrow} \oplus b^* Y{\downarrow}$, *где* $bX{\downarrow} \oplus b^* Y{\downarrow}$ — *множество элементов вида* $\mathrm{mix}\{bx, b^* y\}$ $(x \in X{\downarrow},\ y \in Y{\downarrow})$.

5.2.8. Иногда операцию спуска приходится осуществлять повторно. Поясним, как это происходит.

Пусть X — некоторый класс. Зададим класс-функцию Y формулой

$$Y := \big\{ (x, y) : \, x \in \mathbb{V}^{(B)} \wedge y = x{\downarrow} \big\}.$$

Двойным спуском класса X называют класс $\bigcup \mathrm{im}(Y{\restriction}(X{\downarrow}))$, обозначаемый $X{\downarrow\downarrow}$. Таким образом,

$$X{\downarrow\downarrow} = \bigcup \big\{ x{\downarrow} : \, x \in X{\downarrow} \big\}.$$

Разумеется, если $X \in \mathbb{V}^{(B)}$, то $X{\downarrow\downarrow} \in \mathbb{V}$ (см. 5.2.3 (2)).

5.2.9. *Для любого непустого $\mathbb{V}^{(B)}$-класса X справедливы соотношения*:

(1) $(\bigcup X){\downarrow} = \bigcup (X{\downarrow\downarrow})$;

(2) $(\bigcap Y){\downarrow} = \bigcap (X{\downarrow\downarrow})$;

(3) $\mathscr{P}(X){\downarrow\downarrow} \subset \mathscr{P}(X{\downarrow})$.

$\lhd$ Доказательство опирается на 4.6.9. Вот соответствующие вычисления:

(1): $u \in \bigcup(X{\downarrow\downarrow}) \leftrightarrow (\exists\, v \in X{\downarrow\downarrow})(u \in v) \leftrightarrow (\exists\, z \in X{\downarrow})(u \in z{\downarrow}) \leftrightarrow (\exists\, z \in X{\downarrow})$ $([\![u \in z]\!] = \mathbb{1}) \leftrightarrow [\![(\exists\, z \in X)(u \in z)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow [\![u \in \bigcup X]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow u \in (\bigcup X){\downarrow}$.

(2): $u \in \bigcap(X{\downarrow\downarrow}) \leftrightarrow (\forall\, v \in X{\downarrow\downarrow})(u \in v) \leftrightarrow (\forall\, z \in X{\downarrow})(u \in z{\downarrow}) \leftrightarrow (\forall\, z \in X{\downarrow})$ $([\![u \in z]\!] = \mathbb{1}) \leftrightarrow [\![(\forall\, z \in X)(u \in z)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow [\![u \in \bigcap X]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow u \in (\bigcap X){\downarrow}$.

(3): $u \in \mathscr{P}(X){\downarrow\downarrow} \leftrightarrow (\exists\, z \in \mathscr{P}(X){\downarrow})(u = z{\downarrow}) \leftrightarrow (\exists\, z)([\![z \subset X]\!] = \mathbb{1} \wedge u = z{\downarrow}) \leftrightarrow$ $(\exists\, z)(z{\downarrow} \subset X{\downarrow} \wedge u = z{\downarrow}) \rightarrow u \in \mathscr{P}(X{\downarrow})$. $\rhd$

5.3. Спуск соответствий

Спуск бинарного отношения из $\mathbb{V}^{(B)}$ однозначно определяет некоторое бинарное отношение в $\mathbb{V}$. Возникающие при этом связи — предмет текущего параграфа.

5.3.1. Пусть X и Y — два $\mathbb{V}^{(B)}$-класса, а $X \times_B Y$ — их декартово произведение внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, которое существует из-за 1.4.13 (2) и 4.6.11.

Отображение

$$(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^B : (x, y) \mapsto (x, y)^B \quad (x \in X{\downarrow},\ y \in Y{\downarrow})$$

осуществляет биекцию класса $X{\downarrow} \times Y{\downarrow}$ *на класс* $(X \times_B Y){\downarrow}$. *При этом*

$$[\![\mathrm{Pr}_{X\downarrow}(x, y) = \mathrm{Pr}_X(x, y)]\!] = [\![\mathrm{Pr}_{Y\downarrow}(x, y) = \mathrm{Pr}_Y(x, y)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X{\downarrow},\ y \in Y{\downarrow}),$$

где $\mathrm{Pr}_{X\downarrow}$ *и* $\mathrm{Pr}_{Y\downarrow}$ *— канонические проекторы на компоненты* $X{\downarrow}$ *и* $Y{\downarrow}$ *соответственно, а* Pr_X *и* Pr_Y *— канонические проекторы внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ *на* X *и* Y *соответственно.*

(Следует иметь в виду, что Pr_X и Pr_Y — классы внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а $\mathrm{Pr}_{X\downarrow}$ и $\mathrm{Pr}_{Y\downarrow}$ — классы в смысле $\mathbb{V}$.)

$\lhd$ Как было отмечено ранее (см. 4.4.9 и 4.5.4), функция $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^B$ является инъективным вложением класса $\mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)}$ в класс $\mathbb{V}^{(B)}$. Ввиду этого достаточно установить, что $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^B$ отображает $X{\downarrow} \times Y{\downarrow} \subset \mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)}$ на $(X \times_B Y){\downarrow}$. Для любых $x \in X{\downarrow}$ и $y \in Y{\downarrow}$ имеем

$$[\![(x, y)^B \in X \times_B Y]\!] = [\![(\exists\, u)(\exists\, v)(u \in X \wedge v \in Y \wedge (u, v) = (x, y)^B)]\!] =$$
$$= \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} \bigvee_{v \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![u \in X]\!] \wedge [\![v \in Y]\!] \wedge [\![(u, v) = (x, y)^B]\!] \geqslant$$
$$\geqslant [\![x \in X]\!] \wedge [\![y \in Y]\!] \wedge [\![(x, y) = (x, y)^B]\!] = \mathbb{1}.$$

Таким образом, $(x, y)^B \in (X \times_B Y){\downarrow}$. Рассмотрим теперь произвольный элемент $z \in (X \times_B Y){\downarrow}$ и заметим, что в силу принципа максимума найдутся элементы x и $y \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которых

$$\mathbb{1} = [\![z \in X \times_B Y]\!] = [\![(\exists\, u \in X)(\exists\, v \in Y)(z = (u, v))]\!] =$$
$$= [\![x \in X]\!] \wedge [\![y \in Y]\!] \wedge [\![z = (x, y)]\!].$$

Отсюда $x \in X{\downarrow}$, $y \in Y{\downarrow}$ и $z = (x, y)^B$. Наконец, для $x \in X{\downarrow}$, $y \in Y{\downarrow}$ и $z \in \mathbb{V}^{(B)}$ будет

$$[\![z = \mathrm{Pr}_X(x, y)]\!] = [\![((x, y), z) \in \mathrm{Pr}_X]\!] = [\![z = x]\!] = [\![z = \mathrm{Pr}_{X\downarrow}(x, y)]\!],$$

что обеспечивает справедливость требуемого соотношения для канонического проектора на X. Аналогично обстоит дело и с проектированием на вторую компоненту. $\triangleright$

5.3.2. Рассмотрим бинарное отношение X внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Это означает, что X — класс внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $[\![X$ — бинарное отношение$]\!] = \mathbb{1}$. В соответствии с 5.3.1 и аксиомой области определения NGB_{10} существует класс Y такой, что

$$(x, y) \in Y \leftrightarrow (x, y)^B \in X{\downarrow}.$$

В самом деле, нужно положить

$$Y := \mathrm{dom}((\,\cdot\,,\,\cdot\,)^B \cap (\mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)} \times X{\downarrow})).$$

Ясно, что Y — бинарное отношение и $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^B$ осуществляет биекцию между Y и $X{\downarrow}$. Класс Y мы назовем *спуском бинарного отношения* X и для его обозначения сохраним символ $X{\downarrow}$. Совершенно аналогично определяют спуск $n^{\wedge}$-местного отношения X, а именно:

$$X{\downarrow} := \big\{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{V}^{(B)})^n :\ (x_1, \dots, x_n)^B \in X{\downarrow}\big\}.$$

Таким образом, спуск класса X и спуск бинарного отношения X не одно и то же, а общее обозначение $X{\downarrow}$ — удобная вольность, которую следует всегда иметь в виду, чтобы избежать недоразумений. Например, равенство $(X \times_B Y){\downarrow} = X{\downarrow} \times Y{\downarrow}$ следует воспринимать всего лишь как иную запись первой части 5.3.1. Эти же замечания относятся и к определяемым ниже спускам соответствий, категорий и т. п.

5.3.3. Теорема. *Каковы бы ни были классы X и Y внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, справедливы следующие формулы*:

(1) $\mathrm{dom}(X){\downarrow} = \mathrm{dom}(X{\downarrow})$, $\ \mathrm{im}(X){\downarrow} = \mathrm{im}(X{\downarrow})$;

(2) $(X \restriction Y){\downarrow} = (X{\downarrow}) \restriction (Y{\downarrow})$;

(3) $(X^{-1}){\downarrow} = (X{\downarrow})^{-1}$;

(4) $(X \circ Y){\downarrow} = (X{\downarrow}) \circ (Y{\downarrow})$;

(5) $(X``Y){\downarrow} = (X{\downarrow})``(Y{\downarrow})$;

(6) $(\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Fnc}\,(X)) \leftrightarrow \mathrm{Fnc}\,(X{\downarrow})$;

(7) $[\![x = y]\!] \leqslant [\![X(x) = X(y)]\!]$ $(x, y \in \mathbb{V}^{(B)})$;

(8) $(X{\downarrow})^n = (X^{n^{\wedge}}){\downarrow}(n \in \omega)$.

$\triangleleft$ (1): В силу принципа максимума для любого $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ существует такой $y \in \mathbb{V}^{(B)}$, что

$$[\![x \in \mathrm{dom}(X)]\!] = [\![(\exists\, u)((x, u) \in X)]\!] = [\![(x, y)^B \in X]\!].$$

Отсюда видно, что из $x \in \mathrm{dom}(X){\downarrow}$ в силу принципа максимума следует $x \in \mathrm{dom}(X{\downarrow})$. Наоборот, если $x \in \mathrm{dom}(X{\downarrow})$, то $[\![(x, y) \in X]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого $y \in \mathbb{V}^{(B)}$. Значит,

$$[\![x \in \mathrm{dom}(X)]\!] = \bigvee \big\{[\![(x, u) \in X]\!] :\ u \in \mathbb{V}^{(B)}\big\} \geqslant [\![(x, y) \in X]\!],$$

откуда $x \in \mathrm{dom}(X){\downarrow}$. Второе соотношение доказывают аналогичным образом.

(2): Привлекая 5.2.4 (1), 5.3.1 и определение ограничения $X \upharpoonright Y$, из 1.2.4 выводим

$$(X \upharpoonright Y){\downarrow} = (X \cap (Y \times \mathbb{U}_B)){\downarrow} = X{\downarrow} \cap (Y{\downarrow} \times \mathbb{V}^{(B)}) = (X{\downarrow}) \upharpoonright (Y{\downarrow}).$$

(3): Вытекает из определения X^{-1} (см. 1.2.6).

(4): Взяв класс Z, обозначим через σZ класс, полученный из Z применением σ-транспонирования, где $\sigma := (\imath_1, \imath_2, \imath_3)$ — перестановка множества $\{1, 2, 3\}$ (см. 1.4.10). Тогда нетрудно проверить, что $(\sigma Z){\downarrow} = \sigma(Z{\downarrow})$. Если $Z \in \mathbb{V}^{(B)}$ таков, что $\mathbb{V}^{(B)} \models Z = (Y \times \mathbb{U}_B) \cap (\mathbb{U}_B \times X)$, а $\sigma := \{1, 3, 2\}$, то

$$\mathbb{V}^{(B)} \models X \circ Y = \operatorname{dom}(\sigma Z).$$

Теперь на основании (1), 5.2.4 (1) и 5.3.1 можно написать цепочку равенств:

$$(X \circ Y){\downarrow} = \operatorname{dom}(\sigma Z){\downarrow} = \operatorname{dom}(\sigma(Z{\downarrow})) =$$
$$= \operatorname{dom}(\sigma((Y{\downarrow} \times \mathbb{V}^{(B)}) \cap (\mathbb{V}^{(B)} \times X{\downarrow})) = (X{\downarrow}) \circ (Y{\downarrow}).$$

(5): Последовательное использование (1) и (2) дает

$$(X``Y){\downarrow} = (\operatorname{im}(X \upharpoonright Y)){\downarrow} = \operatorname{im}((X \upharpoonright Y){\downarrow}) = \operatorname{im}((X{\downarrow}) \upharpoonright (Y{\downarrow})) = (X{\downarrow})``(Y{\downarrow}).$$

(6): Допустим, что $[\![\operatorname{Fnc}(X)]\!] = \mathbb{1}$. Тогда $X{\downarrow}$ — бинарное отношение и, кроме того,

$$[\![(x, y) \in X]\!] \wedge [\![(x, z) \in X]\!] \leqslant [\![y = z]\!]$$

для любых $x, y, z \in \mathbb{V}^{(B)}$. Отсюда видно, что при $(x, y) \in X{\downarrow}$ и $(x, z) \in X{\downarrow}$ будет $[\![y = z]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $y = z$. Иными словами, выполняется $\operatorname{Fnc}(X{\downarrow})$. В свою очередь, если $X{\downarrow}$ — однозначное бинарное отношение, то, воспользовавшись правилом 4.6.9, выводим

$$[\![\operatorname{Fnc}(X)]\!] = \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(B)}} \bigwedge \big\{[\![y = z]\!] : (x, y) \in X{\downarrow}, (x, z) \in X{\downarrow}\big\} = \mathbb{1}.$$

(7): Формула $(\forall\, x)(\forall\, y)(x = y \to X``\{x\} = X``\{y\})$ является теоремой ZF и поэтому имеет единичную оценку истинности. Развертывая значения оценки истинности для кванторов, а затем для импликации, получим требуемое.

(8): Если $[\![t : n^\wedge \to X]\!] = \mathbb{1}$, то для каждого $k \in n$ существует единственный элемент $x \in X{\downarrow}$, для которого $[\![t(k^\wedge) = x]\!] = \mathbb{1}$. Полагая $s(k) := x$ при $k \in n$, получим отображение $s : n \to X{\downarrow}$, которое мы обозначим $t{\downarrow\!\!\!\!\!\rceil}$. Итак,

$$[\![t{\downarrow\!\!\!\!\!\rceil}(k) = t(k^\wedge)]\!] = \mathbb{1} \quad (k \in n).$$

Наоборот, если $s : n \to X{\downarrow}$, то определяем $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ соотношением

$$t := \big\{(k^\wedge, s(k))^B : k \in n\big\} \times \mathbb{1}_B.$$

При этом $[\![t : n^\wedge \to X]\!] = \mathbb{1}$, $[\![t(k^\wedge) = s(k)]\!] = \mathbb{1}$ для $k \in n$ и $t{\downarrow\!\!\!\!\!\rceil} = s$. Из всего сказанного следует, что отображение $t \mapsto t{\downarrow\!\!\!\!\!\rceil}$ — биекция между $\big\{x \in \mathbb{V}^{(B)} : [\![x \in X^{n^\wedge}]\!] = \mathbb{1}\big\}$ и $(X{\downarrow})^n$.

Теперь нужно вспомнить определение $s := (x(0), \dots, x(n-1))^B$ (см. 4.4.9). Пусть $x : n \to X{\downarrow}$ и $y : n \to X{\downarrow}$ таковы, что $y(0) = x(0)$, $y(k) = (y(k-1), x(k))^B$

для $0 \neq k \in n$ и $y(n-1) = s$. По доказанному существуют такие $p, q \in \mathbb{V}^{(B)}$, что $[\![p, q : n^{\wedge} \to X]\!] = \mathbb{1}$, причем $p{\downarrow} = x$ и $q{\downarrow} = y$. Далее, нетрудно проверить, что

$$[\![p(0) = q(0) \wedge (\forall\, k \in n^{\wedge})(k \neq 0 \to q(k) = (q(k-1), p(k)))]\!] = \mathbb{1}.$$

Следовательно, $[\![q(n^{\wedge} - 1) = (p(0^{\wedge}), \dots, p(n^{\wedge} - 1)) \in X^{n^{\wedge}}]\!] = \mathbb{1}$. С другой стороны, $[\![s = q(n^{\wedge} - 1)]\!] = \mathbb{1}$ и поэтому $s \in (X^{n^{\wedge}}){\downarrow}$. Таким образом, отображение

$$(x(0), \dots, x(n-1)) \mapsto (x(0), \dots, x(n-1))^B$$

— инъекция $(X{\downarrow})^n$ в $(X^{n^{\wedge}}){\downarrow}$. Аналогичные рассуждения показывают, что образ $(X{\downarrow})^n$ при этом есть все $(X^{n^{\wedge}}){\downarrow}$. $\triangleright$

5.3.4. Теорема. *Пусть X, Y, $f \in \mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что $[\![X \neq \varnothing]\!] = [\![Y \neq \varnothing]\!] = [\![f : X \to Y]\!] = \mathbb{1}$. Тогда существует единственное отображение $f{\downarrow} : X{\downarrow} \to Y{\downarrow}$ — спуск f — такое, что*

$$[\![f(x) = f{\downarrow}(x)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X{\downarrow}).$$

Спуск отображений обладает свойствами:

(1) *результат $f{\downarrow}$ спуска отображения f внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ — экстенсиональное отображение, т. е.*

$$[\![x = x']\!] \leqslant [\![f{\downarrow}(x) = f{\downarrow}(x')]\!] \quad (x, x' \in X{\downarrow});$$

(2) *если $Z, g \in \mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что выполнено $[\![Z \neq \varnothing]\!] = [\![g : Y \to Z]\!] = \mathbb{1}$, то*

$$(g \circ f){\downarrow} = g{\downarrow} \circ f{\downarrow};$$

(3) *$f{\downarrow}$ сюръективно (соответственно инъективно, биективно) в том и только в том случае, если $[\![f$ сюръективно (соответственно инъективно, биективно)$]\!] = \mathbb{1}$.*

$\triangleleft$ Пусть h — спуск соответствия f в смысле 5.3.2. Из 5.3.3 (1, 6) вытекает, что $h : X{\downarrow} \to Y{\downarrow}$. Далее, поскольку $(x, h(x))^B \in f{\downarrow}$ для любого $x \in X{\downarrow}$, то

$$[\![h(x) = f(x)]\!] = [\![(x, h(x)) \in f]\!] = [\![(x, h(x))^B \in f]\!] = \mathbb{1}.$$

Отображение h однозначно определено этим свойством, ибо если $g : X{\downarrow} \to Y{\downarrow}$ обладает тем же свойством, то

$$[\![h(x) = g(x)]\!] \geqslant [\![g(x) = f(x)]\!] \wedge [\![h(x) = f(x)]\!] = \mathbb{1}$$

и $h(x) = g(x)$ для каждого $x \in X{\downarrow}$ ввиду отделимости $\mathbb{V}^{(B)}$. Используя определяющее свойство отображения h и 5.3.3 (7), оцениваем

$$[\![x = x']\!] \leqslant [\![f(x) = f(x')]\!] \wedge [\![f(x) = h(x)]\!] \wedge [\![f(x') = h(x')]\!] \leqslant [\![h(x) = h(x')]\!].$$

Тем самым установлено (1), а (2) следует из 5.3.3 (4). Осталось обосновать (3). Утверждение относительно сюръективности без труда выводится из 5.3.3 (5), а биективность есть конъюнкция сюръективности и инъективности. Инъективность f внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ равносильна соотношению

$$[\![x = x']\!] = [\![f(x) = f(x')]\!] = [\![h(x) = h(x')]\!] \quad (x, x' \in X{\downarrow}).$$

Отсюда $x = x'$ в том и только в том случае, если $h(x) = h(x')$, а это и означает инъективность отображения h. $\triangleright$

5.3.5. Теорема. *Пусть $X, Y, F \in \mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что $[\![X \neq \varnothing]\!] = [\![Y \neq \varnothing]\!] = [\![\varnothing \neq F \subset X \times Y]\!] = \mathbb{1}$. Пусть $\Phi \in \mathbb{V}^{(B)}$ — соответствие из X в Y с графиком F внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. $\mathbb{V}^{(B)} \models \Phi = (F, X, Y)$. Тогда тройка $\Phi{\downarrow} := (F{\downarrow}, X{\downarrow}, Y{\downarrow})$ — спуск Φ — единственное соответствие, удовлетворяющее равенству*

$$\Phi{\downarrow}(x) = \Phi(x){\downarrow} \quad (x \in X{\downarrow}).$$

Спуск соответствий обладает свойствами:

(1) $\Phi(A){\downarrow} = \Phi{\downarrow}(A{\downarrow})$ *для любого $A \in \mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющего условию $[\![A \subset X]\!] = \mathbb{1}$;*

(2) $\pi_\Phi(A){\downarrow} = \pi_{\Phi{\downarrow}}(A{\downarrow})$ *при всех $A \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которых верно $[\![A \subset X]\!] = \mathbb{1}$;*

(3) $(\Phi' \circ \Phi){\downarrow} = \Phi'{\downarrow} \circ \Phi{\downarrow}$ *для еще одного соответствия Φ' внутри $\mathbb{V}^{(B)}$;*

(4) $(I_X){\downarrow} = I_{X{\downarrow}}$.

$\triangleleft$ Все утверждения, кроме (2), элементарно выводятся из 5.3.3. Отметим только, что определяющее равенство $\Phi{\downarrow}(x) = \Phi(x){\downarrow}$ $(x \in X{\downarrow})$ нужно понимать в соответствии с 5.2.1. Именно, по принципу максимума существует $\Psi \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $[\![\Psi : X \to \mathscr{P}(Y)]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\Phi(x) = \Psi(x)]\!] = \mathbb{1}$ для всех $x \in X{\downarrow}$. Ввиду 5.3.4 $\Psi{\downarrow} : X{\downarrow} \to \mathscr{P}(Y){\downarrow}$ и $[\![\Phi(x) = \Psi{\downarrow}(x)]\!] = \mathbb{1}$ при $x \in X{\downarrow}$. Но тогда $\Phi{\downarrow}$ задается соотношением

$$\Phi{\downarrow}x) = (\Psi{\downarrow}(x)){\downarrow} = \Psi(x){\downarrow}{\downarrow} \quad (x \in X{\downarrow}).$$

Отсюда, в частности, видно, что $\Phi{\downarrow}(A{\downarrow}) = \Psi(A){\downarrow}{\downarrow}$. Учитывая это, докажем (2). Прежде всего, заметим, что

$$[\![\pi_\Phi(A) = \bigcap \Psi(A)]\!] = \mathbb{1},$$

т. е. внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ выполнено $\pi_\Phi(A) = \bigcap\{\Psi(a) : a \in A\}$. Отсюда, пользуясь правилом 5.2.9 (2), выводим:

$$\pi_\Phi(A){\downarrow} = \Big(\bigcap \Psi(A)\Big){\downarrow} = \bigcap(\Psi(A){\downarrow}{\downarrow}) = \bigcap\{\Phi{\downarrow}(a) : a \in A{\downarrow}\} = \pi_{\Phi{\downarrow}}(A{\downarrow}). \ \triangleright$$

5.3.6. *Пусть X и Y — непустые множества внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а семейство $(f_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset \mathbb{V}^{(B)}$ таково, что*

$$[\![f_\xi : X \to Y]\!] = \mathbb{1} \quad (\xi \in \Xi).$$

Тогда для каждого разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в булевой алгебре B перемешивание $\operatorname{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi f_\xi)$ — функция из X в Y внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и

$$\operatorname*{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi f_\xi){\downarrow}(x) = \operatorname*{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi f_\xi{\downarrow}(x)) \quad (x \in X{\downarrow}).$$

$\triangleleft$ Положим $g := \operatorname{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi f_\xi)$. Так как

$$b_\xi \leqslant [\![g = f_\xi]\!] \wedge [\![f_\xi : X \to Y]\!] \leqslant [\![g : X \to Y]\!],$$

то $[\![g : X \to Y]\!] = \mathbb{1}$, т. е. g — функция из X в Y. Кроме того, для каждого $x \in X{\downarrow}$ в силу 5.3.4

$$b_\xi \leqslant [\![g{\downarrow}(x) = g(x)]\!] \wedge [\![g(x) = f_\xi(x)]\!] \wedge [\![f_\xi{\downarrow}(x) = f_\xi(x)]\!] \leqslant [\![g{\downarrow}(x) = f_\xi{\downarrow}(x)]\!].$$

Отсюда вытекает, что $g{\downarrow}(x) = \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi f_\xi{\downarrow}(x))$. $\triangleright$

5.3.7. *Пусть X, Y и (b_ξ) те же, а $(\Phi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство элементов $\mathbb{V}^{(B)}$, являющихся соответствиями из X в Y внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда перемешивание $\operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi\Phi_\xi)$ будет соответствием из X в Y, причем*

$$\big(\operatorname*{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi\Phi_\xi){\downarrow}(x)\big){\uparrow} = \operatorname*{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi\Phi_\xi{\downarrow}(x)\,{\uparrow}) \quad (x \in X{\downarrow}).$$

$\triangleleft$ Доказательство аналогично 5.3.6. $\triangleright$

5.4. Подъем множеств

В этом параграфе мы вводим операцию подъема, действующую в направлении, противоположном спуску.

5.4.1. Рассмотрим произвольный подкласс X класса $\mathbb{V}^{(B)}$.

(1) *Существует $\mathbb{V}^{(B)}$-класс Y, заданный формулой*

$$Y(t) := \bigvee\big\{[\![t = x]\!] : x \in X\big\} \quad (t \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

$\triangleleft$ Действительно, по теореме 1.4.14 имеется класс Y (в смысле универсум $\mathbb{V}$) такой, что

$$(y, b) \in Y \leftrightarrow y \in \mathbb{V}^{(B)} \wedge b \in B \wedge \left(b = \bigvee_{x\in X} [\![x = y]\!]\right).$$

Как видно, класс Y однозначен и $\operatorname{dom}(Y) = \mathbb{V}^{(B)}$, т. е. Y — отображение из $\mathbb{V}^{(B)}$ в B. Кроме того, это отображение экстенсионально, ибо в силу 4.1.8 (4)

$$Y(t) \wedge [\![t = s]\!] = \bigvee\big\{[\![t = x]\!] \wedge [\![t = s]\!] : x \in X\big\} \leqslant$$
$$\leqslant \bigvee\big\{[\![s = x]\!] : x \in X\big\} = Y(s).$$

Следовательно, Y есть класс внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. $\triangleright$

Итак, по любому классу $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$ можно однозначно определить класс Y внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, который называют *подъемом класса* X и обозначают $X{\uparrow}$. В случае, когда X — множество, существует единственный элемент $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $X{\uparrow}(t) = [\![t \in y]\!]$ для всех $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ (см. 4.5.7). Этот элемент y и считаем в дальнейшем *подъемом множества* X в соответствии с 4.6.3. В качестве примера отметим, что для класса $X \subset \mathbb{V}$ класс $X^\wedge$ — подъем класса $\{x^\wedge : x \in X\}$ (см. 4.6.8).

(2) Предположим теперь, что X — бинарное отношение такое, что $X \subset \mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)}$. Чтобы осуществить подъем отношения X, нужно сначала погрузить X в $\mathbb{V}^{(B)}$, а затем применить указанную выше процедуру. Для достижения нашей цели воспользуемся функцией $(x, y) \mapsto (x, y)^B$ (см. 5.3.1). Таким образом, мы даем следующее определение *подъема бинарного отношения*:

$$X{\uparrow} : t \mapsto \bigvee\big\{[\![t = (x, y)^B]\!] : (x, y) \in X\big\}.$$

В частности, если X — произведение классов $Y \subset \mathbb{V}^{(B)}$ и $Z \subset \mathbb{V}^{(B)}$, то получаем *подъем произведения*

$$(Y \times Z)\!\uparrow : t \mapsto \bigvee \big\{[\![t = (x,y)^B]\!] : y \in Y, z \in Z\big\}.$$

5.4.2. *Пусть $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$ — непустой класс и φ — некоторая B-формула. Тогда*

$$[\![(\forall\, u \in X\!\uparrow)\varphi(u)]\!] = \bigwedge\{[\![\varphi(u)]\!] : u \in X\},$$
$$[\![(\exists\, u \in X\!\uparrow)\varphi(u)]\!] = \bigvee\{[\![\varphi(u)]\!] : u \in X\}.$$

$\lhd$ Выведем последнюю формулу (см. 2.1.1 (1), 2.1.6 (2)):

$$[\![(\exists\, u \in X\!\uparrow)\varphi(u)]\!] = [\![(\exists\, u)(u \in X\!\uparrow \wedge\, \varphi(u))]\!] = \bigvee_{v \in \mathbb{V}^{(B)}} \bigvee_{u \in X} [\![u = v]\!] \wedge [\![\varphi(v)]\!] =$$
$$= \bigvee_{u \in X} \bigg(\bigvee_{v \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![v = u]\!] \wedge [\![\varphi(v)]\!] \bigg) = \bigvee\{[\![\varphi(u)]\!] : u \in X\}.$$

Случай квантора общности рассматривается аналогично. $\rhd$

5.4.3. *Каковы бы ни были класс $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$ и непустой $\mathbb{V}^{(B)}$-класс $Y : \mathbb{V}^{(B)} \to B$, справедливы следующие правила сокращения стрелок*:

(1) $X\!\uparrow\downarrow = \operatorname{mix}(X)$;

(2) $Y\!\downarrow\uparrow = Y$.

$\lhd$ (1): Случай пустого класса тривиален. Если $x \in X$, то $[\![x \in X\!\uparrow]\!] = \mathbb{1}$ и, следовательно, $x \in X\!\uparrow\downarrow$. Отсюда и из 5.2.3 (1) вытекает $\operatorname{mix}(X) \subset X\!\uparrow\downarrow$. Обратное включение выводится из 5.4.2 и принципа перемешивания.

(2): Для произвольного $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ ввиду 4.6.9 будет

$$[\![y \in Y\!\downarrow\uparrow]\!] = \bigvee\{[\![y = t]\!] : t \in Y\!\downarrow\} = [\![(\exists\, t \in Y)(t = y)]\!] = [\![y \in Y]\!]. \rhd$$

(3) При использовании перемешивания семейства упорядоченных пар полезно следующее предложение.

Пусть $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение единицы в B, а $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и $(y_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейства элементов $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда

$$\operatorname*{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi (x_\xi, y_\xi)^B) = \Big(\operatorname*{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi x_\xi), \operatorname*{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi y_\xi)\Big)^B.$$

$\lhd$ Сначала покажем, что $b(x,y)^B = b(bx,by)^B$ для любых $x, y \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $b \in B$. Для этого последовательно применим 4.3.2, 4.4.9 и 4.3.6:

$$[\![b(x,y)^B = b(bx,by)^B]\!] = b \to [\![(x,y)^B = (bx,by)^B]\!] = b \to$$
$$\to ([\![x = bx]\!] \wedge [\![y = by]\!]) = b \to ((b^* \Rightarrow [\![x = \varnothing]\!])\wedge$$
$$\wedge(b^* \Rightarrow [\![y = \varnothing]\!])) = b^* \vee ((b \vee [\![x = \varnothing]\!]) \wedge (b \vee [\![y = \varnothing]\!])) =$$
$$= (b^* \vee b \vee [\![x = \varnothing]\!]) \wedge (b^* \vee b \vee [\![y = \varnothing]\!]) = \mathbb{1}.$$

Теперь положим

$$x := \operatorname*{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi x_\xi), \quad y := \operatorname*{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi y_\xi).$$

С учетом уже доказанного будет

$$b_\xi(x_\xi, y_\xi)^B = b_\xi(b_\xi x_\xi, b_\xi y_\xi)^B = b_\xi(b_\xi x, b_\xi y)^B = b_\xi(x, y)^B.$$

Осталось сослаться на принцип перемешивания. $\triangleright$

Установленный факт позволяет рассматривать перемешивания в классе $\mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)}$. Именно, мы будем считать, что по определению

$$\underset{\xi\in\Xi}{\mathrm{mix}}(b_\xi(x_\xi, y_\xi)) := \Big(\underset{\xi\in\Xi}{\mathrm{mix}}(b_\xi x_\xi), \underset{\xi\in\Xi}{\mathrm{mix}}(b_\xi y_\xi)\Big)^B.$$

Теперь можно сказать, что отображение $(x, y) \mapsto (x, y)^B$ сохраняет перемешивания.

5.4.4. Теорема. *Для любых классов $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$ и $Y \subset \mathbb{V}^{(B)}$ справедливы утверждения*:

(1) $\mathbb{V}^{(B)} \models X{\uparrow} \subset Y{\uparrow}$, *если* $X \subset Y$;
(2) $\mathbb{V}^{(B)} \models (X \cup Y){\uparrow} = X{\uparrow} \cup Y{\uparrow}$;
(3) $\mathbb{V}^{(B)} \models (\mathrm{mix}(X) \cap \mathrm{mix}(Y)){\uparrow} = X{\uparrow} \cap Y{\uparrow}$;
(4) $\mathbb{V}^{(B)} \models (X \times Y){\uparrow} = X{\uparrow} \times Y{\uparrow}$.

Если X и Y — отношения, а Z — класс, то выполнены также утверждения:

(5) $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{dom}(X){\uparrow} = \mathrm{dom}(X{\uparrow}) \wedge \mathrm{im}(X){\uparrow} = \mathrm{im}(X{\uparrow})$;
(6) $\mathbb{V}^{(B)} \models (X^{-1}){\uparrow} = (X{\uparrow})^{-1}$;
(7) $\mathbb{V}^{(B)} \models (\mathrm{mix}(X)``\mathrm{mix}(Z)){\uparrow} = (X{\uparrow})``(Z{\uparrow})$;
(8) $\mathbb{V}^{(B)} \models (\mathrm{mix}(X) \circ \mathrm{mix}(Y)){\uparrow} = (X{\uparrow}) \circ (Y{\uparrow})$;
(9) $\mathbb{V}^{(B)} \models (Z^n){\uparrow} = (Z{\uparrow})^{n^\wedge}$ *для* $n \in \mathbb{N}$.

$\triangleleft$ (1): Вытекает из определения подъема.

(2): Обоснование этого факта содержится в следующих выкладках:

$$[\![t \in (X \cup Y){\uparrow}]\!] = \bigvee\{[\![t = u]\!] : u \in X \cup Y\} =$$
$$= \bigvee_{u\in X} [\![t = u]\!] \vee \bigvee_{u\in Y} [\![t = u]\!] = [\![t \in X{\uparrow} \vee t \in Y{\uparrow}]\!].$$

(3): Допустим, что мы уже доказали равенство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ подъема пересечения классов X и Y и пересечения подъемов $X{\uparrow}$ и $Y{\uparrow}$. Тогда по 5.2.4 (1) и 5.4.3 будет

$$\mathrm{mix}(X \cap Y) = (X \cap Y){\uparrow\downarrow} = (X{\uparrow} \cap Y{\uparrow}){\downarrow} = X{\uparrow\downarrow} \cap Y{\uparrow\downarrow} = \mathrm{mix}(X) \cap \mathrm{mix}(Y).$$

Пусть, наоборот, известно, что циклическая оболочка пересечения классов X и Y равна пересечению их циклических оболочек. Тогда, привлекая снова 5.2.4 (1) и 5.4.3, получим

$$(X \cap Y){\uparrow\downarrow} = X{\uparrow\downarrow} \cap Y{\uparrow\downarrow} = (X{\uparrow} \cap Y{\uparrow}){\downarrow}.$$

Следовательно, $[\![(X \cap Y){\uparrow} = X{\uparrow} \cap Y{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$ согласно 5.2.4 (2).

Для завершения доказательства нужно установленную эквивалентность применить к классам $\mathrm{mix}(X)$ и $\mathrm{mix}(Y)$ и воспользоваться правилами сокращения стрелок 5.4.3.

(4): Руководствуясь 5.4.2, вычисляем

$$
\begin{gathered}
[\![z \in X{\uparrow} \times Y{\uparrow}]\!] = [\![(\exists\, u \in X{\uparrow})(\exists\, v \in Y{\uparrow}) z = (u, v)]\!] = \\
= \bigvee_{u \in X} \bigvee_{v \in Y} [\![z = (u, v)]\!] = \bigvee_{(u,v) \in X \times Y} [\![z = (u, v)^B]\!] = [\![z \in (X \times Y){\uparrow}]\!].
\end{gathered}
$$

(5): Предполагая, что X — бинарное отношение, нетрудно проверить справедливость цепочки равенств (см. 2.1.1 (1), 2.1.6 (2) и 4.4.9):

$$
\begin{gathered}
[\![x \in \operatorname{dom}(X{\uparrow})]\!] = [\![(\exists\, y)((x, y) \in X{\uparrow})]\!] = \bigvee_{y \in \mathbb{V}^{(B)}} \bigvee_{(s,t) \in X} [\![(x, y)^B = (s, t)^B]\!] = \\
= \bigvee_{(s,t) \in X} \bigvee_{y \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![x = s]\!] \wedge [\![y = t]\!] = \bigvee_{s \in \operatorname{dom}(X)} [\![x = s]\!] = [\![x \in \operatorname{dom}(X){\uparrow}]\!].
\end{gathered}
$$

Утверждение об $\operatorname{im}(X)$ можно установить аналогично.

(6): Из определений подъема и обратного соответствия выводим:

$$
\begin{gathered}
[\![(x, y) \in (X{\uparrow})^{-1}]\!] = [\![(y, x) \in X{\uparrow}]\!] = \bigvee_{(s,t) \in X} [\![(s, t) = (y, x)]\!] = \\
= \bigvee_{(t,s) \in X^{-1}} [\![(t, s) = (x, y)]\!] = [\![(x, y) \in (X^{-1}){\uparrow}]\!].
\end{gathered}
$$

(7), (8): Легко видеть, что

$$
\begin{gathered}
\operatorname{mix}(X) \cap (\operatorname{mix}(Z) \times \mathbb{V}^{(B)}) = \operatorname{mix}(X) \cap \operatorname{mix}(Z \times \mathbb{V}^{(B)}); \\
(\operatorname{mix}(Y) \times \mathbb{V}^{(B)}) \cap (\mathbb{V}^{(B)} \times \operatorname{mix}(X)) = \operatorname{mix}(Y \times \mathbb{V}^{(B)}) \cap \operatorname{mix}(\mathbb{V}^{(B)} \times X).
\end{gathered}
$$

Далее мы действуем по схеме 5.3.3 (4, 5), привлекая (3), (4) и учитывая, что $[\![\mathbb{V}^{(B)}{\uparrow} = \mathbb{U}_B]\!] = \mathbb{1}$.

(9): Заметим, что с учетом 5.4.3 (3) $\operatorname{mix}(Z^n) = \operatorname{mix}(Z)^n$. Отсюда согласно 5.3.3 (8) и 5.4.3 (1)

$$
\big((Z{\uparrow})^{n^\wedge}\big){\downarrow} = (Z{\uparrow}{\downarrow})^n = (Z^n){\uparrow}{\downarrow},
$$

что в силу 5.2.3 (3) дает требуемое равенство. $\triangleright$

5.4.5. Рассмотрим класс X, элементами которого являются подмножества $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. $X \subset \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$. *Двойным подъемом* класса X, обозначаемым $X{\upuparrows}$, называют подъемом класса $\{x{\uparrow} : x \in X\}$. Следовательно,

$$
[\![t \in X{\upuparrows}]\!] = \bigvee \{[\![t = x{\uparrow}]\!] : x \in X\} \quad (t \in \mathbb{V}^{(B)}).
$$

Введем еще обозначение:

$$
\operatorname{mix} {``}X := \{\operatorname{mix}(u) : u \in X\}.
$$

Понятно, что $[\![X{\upuparrows} = (\operatorname{mix} {``}X){\upuparrows}]\!] = \mathbb{1}$. Обозначим $\mathscr{P}_n(X)$ класс непустых элементов $\mathscr{P}(X)$, т. е.

$$
\mathscr{P}_n(X) := \{z : z \subset X \wedge z \neq \varnothing\}.
$$

5.4.6. *Пусть X — непустой $\mathbb{V}^{(B)}$-класс и $Y \subset \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$. Тогда*

(1) $\mathbb{V}^{(B)} \models \bigcup(Y{\Uparrow}) = (\bigcup Y){\uparrow}$;

(2) $\mathbb{V}^{(B)} \models \bigcap(Y{\Uparrow}) = \bigcap(\mathrm{mix}\,``(Y{\uparrow}))$;

(3) $\mathbb{V}^{(B)} \models \bigcup X = (\bigcup(X{\Downarrow})){\uparrow}$;

(4) $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{P}_n(X{\downarrow}){\Uparrow} = \mathscr{P}_n(X)$.

$\triangleleft$ Доказательство мы оставляем читателю в качестве упражнения. $\triangleright$

5.5. Подъем соответствий

В текущем параграфе мы выделим и изучим класс соответствий, для которых подъем сохраняет обычные атрибуты функциональной зависимости.

5.5.1. Вернемся к теореме 5.4.4 и заметим, что в силу пунктов (1) и (4) этой теоремы подъем отношения — снова отношение. Для приложений к анализу важно, чтобы при подъеме сохранялись также «образы точек и множеств» $X(t)$ и $X``A$, что не всегда имеет место согласно 5.4.4 (7). Более того, при подъеме функция может потерять свойство однозначности. Последнее легко понять, если учесть, что процедура подъем-спуск приводит к циклической оболочке (5.4.3 (1)), а функции, полученные путем спуска, обязательно экстенсиональны 5.3.3 (7).

Приведем соответствующий пример. Пусть $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$ — циклическое множество и $f : X \to \{0^\wedge, 1^\wedge\}$ — двузначная функция. Допустим, что $f(x) = 0^\wedge$ и $f(y) = 1^\wedge$ для некоторых $x, y \in X$, $x \neq y$, а элемент $b \in B$ отличен от $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$. Если на элементе $z := \mathrm{mix}\{bx, b^*y\} \in X$ функция f принимает значение $0^\wedge$, то $\mathbb{0} < b^* \leqslant [\![z = y]\!] \nleqslant [\![f(z) = f(y)]\!] = \mathbb{0}$. Аналогично, при $f(z) = 1^\wedge$ будет $0 < b \leqslant [\![z = x]\!] \nleqslant [\![f(z) = f(x)]\!] = \mathbb{0}$.

С другой стороны, $[\![z = y]\!] \leqslant [\![f{\uparrow}(z) = f{\uparrow}(y)]\!]$ по 5.3.3 (7). Значит, либо $[\![f{\uparrow}(y) = f(y)]\!] \neq \mathbb{1}$, либо $[\![f{\uparrow}(x) = f(x)]\!] \neq \mathbb{1}$, т. е. не для любых $x \in X$ выполняется $[\![f{\uparrow}(x) = f(x)]\!] = \mathbb{1}$. Таким образом, проблему сохранения функциональной зависимости при подъеме следует рассмотреть специально.

5.5.2. *Для произвольного отношения $X \subset \mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)}$ равносильны следующие условия*:

(1) *если $b \leqslant [\![x_1 = x_2]\!]$ при $x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(X)$, $b \in B$, то для любого $u \in \mathbb{V}^{(B)}$ будет*

$$\bigvee\{b \wedge [\![y_1 = u]\!] : y_1 \in X(x_1)\} = \bigvee\{b \wedge [\![y_2 = u]\!] : \ y_2 \in X(x_2)\};$$

(2) *если x_1, $x_2 \in \mathrm{dom}(X)$ и $y_1 \in X(x_1)$, то*

$$[\![x_1 = x_2]\!] \leqslant \bigvee\{[\![y_1 = y_2]\!] : \ y_2 \in X(x_2)\};$$

(3) $\mathrm{mix}(X(x)) = \mathrm{mix}(X)(x) \quad (x \in \mathrm{dom}(X))$;

(4) $[\![X{\uparrow}(x) = X(x){\uparrow}]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in \mathrm{dom}(X))$;

(5) $[\![x_1 = x_2]\!] \leqslant [\![X(x_1){\uparrow} = X(x_2){\uparrow}]\!] \quad (x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(X))$.

$\triangleleft$ (1) $\to$ (2): Полагаем в (1) $b := [\![x_1 = x_2]\!]$ и $u := y_1$.

(2) $\to$ (3): Включение $\subset$ очевидно. Для доказательства противоположного включения возьмем разбиение единицы $(b_\xi) \subset B$ и семейство пар $((x_\xi, y_\xi)) \subset X$. Пусть $(x, y) = \mathrm{mix}(b_\xi(x_\xi, y_\xi))$. Нужно установить, что $y \in \mathrm{mix}(X(x))$. Из (2) следует, что

$$b_\xi \leqslant [\![x = x_\xi]\!] \leqslant \bigvee\{[\![y' = y_\xi]\!] : \ y' \in X(x)\} = [\![y_\xi \in X(x){\uparrow}]\!].$$

Значит, $b_\xi \leqslant [\![y = y_\xi]\!] \wedge [\![y_\xi \in X(x)\!\uparrow]\!] \leqslant [\![y \in X(x)\!\uparrow]\!]$, так что $[\![y \in X(x)\!\uparrow]\!] = \mathbb{1}$. Но тогда $y \in X(x)\!\uparrow\downarrow = \operatorname{mix}(X(x))$, что и нужно.

(3) → (4): Ввиду предложений 5.4.3 (1) и 5.3.3 (6) имеем

$$X(x)\!\uparrow\downarrow = \operatorname{mix}(X(x)) = \operatorname{mix}(X)(x) = (X\!\uparrow\downarrow)(x) = (X\!\uparrow\!(x))\!\downarrow.$$

Теперь, используя 5.4.3 (2), мы приходим к нужному соотношению.

(4) → (5): Достаточно применить 5.3.3 (7).

(5) → (1): Если $b \leqslant [\![x_1 = x_2]\!]$ и $x_1, x_2 \in \operatorname{dom}(X)$, то $b(X(x_1)\!\uparrow) = b(X(x_2)\!\uparrow)$ в соответствии с 4.3.2. С другой стороны, по определению подъема

$$[\![u \in b(X(x_k)\!\uparrow)]\!] = \bigvee\{b \wedge [\![u = y]\!] :\, y \in X(x_k)\},$$

что и приводит к требуемому. ▷

5.5.3. Вернемся теперь к понятию экстенсиональности, с которым мы уже имели дело в 5.3.3 (7) и 5.3.4 (1) в более общей ситуации. Бинарное отношение $R \subset \mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)}$ называют *экстенсиональным по второй координате*, если оно удовлетворяет одному (а тогда и любому) из равносильных условий 5.5.2 (1)–(5). Заметим, что если R — функция, то каждое из условий (2) и (5) из 5.5.2 превращается в соотношение (ср. 4.5.6)

$$[\![x_1 = x_2]\!] \leqslant [\![R(x_1) = R(x_2)]\!] \quad (x_1, x_2 \in \operatorname{dom}(R)).$$

Пусть $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$ и $Y \subset \mathbb{V}^{(B)}$ — множества. Соответствие $\Phi := (F, X, Y)$ называют *экстенсиональным*, если его график F есть экстенсиональное по второй координате отношение. Если же, сверх того, $\operatorname{dom}(\Phi) = \operatorname{mix}(\operatorname{dom}(\Phi))$ и $\Phi(x) = \operatorname{mix}(\Phi(x))$ для каждого $x \in \operatorname{dom}(\Phi)$, то говорят, что Φ *вполне экстенсионально*. Легко усмотреть, что из полной экстенсиональности Φ вытекает $F = (X \times Y) \cap \operatorname{mix}(F)$.

Будем говорить, что множества A и $C \subset \mathbb{V}^{(B)}$ *находятся в общем положении*, если

$$[\![a = c]\!] \leqslant \bigvee\{[\![a = b]\!] \wedge [\![b = c]\!] :\, b \in A \cap C\}$$

для любых $a \in A$ и $c \in C$. При выполнении этого условия в последнем соотношении фактически имеется равенство, ибо $[\![a = b]\!] \wedge [\![b = c]\!] \leqslant [\![a = c]\!]$.

5.5.4. *Равносильны следующие утверждения*:

(1) $\mathbb{V}^{(B)} \models (A \cap C)\!\uparrow = A\!\uparrow \cap\, C\!\uparrow$;

(2) $\operatorname{mix}(A \cap C) = \operatorname{mix}(A) \cap \operatorname{mix}(C)$;

(3) *A и C находятся в общем положении.*

◁ Эквивалентность (1) и (2) вытекает из 5.2.4 (1), 5.4.3 (1) и 5.4.4 (3). Докажем (1) ↔ (3). Заметим, что включение $A\!\uparrow \cap\, C\!\uparrow \subset (A \cap C)\!\uparrow$ равносильно формуле

$$(\forall\, a \in A\!\uparrow)(\forall\, c \in C\!\uparrow)(a = c \to (\exists\, b \in A \cap C)(a = b \wedge b = c)).$$

Булева оценка истинности последней равна

$$\bigwedge_{a \in A,\, c \in C} [\![a = c]\!] \Rightarrow \bigvee_{b \in A \cap C} [\![a = b]\!] \wedge [\![b = c]\!].$$

Отсюда видно, что (3) равносильно включению $A\!\uparrow \cap\, C\!\uparrow \subset (A \cap C)\!\uparrow$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Обратное включение верно всегда. ▷

Итак, если $A \subset C$, то множества A и C находятся в общем положении по тривиальной причине. В общем положении находятся любые два множества вида $A := \{a^\wedge : a \in A'\}$, где $A' \in \mathbb{V}$.

Подъемом соответствия $\Phi := (F, X, Y)$ мы будем называть элемент $\Phi{\uparrow} := (F{\uparrow}, X{\uparrow}, Y{\uparrow})^B \in \mathbb{V}^{(B)}$, где $F{\uparrow}$ — подъем F (см. 5.4.1 (2)).

5.5.5. Теорема. *Пусть X и Y — подмножества класса $\mathbb{V}^{(B)}$ и Φ — экстенсиональное соответствие из X в Y. Подъем $\Phi{\uparrow}$ — единственное соответствие из $X{\uparrow}$ в $Y{\uparrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, для которого*

$$[\![\mathrm{dom}(\Phi{\uparrow}) = (\mathrm{dom}(\Phi)){\uparrow}]\!] = \mathbb{1},$$

$$[\![\Phi{\uparrow}(x) = \Phi(x){\uparrow}]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in \mathrm{dom}(\Phi)).$$

Подъем соответствий обладает свойствами:

(1) *если* $\mathrm{dom}(\Phi)$ *и множество* $A \subset X$ *находятся в общем положении, то* $\mathbb{V}^{(B)} \models \Phi(A){\uparrow} = \Phi{\uparrow}(A{\uparrow})$;

(2) *суперпозиция* $\Psi \circ \Phi$ *экстенсиональных соответствий* Φ *и* Ψ *будет экстенсиональным соответствием*; *если, сверх того, имеет место равенство* $\mathrm{dom}(\Psi \circ \Phi) = \mathrm{dom}(\Phi)$, *а множества* $\mathrm{dom}(\Psi)$ *и* $\Phi(x)$ *находятся в общем положении при всех* $x \in \mathrm{dom}(\Phi)$, *то*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\Psi \circ \Phi){\uparrow} = \Psi{\uparrow} \circ \Phi{\uparrow};$$

(3) $\mathbb{V}^{(B)} \models (I_X){\uparrow} = I_{X{\uparrow}}$.

$\lhd$ Ввиду 5.4.4 и 5.5.2 достаточно обосновать единственность $\Phi{\uparrow}$ и свойства (1)–(3). При этом случай пустого соответствия опускаем из-за его очевидности. Пусть Ψ — соответствие внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющее тем же соотношениям, что и $\Phi{\uparrow}$, т. е. $[\![\mathrm{dom}(\Psi) = \mathrm{dom}(\Phi){\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\Psi(x) = \Phi(x){\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$ ($x \in \mathrm{dom}(\Phi)$). Тогда $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{dom}(\Psi) = \mathrm{dom}(\Phi{\uparrow})$ и

$$[\![(\forall\, x \in \mathrm{dom}(\Psi))\Psi(x) = \Phi{\uparrow}(x)]\!] =$$

$$= \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(\Phi)} [\![\Psi(x) = \Phi{\uparrow}(x)]\!] = \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(\Phi)} [\![\Psi(x) = \Phi(x){\uparrow}]\!] = \mathbb{1}.$$

(1): Учитывая 5.5.4 (1) и установленные свойства $\Phi{\uparrow}$, для произвольного $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ можно выписать эквивалентности:

$$y \in \Phi{\uparrow}(A{\uparrow}) \leftrightarrow (\exists\, x)(x \in (\mathrm{dom}(\Phi)){\uparrow} \wedge x \in A{\uparrow} \wedge y \in \Phi{\uparrow}(x)) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists\, x)(x \in (A \cap \mathrm{dom}(\Phi)){\uparrow} \wedge y \in \Phi{\uparrow}(x)) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists\, x \in (A \cap \mathrm{dom}(\Phi)){\uparrow})\, y \in \Phi(x){\uparrow}.$$

Следовательно, имеют место равенства

$$[\![y \in \Phi{\uparrow}(A{\uparrow})]\!] = \bigvee_{x \in A \cap \mathrm{dom}(\Phi)} [\![y \in \Phi(x){\uparrow}]\!] =$$

$$= \bigvee_{x \in A \cap \mathrm{dom}(\Phi)} \bigvee_{v \in \Phi(x)} [\![y = v]\!] = \bigvee_{v \in \Phi(A)} [\![y = v]\!] = [\![y \in \Phi(A){\uparrow}]\!].$$

(2): Установим экстенсиональность соответствия $\Theta := \Psi \circ \Phi$. Возьмем x_1, $x_2 \in \mathrm{dom}(\Theta)$, $y_1 \in \Phi(x_1)$ и $z_1 \in \Psi(y_1)$. Согласно 5.5.2 (2) справедливы оценки

$$\bigvee_{z_2 \in \Theta(x_2)} [\![z_1 = z_2]\!] = \bigvee_{y_2 \in \Phi(x_2)} \Bigg(\bigvee_{z_2 \in \Psi(y_2)} [\![z_1 = z_2]\!] \Bigg) \geqslant \bigvee_{y_2 \in \Phi(x_2)} [\![y_1 = y_2]\!] \geqslant [\![x_1 = x_2]\!].$$

Вновь привлекая 5.5.2 (2), замечаем, что Θ — экстенсиональное соответствие. Следовательно, ввиду уже доказанного, для Θ верно

$$[\![\Theta\!\uparrow\!(x) = \Theta(x)\!\uparrow]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in \mathrm{dom}(\Theta)).$$

Учитывая также установленное в (1), можно написать внутри $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$\Theta\!\uparrow\!(x) = \Theta(x)\!\uparrow = \Psi(\Phi(x))\!\uparrow\, = \Psi\!\uparrow\!(\Phi(x)\!\uparrow) = \Psi\!\uparrow\!(\Phi\!\uparrow\!(x)) = (\Psi\!\uparrow\!\circ\Phi\!\uparrow)(x)$$
$$(x \in \mathrm{dom}(\Theta)).$$

Тем самым из 5.4.2 вытекает соотношение

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x \in \mathrm{dom}(\Theta\!\uparrow))\, (\Theta\!\uparrow\!(x) = (\Psi\!\uparrow\!\circ\Phi\!\uparrow)(x)),$$

которое равносильно требуемому, ибо $\mathrm{dom}(\Psi\!\uparrow\!\circ\Phi\!\uparrow) = \mathrm{dom}(\Theta\!\uparrow)$.

(3): Очевидно. $\rhd$

5.5.6. Теорема. *Пусть X и Y — подмножества класса $\mathbb{V}^{(B)}$, а f — экстенсиональное отображение из X в Y. Тогда $f\!\uparrow$ — единственный элемент из $\mathbb{V}^{(B)}$, для которого*

$$[\![f\!\uparrow : X\!\uparrow \to Y\!\uparrow]\!] = [\![f\!\uparrow\!(x) = f(x)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X).$$

Подъем отображений обладает свойствами:

(1) *если Z — подмножество $\mathbb{V}^{(B)}$ и $g : Y \to Z$ — экстенсиональное отображение, то отображение $g \circ f$ также экстенсионально и*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (g \circ f)\!\uparrow = g\!\uparrow \circ f\!\uparrow;$$

(2) $\mathbb{V}^{(B)} \models f(A)\!\uparrow = f\!\uparrow\!(A\!\uparrow) \quad (A \subset X)$*;*

(3) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«отображение $f\!\uparrow$ инъективно» в том и только в том случае, если f инъективно;*

(4) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«отображение $f\!\uparrow$ сюръективно» в том и только в том случае, если* $\mathrm{mix}(\mathrm{im}(f)) = \mathrm{mix}(Y)$.

$\lhd$ Следует непосредственно из 5.5.5, так как $\mathrm{dom}(f) = X$ и условие общего положения выполнено автоматически (см. 5.5.4). $\rhd$

5.5.7. Из предложения 5.4.3 непосредственно вытекают правила сокращения стрелок для соответствий и отображений.

Пусть Φ и f — экстенсиональные соответствия из X в Y, причем f однозначно. Пусть, далее, Ψ — соответствие внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда справедливы равенства

(1) $\Phi\!\uparrow\downarrow\!(x) = \mathrm{mix}(\Phi(x)) \quad (x \in \mathrm{dom}(\Phi))$,

(2) $f\!\uparrow\downarrow\!(x) = f(x) \ (x \in \mathrm{dom}(f))$,

(3) $\Psi\!\downarrow\uparrow = \Psi$,

(4) $\pi_{\Phi\uparrow\downarrow}(A) = \pi_{\Phi\uparrow}(A\!\uparrow)\!\downarrow \quad (A \subset X)$,

(5) $\pi_{\Phi\uparrow\downarrow}(A)\!\uparrow = \pi_{\Phi\uparrow}(A\!\uparrow) \quad (A \subset X)$.

Если к тому же Φ вполне экстенсионально и $A \subset \mathrm{dom}(\Phi)$, то

(6) $\pi_{\Phi}(A)\!\uparrow = \pi_{\Phi\uparrow}(A\!\uparrow)$.

$\lhd$ (1): Из 5.3.5, 5.5.5 и 5.4.3 (1) для $x \in \mathrm{dom}(\Phi)$ непосредственно выводим:

$$\Phi\!\uparrow\downarrow\!(x) = \Phi\!\uparrow\!(x)\!\downarrow = \Phi(x)\!\uparrow\downarrow = \mathrm{mix}(\Phi(x)).$$

(2), (3): Очевидно.

(4): Для произвольного $A \subset X$ получаем

$$z \in \pi_{\Phi\uparrow}(A\uparrow)\downarrow \leftrightarrow [\![(\forall\, a \in A\uparrow) z \in \Phi\uparrow(a)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \bigwedge_{a \in A} [\![z \in \Phi\uparrow(a)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow (\forall\, a \in A)(z \in \Phi\uparrow(a)\downarrow) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, a \in A) z \in \Phi\uparrow\downarrow(a) \leftrightarrow z \in \pi_{\Phi\uparrow\downarrow}(A).$$

(5): В силу 5.4.3 (2) из уже доказанного вытекает нужное равенство.

(6): Для вполне экстенсионального Φ в силу (1) будет

$$\pi_{\Phi\uparrow\downarrow}(A) = \bigcap_{a \in A} \Phi\uparrow\downarrow(a) = \bigcap_{a \in A} \Phi(a) = \pi_{\Phi}(A).$$

Требуемое вытекает из (5). $\rhd$

5.6. Булевы множества

Возникающие при спусках из $\mathbb{V}^{(B)}$ множества наделены добавочной алгебраической структурой, связанной с полной булевой алгеброй B. В этом параграфе мы изучим возникающий класс множеств и его аналоги, не прибегая к конструкции спуска.

5.6.1. Введем необходимую терминологию. Рассмотрим произвольное множество X. Отображение $d : X \times X \to B$ называют *B-полуметрикой*, если для любых x, y, $z \in X$ выполнены условия

(1) $d(x, x) = \mathbb{0}$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) \vee d(z, y)$.

Если, кроме того, из $d(x, y) = \mathbb{0}$ вытекает $x = y$, то d называют *B-метрикой* или *булевой метрикой* на X. Пару (X, d) именуют *B-множеством* или *булевым множеством*.

Содержащееся в классе $\mathbb{V}^{(B)}$ множество X обладает канонической B-метрикой

$$d(x, y) := [\![x \neq y]\!] = [\![x = y]\!]^* \quad (x, y \in X).$$

То, что d есть B-метрика, следует из 4.1.8 (1, 3, 4) и отделимости $\mathbb{V}^{(B)}$. Рассматривая подмножества класса $\mathbb{V}^{(B)}$ как B-множества, мы всегда будем иметь в виду указанную булеву метрику. Многие понятия из главы 4 можно естественным образом перенести на B-множества путем дуализации относительно дополнения в алгебре B. По этой причине при введении новых понятий мы иногда опускаем излишние подробности.

5.6.2. Пусть (b_ξ) — разбиение единицы в B и (x_ξ) — семейство элементов B-множества X. *Перемешиванием семейства* (x_ξ) *относительно* (b_ξ) называют элемент $x \in X$ такой, что $b_\xi \wedge d(x, x_\xi) = \mathbb{0}$ для всех ξ. Как и раньше, перемешивание обозначаем символом $x = \operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$. Перемешивание (если оно существует) единственно. В самом деле, если $y \in X$ и $(\forall\, \xi)(b_\xi \wedge d(y, x_\xi) = \mathbb{0})$, то

$$b_\xi \wedge d(x, y) \leqslant b_\xi \wedge (d(x, x_\xi) \vee d(x_\xi, y)) = \mathbb{0}.$$

Бесконечный дистрибутивный закон 2.1.6 (2) в B влечет

$$d(x,y) = \bigvee\{b_\xi \wedge d(x,y)\} = \mathbb{0},$$

значит, $x = y$.

Подчеркнем, что в отличие от универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. 4.3) перемешивания в B-множестве существуют не всегда.

5.6.3. Рассмотрим B-множество (X,d). Взяв $A \subset X$, обозначим символом $\mathrm{mix}(A)$ множество всех перемешиваний элементов из A. Если $\mathrm{mix}(A) = A$, то говорят, что A — *циклическое подмножество* X. Пересечение всех циклических множеств, содержащих A, обозначают символом $\mathrm{cyc}(A)$. Булево множество X называют *расширенным* (или *полным*), если в нем существуют перемешивания $\mathrm{mix}(b_\xi x_\xi)$ любых семейств $(x_\xi) \subset X$ относительно любых разбиений единицы $(b_\xi) \subset B$. В случае, когда такие перемешивания существуют лишь для конечных семейств элементов, само X называют *разложимым.* Так же, как и в 5.2.6, можно показать, что если X — расширенное B-множество, то $\mathrm{mix}(A) = \mathrm{cyc}(A)$ для любого $A \subset X$. Циклическое подмножество B-множества не всегда является расширенным B-множеством. В то же время циклическое подмножество $\mathbb{V}^{(B)}$ со своей канонической B-метрикой есть расширенное B-множество.

5.6.4. *Пусть* A *— некоторое множество и для каждого* $\alpha \in \mathrm{A}$ *задано* B*-множество* (X_α, d_α)*. Положим* $X := \Pi_{\alpha\in\mathrm{A}} X_\alpha$ *и определим отображение* $d : X\times X \to B$ *соотношением:*

$$d(x,y) := \bigvee\{d_\alpha(x(\alpha), y(\alpha)) :\ \alpha \in \mathrm{A}\}.$$

Тогда d *— булева метрика на* X*, причем* (X,d) *расширенно в том и только в том случае, если* X_α *расширенно для любого* $\alpha \in \mathrm{A}$.

$\lhd$ Не трудно проверить, что указанное отображение является B-метрикой. Кроме того, если (b_ξ) — разбиение единицы, а (x_ξ) — семейство элементов произведения X, то $x = \mathrm{mix}(b_\xi x_\xi)$ в том и только в том случае, если $x(\alpha) = \mathrm{mix}(b_\xi x_\xi(\alpha))$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$. Отсюда и вытекает утверждение о расширенности X. $\rhd$

В дальнейшем произведение B-множеств всегда рассматривается как B-множество с указанной в 5.6.4 булевой метрикой.

5.6.5. *Пусть множество* A *лежит в расширенном* B*-множестве* (X,d)*. Тогда для любого* $x \in X$ *булево расстояние от* x *до* A*, заданное как*

$$\mathrm{dist}(x,A) := \bigwedge\{d(x,a) :\ a \in A\},$$

достигается на некотором $a \in \mathrm{mix}(A)$*. Иными словами, для каждого* $x \in X$ *существует такой* $a \in \mathrm{mix}(A)$*, что* $\mathrm{dist}(x,A) = d(x,a)$.

$\lhd$ Если $b_0 := \mathrm{dist}(x,A)$, то существуют разбиение (b_ξ) элемента b_0^* и семейство $(a_\xi) \subset A$ такие, что $b_\xi \wedge d(x,a_\xi) = \mathbb{0}$ для всех ξ. Положим $a := \mathrm{mix}\{b_0 a_0, b_\xi a_\xi\}$, где a_0 — произвольный элемент из A. Поскольку $(b_\xi) \cup \{b_0\}$ — разбиение единицы, то $a \in \mathrm{mix}(A)$. Кроме того, для любого ξ будет

$$b_\xi \wedge d(x,a) \leqslant (b_\xi \wedge d(x,a_\xi)) \vee (b_\xi \wedge d(a_\xi,a)) = \mathbb{0}.$$

Значит, $b_0^* \wedge d(x,a) = \bigvee\{b_\xi \wedge d(x,a)\} = \mathbb{0}$ или $d(x,a) \leqslant b_0$. Противоположное неравенство очевидно. $\rhd$

5.6.6. Отметим три полезных следствия 5.6.5.

(1) *Булево расстояние от точки $x \in X$ до подмножества A расширенного B-множества X равно нулю в том и только в том случае, если $x \in \operatorname{mix}(A)$.*

(2) *Булево расстояние между двумя множествами $A_1 \subset X$ и $A_2 \subset X$* определяют формулой

$$\bar{d}(A_1, A_2) := \bigvee_{\alpha \in A_1} \operatorname{dist}(a, A_2) \vee \bigvee_{\alpha \in A_2} \operatorname{dist}(A_1, a).$$

Легко проверить, что $\bar{d}$—булева полуметрика на $\mathscr{P}(X)$, которая, вообще говоря, не является метрикой. Полуметрику $\bar{d}$ естественно назвать *B-полуметрикой Хаусдорфа, ассоциированной с d.*

Если X расширенно, то $\bar{d}(A_1, A_2) = \mathbb{0}$ в том и только в том случае, если $\operatorname{mix}(A_1) = \operatorname{mix}(A_2)$.

(3) *Пусть $\mathscr{P}_{\mathrm{cyc}}(X)$ — множество всех циклических подмножеств B-множества (X, d). Тогда (X, d) расширенно в том и только в том случае, если $(\mathscr{P}_{\mathrm{cyc}}(X), \bar{d})$ — расширенное B-множество.*

$\lhd$ Действительно, пусть X расширенно. Тогда согласно (2) $\bar{d}$ — метрика на $\mathscr{P}_{\mathrm{cyc}}(X)$ и нужно лишь обосновать расширенность $(\mathscr{P}_{\mathrm{cyc}}(X), \bar{d})$. Для этого рассмотрим разбиение единицы (b_ξ) и семейство (A_ξ) в $\mathscr{P}_{\mathrm{cyc}}(X)$. Определим $A \subset X$ как совокупность всех перемешиваний вида $\operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, где $x_\xi \in A_\xi$ при всех ξ. Тогда для любых $x \in A$ и $x' \in A_\xi$ в силу коммутативности точных границ 2.1.1 (2) справедливы равенства

$$b_\xi \wedge \operatorname{dist}(x', A) = \bigwedge \{b_\xi \wedge d(x', a) : a \in A\} = \mathbb{0},$$
$$b_\xi \wedge \operatorname{dist}(x, A_\xi) = \bigwedge \{b_\xi \wedge d(x, a) : a \in A_\xi\} = \mathbb{0}.$$

Далее, в силу дистрибутивных законов 2.1.6 (1, 2) будет $b_\xi \wedge \bar{d}(A, A_\xi) = \mathbb{0}$. Последнее верно при каждом ξ и, значит, $A = \operatorname{mix}(b_\xi A_\xi)$. Цикличность A можно проверить как в 5.2.6.

Обратное утверждение следует из того, что отображение $x \mapsto \{x\}$ — инъекция X в $\mathscr{P}_{\mathrm{cyc}}(X)$, причем $\bar{d}(\{x\}, \{y\}) = d(x, y)$ для любых $x, y \in X$. $\rhd$

5.6.7. Рассмотрим B-множества (X, d_X) и (Y, d_Y). Соответствие Φ из X в Y называют *нерастягивающим*, если

$$\bar{d}_Y(\Phi(x), \Phi(y)) \leqslant d_X(x, y) \quad (x, y \in \operatorname{dom}(\Phi)),$$

где $\bar{d}_Y$ — это B-полуметрика Хаусдорфа, ассоциированная с d_Y.

(1) *Нерастягиваемость соответствия Φ равносильна каждому из условий* (ср. 5.5.2 (1, 2)):

(a) *если $d_X(x_1, x_2) \leqslant b$ $(x_1, x_2 \in \operatorname{dom}(\Phi))$, то для каждого $y \in Y$ выполняется*

$$b \vee \operatorname{dist}(y, \Phi(x_1)) = b \vee \operatorname{dist}(y, \Phi(x_2));$$

(b) $\operatorname{dist}(y_1, \Phi(x_2)) \leqslant d_X(x_1, x_2)$ *для всех $x_1, x_2 \in \operatorname{dom}(\Phi)$ и $y_1 \in \Phi(x_1)$.*

Если X и Y служат подмножествами $\mathbb{V}^{(B)}$, то для обозначения одного и того же свойства соответствия мы вынуждены после введенного определения употреблять два (противоположных по общепринятому смыслу) термина — нерастягиваемость и экстенсиональность. Во избежание недоразумений следует помнить, что экстенсиональность осмыслена с помощью булевой оценки истинности равенства $[\![\cdot = \cdot]\!]$, а нерастягиваемость относится к изучаемой B-*метрике*.

Соответствие Φ называют *вполне нерастягивающим*, если оно нерастягивающее и

$$\Phi(x) = \operatorname{mix}(\Phi(x)) \quad (x \in \operatorname{dom}(\Phi)).$$

(2) *Спуск любого соответствия является вполне нерастягивающим* (*или, что то же, вполне экстенсиональным*) *соответствием.*

$\lhd$ Требуемое означает, что если Ψ — соответствие внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $\Phi := \Psi{\downarrow}$, то Φ — экстенсиональное соответствие и $\Phi(x)$ — циклическое множество при каждом $x \in \operatorname{dom}(\Phi)$. Экстенсиональность Φ вытекает из 5.3.3 (7), 5.3.5 и 5.5.2 (5), а цикличность $\Phi(x)$ — из 5.2.3 (1) и 5.3.5 (1). $\rhd$

Отображение $f : X \to Y$ будет нерастягивающим, если

$$d_Y(f(x), f(x')) \leqslant d_X(x, x') \quad (x, x' \in X).$$

Если в последнем соотношении выполняется равенство, то говорят, что f есть B-*изометрия*. Биективную B-изометрию называют *изоморфизмом B-множеств*.

5.6.8. Всякое множество $X \in \mathbb{V}$ можно превратить в B-множество, определив на нем *дискретную B-метрику*:

$$d(x, y) := \begin{cases} \mathbb{1}_B, & \text{если } x \neq y, \\ \mathbb{0}_B, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

При этом пару (X, d) именуют *дискретным B-множеством*. В дискретном B-множестве отсутствует перемешивание $\operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, если только множество элементов (x_ξ) содержит более одного элемента, а разбиение единицы (b_ξ) отлично от тривиального разбиения $\{\mathbb{0}_B, \mathbb{1}_B\}$. Любое соответствие из дискретного B-множества в произвольное B-множество является нерастягивающим.

Дискретные и расширенные B-множества — два крайних примера «B-квалификации», доставляемых элементами универсумов $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. 5.2.3). Компромиссные варианты B-множеств дает класс $\mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$. В анализе встречаются также B-множества иного происхождения.

5.6.9. *Пусть π — полный мономорфизм из B в булеву алгебру C. Положим*

$$d_\pi(x, y) := \bigwedge\{b^* : \pi(b) \wedge x = \pi(b) \wedge y\} \quad (x, y \in C).$$

Тогда d_π есть B-метрика на C и булевы операции на C являются нерастягивающими отображениями.

$\lhd$ Если $\pi = I_B$, то $d_\pi(b, b') = (b \Leftrightarrow b')^* = b \bigtriangleup b'$. Рассмотрим еще одну полную булеву алгебру C' и полный мономорфизм $\pi' : B \to C'$. Гомоморфизм $h : C \to C'$ будет нерастягивающим отображением B-множеств (C, d_π) и $(C', d_{\pi'})$ тогда и только тогда, когда $h \circ \pi = \pi'$. В самом деле, нерастягиваемость h в метриках d_π и $d_{\pi'}$ означает, что $\pi(b) \wedge x = \pi(b) \wedge y$ влечет $\pi'(b) \wedge h(x) = \pi'(b) \wedge h(y)$ для любых $x, y \in C$ и $b \in B$. Если $\pi' = h \circ \pi$, то, применяя h к равенству $\pi(b) \wedge x = \pi(b) \wedge y$, получим $\pi'(b) \wedge h(x) = \pi'(b) \wedge h(y)$. Наоборот, если в последнем равенстве взять $x = \mathbb{1}_C$ и $y := \pi(b)$, то будет $\pi'(b) = \pi'(b) \wedge h\pi(b)$ или $\pi'(b) \leqslant h \circ \pi(b)$. Отсюда ввиду произвольности $b \in B$ выводим $\pi' = h \circ \pi$. $\rhd$

5.6.10. Разберем еще одну конструкцию с B-множествами, аналогичную 2.2.10. Пусть ψ — ультрафильтр на булевой алгебре D. Рассмотрим булево множество (X, d_X) с D-значной B-метрикой d_X. Введем бинарное отношение $\sim_\psi$ в X формулой

$$(x, y) \in {\sim_\psi} \leftrightarrow d_X(x, y)^* \in \psi.$$

Из определения булевой метрики видно, что $\sim_\psi$ — отношение эквивалентности. Пусть $X/{\sim_\psi}$ — фактор-множество множества X по отношению $\sim_\psi$, а $\pi_X : X \to X/{\sim_\psi}$ — каноническое отображение. Если проделать то же самое с булевым множеством $(D, \triangle)$, то в качестве $D/{\sim_\psi}$ мы получим двухэлементную булеву алгебру так, что $D/{\sim_\psi} \simeq \{\mathbb{0}_D, \mathbb{1}_D\}$. Как видно, существует единственное отображение $\widetilde{d} : X/{\sim_\psi} \to D/{\sim_\psi}$ такое, что $\widetilde{d}(\pi_X x, \pi_X y) = \pi_D(d(x, y))$ $(x, y \in X)$. Кроме того, $\widetilde{d}$ — дискретная булева метрика на $X/{\sim_\psi}$. Если d_X — дискретная метрика, то $\sim_\psi = I_X$ и $X/{\sim_\psi} = X$. Некоторые теоретико-множественные операции в X и $X/{\sim_\psi}$ связаны простыми соотношениями. Если (X_α) — семейство подмножеств множества X, то $(\bigcup X_\alpha)/{\sim_\psi} = \bigcup (X_\alpha/{\sim_\psi})$. В случае степеней между $X^n/{\sim_\psi}$ и $(X/{\sim_\psi})^n$ существует естественная биекция, задаваемая формулой

$$\pi_{X^n}(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\pi_X x_1, \dots, \pi_X x_n) \quad (x_1, \dots, x_n \in X).$$

Отметим также, что если $A \subset X$, то $A/{\sim_\psi} = \pi_X(A)$ и $\pi_A = \pi_X \restriction A$.

Возьмем еще одно B-множество (Y, d_Y), и пусть $F \subset X \times Y$. Тогда, как легко проверить,

$$\operatorname{dom}(F/{\sim_\psi}) = \operatorname{dom}(F)/{\sim_\psi}, \quad \operatorname{im}(F/{\sim_\psi}) = \operatorname{im}(F)/{\sim_\psi}.$$

5.7. Погружение булевых множеств

В приложениях булевозначных моделей к анализу весьма полезно погружать изучаемый аналитический объект, наделенный структурой булева множества, в булевозначный универсум так, что внутри модели он становится более простым и (или) хорошо изученным объектом. Процедура погружения оказывается функторной, т. е. позволяет изучать не только внутреннюю структуру отдельных объектов, но и их взаимосвязи.

5.7.1. *Пусть ρ — произвольный автоморфизм (т. е. гомоморфизм в себя) булевой алгебры B, а ψ_ρ — элемент $\mathbb{V}^{(B)}$, определяемый функцией $\{(b^\wedge, \rho(b)) : b \in B\}$ в соответствии с 4.5.7. Тогда имеют место следующие утверждения*:

(1) $\rho(b) = [\![b^\wedge \in \psi_\rho]\!]$ *для любого* $b \in B$;

(2) *для множества* $A \subset B$ *выполняется* $[\![A^\wedge \subset \psi_\rho \to (\bigwedge A)^\wedge \in \psi_\rho]\!] = \mathbb{1}$ *в том и только в том случае, если* $\rho\,(\bigwedge A) = \bigwedge \rho(A)$;

(3) $[\![\psi_\rho$ — *ультрафильтр на* $B^\wedge]\!] = \mathbb{1}$.

$\lhd$ (1): Проверяется вычислением с применением 4.2.8 (1, 2).

(2): Используя (1) и взяв $A \subset B$, выводим:

$$[\![A^\wedge \subset \psi_\rho]\!] = \bigwedge_{a \in A} [\![a \in \psi_\rho]\!] = \bigwedge_{a \in A} \rho(a) = \bigwedge \rho(A).$$

Поскольку $\rho\,(\bigwedge A) \leqslant \bigwedge \rho(A)$ в силу изотонности ρ, неравенство $[\![A^\wedge \subset \psi_\rho]\!] \leqslant [\![(\bigwedge A)^\wedge \in \psi_\rho]\!]$ равносильно равенству $\rho\,(\bigwedge A) = \bigwedge \rho(A)$.

(3): Прежде всего заметим, что $\mathbb{V}^{(B)} \models \psi_\rho \subset B^\wedge$. В самом деле, для каждого $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ имеем

$$[\![t \in \psi_\rho]\!] = \bigvee_{b \in B} \rho(b) \wedge [\![t = b^\wedge]\!] \leqslant \bigvee_{b \in B} [\![t = b^\wedge]\!] = [\![t \in B^\wedge]\!].$$

Далее, из (1) следует, что $[\![0^\wedge \notin \psi_\rho]\!] = \mathbb{1}$, а из (2) видно, что $[\![\psi_\rho$ — базис фильтра$]\!] = \mathbb{1}$. Кроме того, если $b \in B$, то

$$[\![(\exists\, a \in \psi_\rho)(a \leqslant b^\wedge)]\!] = \bigvee_{a \in B} \rho(a) \wedge [\![a^\wedge \leqslant b^\wedge]\!] = \bigvee_{a \leqslant b} \rho(a) = \rho(b) = [\![b^\wedge \in \psi_\rho]\!],$$

так что

$$[\![(\forall\, b \in B^\wedge)((\exists\, a \in \psi_\rho) a \leqslant b) \to b \in \psi_\rho]\!] = \mathbb{1}.$$

Итак, ψ_ρ — фильтр в $B^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и осталось показать, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «для любого $b \in B^\wedge$ либо $b \in \psi_\rho$, либо $b^* \in \psi_\rho$». Обоснование этого утверждения содержится в выкладках:

$$[\![(\forall\, b \in B^\wedge)(b \in \psi_\rho \vee b^* \in \psi_\rho)]\!] = \bigwedge_{b \in B} [\![b^\wedge \in \psi_\rho]\!] \vee [\![(b^*)^\wedge \in \psi_\rho]\!] =$$

$$= \bigwedge_{b \in B} \rho(b) \vee \rho(b^*) = \bigwedge\{\rho(b \vee b^*) :\, b \in B\} = \rho(\mathbb{1}) = \mathbb{1}. \ \triangleright$$

5.7.2. Пусть $\psi := \psi_\imath$, где $\imath$ — тождественный гомоморфизм на B. Согласно 5.7.1 $\mathbb{V}^{(B)} \models$«ψ — ультрафильтр на $B^\wedge$ и $A^\wedge \subset \psi$ влечет $\bigwedge(A)^\wedge \in \psi$», каково бы ни было множество $A \subset B$.

Возьмем произвольное B-множество (X, d). Из 5.1.6 видно, что $(X^\wedge, d^\wedge)$ есть B-множество внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. На основании 5.6.10, 5.7.1 и принципа максимума существуют такие $X^\sim$, $\sim := \sim_\psi$ и $\pi_X \in \mathbb{V}^{(B)}$, что

- **(1)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\sim$ — отношение эквивалентности на $X^\wedge$»;
- **(2)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \widetilde{X} := X^\wedge/\sim$;
- **(3)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\pi_X : X \to X^\sim$ — фактор-отображение»;
- **(4)** $[\![(x^\wedge, y^\wedge)^B \in \sim]\!] = d(x, y)^*$ $(x, y \in X)$.

Если применить описанную процедуру к B-множеству $(B, \triangle)$ (см. 5.6.9), то в качестве $\widetilde{B}$ получим двухэлементную булеву алгебру, так что $\mathbb{V}^{(B)} \models \widetilde{B} \simeq \{\mathbb{0}_B^\wedge, \mathbb{1}_B^\wedge\}^B$. Таким образом, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ существует единственная $\{\mathbb{0}_B^\wedge, \mathbb{1}_B^\wedge\}$-значная булева метрика $\widetilde{d}$ на $\widetilde{X}$, для которой

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x, y \in X^\wedge) \widetilde{d}(\pi_X(x), \pi_X(y)) = \pi_B(d^\wedge(x, y)).$$

Как видно из 5.6.10, для дискретного B-множества (X, d) будет $\sim\, = I_{X^\wedge}$ и $X^\sim = X^\wedge$.

5.7.3. Будем говорить, что подмножества A и C некоторого B-множества (X, d) *находятся в общем положении*, если

$$d(a, c) \geqslant \bigwedge\{d(a, b) \vee d(b, c) :\, b \in A \cap C\}$$

для любых $a \in A$ и $c \in C$. Так же, как и в 5.5.3, в указанном соотношении фактически имеет место равенство, ибо $d(a, c) \leqslant d(a, b) \vee d(b, c)$.

Множества A и C находятся в общем положении в том и только в том случае, если

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (A \cap C)^{\sim} = A^{\sim} \cap C^{\sim}.$$

$\lhd$ Заметим, что $(A \cap C)^{\sim} = \pi_X((A \cap C)^{\wedge}) = \pi_X(A^{\wedge} \cap C^{\wedge})$ и $A^{\sim} \cap C^{\sim} = \pi_X(A^{\wedge}) \cap \pi_X(C^{\wedge})$. Следовательно, включение $(A \cap C)^{\sim} \subset A^{\sim} \cap C^{\sim}$ верно всегда, а $A^{\sim} \cap C^{\sim} \subset (A \cap C)^{\sim}$ равносильно формуле

$$(\forall\, a \in A^{\wedge})(\forall\, c \in C^{\wedge})(a{\sim}c \to (\exists\, b \in (A \cap C)^{\wedge})(b{\sim}a \wedge b{\sim}c)).$$

Расписывая булеву оценку истинности последней и учитывая равенство $[\![a^{\wedge}{\sim}c^{\wedge}]\!] = d(a,c)^*$, получим

$$\bigwedge_{a \in A, c \in C} d(a,c)^* \Rightarrow \Bigg(\bigvee_{b \in A \cap C} d(a,b)^* \wedge d(b,c)^* \Bigg) = \mathbb{1}.$$

Теперь ясно, что $[\![A^{\sim} \cap C^{\sim} \subset (A \cap C)^{\sim}]\!] = \mathbb{1}$ тогда и только тогда, когда для любых $a \in A$ и $c \in C$ верно

$$d(a,c)^* \leqslant \Bigg(\bigwedge_{b \in A \cap C} d(a,b) \vee d(b,c) \Bigg)^*.$$

Но это означает, что A и C находятся в общем положении. $\rhd$

5.7.4. Теорема. *Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — некоторые B-множества и Φ — нерастягивающее соответствие из X в Y. Тогда внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ существует единственное соответствие $\Phi^{\sim}$ из $X^{\sim}$ в $Y^{\sim}$ такое, что*

$$\operatorname{dom}(\Phi^{\sim}) = (\operatorname{dom}(\Phi))^{\sim}, \quad [\![\Phi^{\sim}(\pi_X x^{\wedge}) = \pi_Y(\Phi(x)^{\wedge})]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in \operatorname{dom}(\Phi)).$$

При этом имеют место следующие утверждения:

(1) *если множества $A \subset X$ и $\operatorname{dom}(\Phi)$ находятся в общем положении, то*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \Phi(A)^{\sim} = \Phi^{\sim}(A^{\sim});$$

(2) *суперпозиция $\Psi \circ \Phi$ нерастягивающих соответствий Φ и Ψ будет нерастягивающим соответствием, а если $\operatorname{dom}(\Psi \circ \Phi) = \operatorname{dom}(\Phi)$ и множества $\operatorname{dom}(\Psi)$ и $\Phi(x)$ находятся в общем положении при всех $x \in \operatorname{dom}(\Phi)$, то*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\Psi \circ \Phi)^{\sim} = \Psi^{\sim} \circ \Phi^{\sim};$$

(3) $\mathbb{V}^{(B)} \models (I_X)^{\sim} = I_{X^{\sim}}$.

$\lhd$ Как известно из 5.1.5, $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\Phi^{\wedge}$ — соответствие из $X^{\wedge}$ в $Y^{\wedge}$». Положим $\Phi^{\sim} := \pi_Y \circ \Phi^{\wedge} \circ \pi_X^{-1}$. Ясно, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\Phi^{\sim}$ — соответствие из $X^{\sim}$ в $Y^{\sim}$ и $\operatorname{dom}(\Phi^{\sim}) = \pi_X(\operatorname{dom}(\Phi^{\wedge})) = \pi_X((\operatorname{dom}(\Phi))^{\wedge}) = (\operatorname{dom}(\Phi))^{\sim}$». Покажем теперь, что для любых $x \in Z := \operatorname{dom}(\Phi)$ и $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ булевы оценки истинности $b_1 := [\![y \in \Phi^{\sim} \circ \pi_X(x^{\wedge})]\!]$ и $b_2 := [\![y \in \pi_Y \circ \Phi^{\wedge}(x^{\wedge})]\!]$ совпадают. В самом деле,

$$b_1 = [\![(\exists\, s \in Z^{\wedge})(\exists\, t \in Y^{\wedge})(y = \pi_Y(t) \wedge t \in \Phi^{\wedge}(s) \wedge \pi_X(s) = \pi_X(x^{\wedge}))]\!] =$$

$$= \bigvee_{s \in Z} \bigvee_{t \in Y} [\![t^{\wedge} \in \Phi(s)^{\wedge}]\!] \wedge [\![y = \pi_Y(t^{\wedge})]\!] \wedge [\![\pi_X(s^{\wedge}) = \pi_X(x^{\wedge})]\!] \geqslant$$

$$\geqslant \bigvee_{t \in Y} [\![y = \pi_Y(t^{\wedge})]\!] \wedge [\![t^{\wedge} \in \Phi(x)^{\wedge}]\!] = [\![(\exists\, t \in Y^{\wedge})(y = \pi_Y(t) \wedge t \in \Phi^{\wedge}(x^{\wedge}))]\!] = b_2.$$

С другой стороны, учитывая равенства

$$d_X(s,x)^* = [\![\pi_X(s^\wedge) = \pi_X(x^\wedge)]\!],$$
$$\bar{d}_Y(\Phi(x),\Phi(s))^* = [\![\pi_Y(\Phi(x)^\wedge) = \pi_Y(\Phi(s)^\wedge)]\!]$$

и привлекая нерастягиваемость соответствия Φ, получаем

$$b_1 \leqslant \bigvee_{s\in Z}\bigvee_{t\in Y}[\![\pi_Y(\Phi(s)^\wedge) = \pi_Y(\Phi(x)^\wedge)]\!] \wedge [\![t^\wedge \in \Phi(s)^\wedge]\!]\wedge$$
$$\wedge[\![y = \pi_Y(t^\wedge)]\!] \leqslant \bigvee_{s\in Z}[\![y \in \pi_Y(\Phi^\wedge(x^\wedge))]\!] = b_2.$$

Итак, $b_1 = b_2$, что немедленно влечет справедливость определяющего соотношения $[\![\pi_Y(\Phi(x)^\wedge) = \Phi^\sim(\pi_X(x^\wedge))]\!] = \mathbb{1}$ $(x \in Z)$. Значит, выполнено соотношение

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x \in (\mathrm{dom}(\Phi))^\wedge)\Phi^\sim(\pi_X x) = \pi_Y\Phi^\wedge(x).$$

Отсюда вытекает единственность $\Phi^\sim$, ибо

$$\mathrm{dom}(\Phi^\sim) = (\mathrm{dom}(\Phi))^\sim = \pi_X((\mathrm{dom}(\Phi))^\wedge).$$

(1): Привлекая 5.7.3, легко заметить, что

$$\Phi^\sim(A^\sim) = \Phi^\sim(A^\sim \cap \mathrm{dom}(\Phi^\sim)) = \Phi^\sim((A \cap \mathrm{dom}(\Phi))^\sim).$$

С другой стороны, $\Phi(A)^\sim = \Phi(A \cap \mathrm{dom}(\Phi))^\sim$. Стало быть, не ограничивая общности, можно считать, что $A \subset \mathrm{dom}(\Phi)$. В силу определяющего свойства $\Phi^\sim$, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ справедлива цепочка равенств

$$\Phi^\sim(A^\sim) = \bigcup_{a\in A^\sim}\Phi^\sim(a) = \bigcup_{a\in A^\wedge}\Phi^\sim(\pi_X a) =$$
$$= \bigcup_{a\in A^\wedge}\pi_Y(\Phi^\wedge(a)) = \pi_Y(\Phi^\wedge(A^\wedge)) = \pi_Y(\Phi(A)^\wedge) = \Phi(A)^\sim.$$

(2): Пусть Ψ — нерастягивающее соответствие из Y в U. Возьмем $x_1, x_2 \in Z$, $y_1 \in \Phi(x_1)$ и $u_1 \in \Psi(y_1)$. Тогда по 5.6.7 (1)

$$\mathrm{dist}(u_1, \Psi\circ\Phi(x_2)) \leqslant \bigwedge\{\mathrm{dist}(u_1,\Psi(y)) :\, y \in \Phi(x_2)\} \leqslant$$
$$\leqslant \bigwedge\{d(y_1,y) :\, y \in \Phi(x_2)\} = \mathrm{dist}(y_1,\Phi(x_2)) \leqslant d(x_1,x_2).$$

Отсюда ввиду произвольности x_1, x_2, y_1 и u_1 мы получаем нерастягиваемость соответствия $\Psi\circ\Phi$.

Далее, учитывая (1), 5.1.5 (2) и определяющие соотношения для $(\Psi\circ\Phi)^\sim$, $\Psi^\sim$ и $\Phi^\sim$, можно написать $(x \in Z)$:

$$(\Psi^\sim \circ \Phi^\sim)(\pi_X x^\wedge) = \Psi^\sim(\Phi(x)^\sim) = \Psi(\Phi(x))^\sim =$$
$$= \pi_Y((\Psi\circ\Phi)(x)^\wedge) = \pi_Y((\Psi\circ\Phi)^\wedge(x^\wedge)) = (\Psi\circ\Phi)^\sim(\pi_X x^\wedge).$$

Стало быть, $[\![(\Psi\circ\Phi)^\sim = \Psi^\sim\circ\Phi^\sim]\!] = \mathbb{1}$, ибо $Z^\sim = \mathrm{dom}(\Psi^\sim\circ\Phi^\sim)$.

(3): Очевидное следствие из 5.1.5 (4). $\triangleright$

5.7.5. Теорема. *Для любого нерастягивающего отображения $f : X \to Y$ существует единственный элемент $f^{\sim} \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что*

$$[\![f^{\sim} : X^{\sim} \to Y^{\sim}]\!] = [\![f^{\sim} \circ \pi_X = \pi_Y \circ f^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}.$$

При этом справедливы утверждения:

(1) $\mathbb{V}^{(B)} \models f(A)^{\sim} = f^{\sim}(A^{\sim})$ *для каждого* $A \subset X$;

(2) *если* $g : Y \to Z$ — *нерастягивающее отображение, то* $g \circ f$ — *нерастягивающее отображение и* $\mathbb{V}^{(B)} \models (g \circ f)^{\sim} = g^{\sim} \circ f^{\sim}$;

(3) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$f^{\sim}$ инъективно» в том и только в том случае, если f — это B-изометрия*;

(4) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$f^{\sim}$ сюръективно» в том и только в том случае, если* $\bigvee\{d(f(x), y) : x \in X\} = \mathbb{1}$ *для всякого* $y \in Y$.

$\triangleleft$ Следует непосредственно из 5.7.4. $\triangleright$

5.7.6. Теорема. *Пусть (X, d_X) — это B-множество и $X' := X^{\sim}\!\downarrow$. Тогда имеют место утверждения:*

(1) *существует инъекция $\imath_X : X \to X'$ такая, что*

$$d_X(x_1, x_2) = [\![\imath_X x_1 \neq \imath_X x_2]\!] \quad (x_1, x_2 \in X);$$

(2) *для любого $x' \in X'$ существуют разбиение единицы (b_ξ) и семейство $(x_\xi) \subset X$ такие, что $x' = \mathrm{mix}(b_\xi \imath(x_\xi))$*;

(3) *если Φ — нерастягивающее соответствие из X в B-множество Y, $Y' := Y^{\sim}\!\downarrow$ и $\Phi' := \Phi^{\sim}\!\downarrow$, то Φ' — единственное вполне экстенсиональное соответствие из X' в Y', для которого* $\mathrm{dom}(\Phi') = \mathrm{mix}(\imath_X(\mathrm{dom}(\Phi)))$,

$$\Phi'(\imath_X x) = \mathrm{mix}(\imath_X(\Phi(x))) \quad (x \in \mathrm{dom}(\Phi)).$$

$\triangleleft$ (1): По определению $X^{\sim}$ и π_X (см. 5.7.2 (1–3)) для любого $x \in X$ будет $[\![\pi_X x^{\wedge} \in X^{\sim}]\!] = \mathbb{1}$. Поэтому существует единственный элемент $x' \in X'$ такой, что $[\![x' = \pi_X x^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}$. Положим $\imath_X x := x'$. Тем самым определено отображение $\imath := \imath_X : X \to X'$, причем $[\![\imath x = \pi_X x^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}$ $(x \in X)$. Используя последнее соотношение и равенство 5.7.2 (4), для произвольных x_1, $x_2 \in X$ заключаем:

$$[\![\imath x_1 \neq \imath x_2]\!] = [\![\pi_X x_1^{\wedge} = \pi_X x_2^{\wedge}]\!]^*] = [\![x_1^{\wedge} \sim x_2^{\wedge}]\!]^* = d_X(x_1, x_2).$$

Отсюда, в частности, вытекает инъективность $\imath$.

(2): Сначала заметим, что имеет место формула $[\![t \in (\mathrm{im}(\imath))\!\uparrow = \pi_X(X^{\wedge})]\!] = \mathbb{1}$. Действительно, для $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ по определению инъекции $\imath$ верно

$$[\![t \in (\mathrm{im}(\imath))\!\uparrow]\!] = \bigvee_{x \in X} [\![t = \imath x]\!] = \bigvee_{x \in X} [\![t = \pi_X x^{\wedge}]\!] = [\![t \in \pi_X(X^{\wedge})]\!].$$

Теперь с учетом правила сокращения 5.4.3 (1) будет

$$X' = \pi_X(X^{\wedge})\!\downarrow = (\mathrm{im}(\imath))\!\uparrow\downarrow = \imath(X)\!\uparrow\downarrow = \mathrm{mix}(\imath(X)).$$

(3): Поскольку $\Phi^{\sim}$ — соответствие из $X^{\sim}$ в $Y^{\sim}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то Φ' — вполне экстенсиональное соответствие из X' в Y' согласно 5.6.7 (2).

Применяя свойства спуска соответствий (см. 5.3.5), для произвольных $x \in X$ и $y \in Y$ можно написать:

$$\imath_Y y \in \Phi'(\imath_X x) \leftrightarrow [\![\imath_Y y \in \Phi^{\sim}(\imath_X x)]\!] = \mathbb{1}.$$

В правой части этой эквивалентности можно $\imath_X x$ заменить на $\pi_X x^\wedge$ ввиду конструкции $\imath_X$. Далее, по теореме 5.7.4

$$[\![\imath_Y y \in \Phi^\sim(\pi_X x^\wedge)]\!] = [\![\imath_Y y \in \pi_Y(\Phi(x)^\wedge)]\!].$$

Из всего сказанного следует, что $\imath_Y y \in \Phi'(\imath_X x)$ в том и только в том случае, если $\imath_Y y \in \pi_Y(\Phi(x)^\wedge){\downarrow}$, а это и влечет требуемое соотношение. В самом деле, доказанное в (1) и (2) позволяет заключить, что $A^\sim{\downarrow} = \pi_Y(A^\wedge){\downarrow} = \operatorname{mix}(\imath_Y(A))$ для любого $A \subset Y$. Учитывая еще правило 5.3.5 (1), выводим

$$\Phi'(\imath_X x) = \Phi^\sim{\downarrow}(\imath_X x) = \Phi^\sim(\pi_X(x^\wedge)){\downarrow} = \pi_Y(\Phi(x)^\wedge) = \operatorname{mix}(\imath_Y(\Phi(x))),$$

где $x \in \operatorname{dom}(\Phi)$. Положим $X_1 := \operatorname{im}(\imath_X)$, $Y_1 := \operatorname{im}(\imath_Y)$ и $\Phi_1 := \imath_Y^{-1} \circ \Phi' \circ \imath_X$. Тогда Φ_1 — экстенсиональное соответствие из X_1 в Y_1 и выполнены равенства

$$X' = \operatorname{mix}(X_1), \quad Y' = \operatorname{mix}(Y_1),$$
$$\Phi'(x) = \operatorname{mix}(\Phi_1(x)) \quad (x \in \operatorname{dom}(\Phi_1)).$$

Отсюда вытекает $\Phi' = \operatorname{mix}(\Phi_1)$ и тем самым единственность Φ'. $\triangleright$

5.7.7. Опишем модифицированные спуски и подъемы соответствий.

(1) Пусть X — непустое B-множество, Y — произвольный элемент $\mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $[\![Y \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1}$. Рассмотрим $\Phi \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\Phi = (F, X^\sim, Y)$ — соответствие из $X^\sim$ в Y». По теореме 5.3.5 $\Phi{\downarrow}$ — соответствие из $X' := X^\sim{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$. Положим по определению $\Phi{\downarrow\!\!\!\!\!\;\rule{0pt}{0pt}}\!\!\!\;\rfloor := \Phi{\downarrow} \circ \imath_X$. Соответствие $\Phi\rfloor$ называют *модифицированным спуском соответствия* Φ. Ввиду теорем 5.3.5 и 5.7.6 $\Phi\rfloor$ — единственное вполне нерастягивающее соответствие из X в $Y{\downarrow}$, для которого

$$y \in \Phi\rfloor(x) \leftrightarrow [\![y \in \Phi(\imath_X x)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X).$$

Заметим также, что $\Phi\rfloor = (F{\downarrow}^-, X, Y{\downarrow})$, где

$$F{\downarrow}^- := \big\{(x, y) \in X \times Y{\downarrow} : (\imath_X x, y)^B \in F\big\}.$$

(2) Предположим теперь, что $\Psi := (F, X, Y{\downarrow})$ — нерастягивающее соответствие. Операция подъема к Ψ непосредственно неприменима. Однако соответствие $\Psi \circ \imath_X$, как видно, экстенсионально, и к нему можно применить подъем. Положим по определению $\Psi\rceil := (\Psi \circ \imath_X^{-1}){\uparrow}$ и назовем $\Psi\rceil$ *модифицированным подъемом соответствия* Ψ. В силу теорем 5.5.5 и 5.7.6 $\Psi\rceil$ — единственное соответствие из $X^\sim$ в Y внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ такое, что

$$[\![\operatorname{dom}(\Psi)\rceil = (\operatorname{dom}(\Psi))^\sim]\!] = \mathbb{1},$$
$$[\![\Psi\rceil(\imath_X x) = \Psi(x){\uparrow}]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in \operatorname{dom}(\Psi)).$$

Заметим вновь, что $\Psi\rceil = (F_-{\uparrow}, X^\sim, Y)$, где

$$F_- := \big\{(\imath_X x, y)^B : (x, y) \in F\big\}.$$

(3) Допустим, что X — дискретное B-множество. Тогда $\Phi\rfloor$ — соответствие из X в $Y{\downarrow}$, однозначно определенное соотношением

$$y \in \Phi\rfloor(x) \leftrightarrow [\![y \in \Phi(x^\wedge)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X).$$

С другой стороны, в этом случае всякое соответствие Ψ из X в $Y{\downarrow}$ является нерастягивающим, так что существует единственное соответствие $\Psi{\Uparrow}$ из $X^{\wedge}$ в Y, для которого

$$[\![\Psi{\Uparrow}(x^{\wedge}) = \Psi(x){\uparrow}]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X).$$

5.7.8. Теорема. *Пусть* $[\![X^{\sim}, Y]\!]$ — *множество элементов* $\Phi \in \mathbb{V}^{(B)}$, *для которых* $[\![\Phi$ — *соответствие из* $X^{\sim}$ *в* $Y]\!] = \mathbb{1}$, *а* $[\![X, Y{\downarrow}]\!]$ — *множество всех вполне нерастягивающих соответствий из* X *в* $Y{\downarrow}$. *Модифицированные спуск и подъем — взаимно обратные отображения, осуществляющие биекцию между* $[\![X^{\sim}, Y]\!]$ *и* $[\![X, Y{\downarrow}]\!]$.

$\lhd$ Обозначим для простоты $\imath := \imath_X$. Из 5.7.6 (2) и 5.4.3 (1) видно, что $X^{\sim} = \operatorname{im}(\imath){\uparrow}$. Отсюда в силу 5.5.5 (3) вытекает $I_{X^{\sim}} = (I_{\operatorname{im}(\imath)}){\uparrow}$. Далее, привлекая правила сокращения стрелок для соответствий, получим, что внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ выполнены равенства

$$\Phi{\Downarrow}{\Uparrow} = ((\Phi{\downarrow} \circ \imath) \circ \imath^{-1}){\uparrow} = (\Phi{\downarrow} \circ I_{\operatorname{im}(\imath)}){\uparrow} = \Phi{\downarrow}{\uparrow} \circ (I_{\operatorname{im}(\imath)}){\uparrow} = \Phi \circ I_{X^{\sim}} = \Phi.$$

С другой стороны, для вполне нерастягивающего Ψ имеем

$$\Psi{\Uparrow}{\Downarrow}(x) = (\Psi \circ \imath^{-1}){\uparrow}{\downarrow}(\imath x) = (\operatorname{mix}(\Psi)) \circ \imath^{-1}(\imath x) = \operatorname{mix}(\Psi(x)) = \Psi(x)$$
$$(x \in \operatorname{mix}(\operatorname{dom}(\Psi)) = \operatorname{dom}(\Psi)). \ \rhd$$

5.8. Основные категории и функторы

В этом параграфе мы введем несколько категорий и функторов, которые постоянно фигурируют в приложениях и связаны с операциями канонического вложения (5.1), спуска (5.2, 5.3), подъема (5.4, 5.5) и погружения (5.7).

5.8.1. Теорема 4.6.11 дает возможность оперировать классами внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ так же свободно, как и в универсуме фон Неймана $\mathbb{V}$. В качестве примера рассмотрим определение категории в булевозначной модели (см. 3.1.1).

Категория $\mathfrak{K}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ состоит из трех $\mathbb{V}^{(B)}$-классов $\operatorname{Ob}\mathfrak{K}$, $\operatorname{Mor}\mathfrak{K}$, Com, называемых соответственно *классом объектов, классом морфизмов, композицией категории* $\mathfrak{K}$, таких, что $\mathbb{V}^{(B)} \models (\mathfrak{K}1)$–$(\mathfrak{K}3)$ (см. 4.6.2 (2)):

($\mathfrak{K}1$) существуют отображения D и R из $\operatorname{Mor}\mathfrak{K}$ в $\operatorname{Ob}\mathfrak{K}$ такие, что для любых объектов a и b класс $\mathfrak{K}(a,b) := H_{\mathfrak{K}}(a,b) := \{f \in \operatorname{Mor}\mathfrak{K} : D(f) = a,\ R(f) = b\}$ является множеством (называемым *множеством морфизмов из* a *в* b);

($\mathfrak{K}2$) Com — ассоциативная частичная бинарная операция на $\operatorname{Mor}\mathfrak{K}$, причем

$$\operatorname{dom}(\operatorname{Com}) := \big\{(f,g) \in (\operatorname{Mor}\mathfrak{K})^2 :\ D(g) = R(f)\big\};$$

($\mathfrak{K}3$) для каждого объекта $a \in \operatorname{Ob}\mathfrak{K}$ существует морфизм 1_a, называемый *тождественным морфизмом объекта* a, для которого $D(1_a) = R(1_a) = a$, $\operatorname{Com}(1_a, f) = f$ при $D(f) = a$ и $\operatorname{Com}(g, 1_a) = g$ при $R(g) = a$.

Вместо $\operatorname{Com}(f,g)$ обычно пишут gf или $g \circ f$.

5.8.2. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{K}$ — *это некоторая категория внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$, *определяемая булевозначными классами объектов* $\operatorname{Ob}\mathfrak{K}$, *морфизмов* $\operatorname{Mor}\mathfrak{K}$ *и композиции* Com. *Тогда классы* $\operatorname{Ob}\mathfrak{K}' := (\operatorname{Ob}\mathfrak{K}){\downarrow}$, $\operatorname{Mor}\mathfrak{K}' := (\operatorname{Mor}\mathfrak{K}){\downarrow}$ *и* $\operatorname{Com}' := \operatorname{Com}{\downarrow}$ *образуют категорию* $\mathfrak{K}'$ *(в смысле* $\mathbb{V}$*).*

$\lhd$ Из 5.3.3 (6) следует, что Com' — частичная бинарная операция в классе $(\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}){\downarrow}$. Поскольку $[\![\mathrm{Com}(f,g) = \mathrm{Com}'(f,g)]\!] = \mathbb{1}$ для любых f, $g \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}'$, то из ассоциативности Com внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ без труда выводится ассоциативность Com'. Пусть D и R — это $\mathbb{V}^{(B)}$-классы, фигурирующие в определении категории $\mathfrak{K}$ (см. 5.8.1). Положим $D' := D{\downarrow}$ и $R' := R{\downarrow}$. Благодаря 5.3.3 (1, 6), D' и R' — отображения из $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}'$ в $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}'$. Вновь привлекая 5.3.3 (1), заключаем, что для $f, g \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}'$ равносильны соотношения $(f,g) \in \mathrm{dom}(\mathrm{Com}')$ и $[\![(f,g) \in \mathrm{dom}(\mathrm{Com})]\!] = \mathbb{1}$. С другой стороны, равенство $R'(f) = D'(g)$ выполнено лишь в том случае, если $[\![R(f) = D(g)]\!] = \mathbb{1}$. Существование тождественных морфизмов в $\mathfrak{K}'$ очевидно. Следовательно, $\mathfrak{K}$ удовлетворяет всем условиям определения 5.8.1. $\rhd$

5.8.3. Категорию $\mathfrak{K}'$ из 5.8.2 называют *спуском категории* $\mathfrak{K}$ и обозначают $\mathfrak{K}{\downarrow}$.

Рассмотрим спуск категории непустых множеств и соответствий, который является постоянным спутником всех исследований с привлечением $\mathbb{V}^{(B)}$. Пусть Set_*^B — категория непустых множеств и соответствий внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Более подробно, классы $\mathrm{Ob}\,\mathrm{Set}_*^B$, $\mathrm{Mor}\,\mathrm{Set}_*^B$ и Com, представляющие собой экстенсиональные класс-функции из $\mathbb{V}^{(B)}$ в B (см. 4.6.1), имеют вид

$$\mathrm{Ob}\,\mathrm{Set}_*^B : x \mapsto [\![x \neq \varnothing]\!],$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Mor}\,\mathrm{Set}_*^B : \alpha \mapsto [\![(\exists\, x)(\exists\, y)(\exists\, f)(x \neq \varnothing \wedge y \neq \varnothing \wedge f \neq \varnothing \wedge \\ \wedge f \subset x \times y \wedge \alpha = (f,x,y)]\!],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Com} : u \mapsto [\![(\exists\, \alpha)(\exists\, \beta)(\exists\, \gamma)(\alpha, \beta, \gamma \text{ — соответствия}) \wedge \\ \wedge \gamma = \alpha \circ \beta \wedge u = (\alpha, \beta, \gamma)]\!].\end{aligned}$$

Аналогично определяют категорию Set^B непустых множеств и отображений внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Единственное отличие от Set_*^B состоит в том, что $\mathrm{Mor}\,\mathrm{Set}_*^B$ задают формулой

$$\mathrm{Mor}\,\mathrm{Set}_*^B : a \mapsto [\![(\exists\, x)(\exists\, y)(\exists\, f)(x \neq \varnothing \wedge y \neq \varnothing \wedge f : x \to y)]\!].$$

5.8.4. Введем категорию $\mathscr{V}_*^{(B)}$, связанную с универсумом $\mathbb{V}^{(B)}$. Класс объектов категории $\mathscr{V}_*^{(B)}$ — это непустые $\mathbb{V}^{(B)}$-множества:

$$\mathrm{Ob}\,\mathscr{V}_*^{(B)} := \big\{x \in \mathbb{V}^{(B)} : \ [\![x \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1}\big\}.$$

Множество морфизмов из объекта $x \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{V}_*^{(B)}$ в объект $y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{V}_*^{(B)}$ зададим формулой

$$\mathscr{V}_*^{(B)}(x,y) := \big\{\alpha \in \mathbb{V}^{(B)} : \ [\![\alpha \subset x \times y \text{ и } \mathrm{Gr}(\alpha) \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1}\big\}.$$

Если f и g — морфизмы категории $\mathscr{V}_*^{(B)}$, причем $[\![D(f) = R(d)]\!] = \mathbb{1}$, то по принципу максимума существует единственный элемент $h \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $[\![h = g \circ f]\!] = \mathbb{1}$. Элемент h мы примем за композицию морфизмов f и g в категории $\mathscr{V}_*^{(B)}$.

Подкатегорию $\mathscr{V}_*^{(B)}$, состоящую из тех же объектов и из отображений в качестве морфизмов, мы будем обозначать символом $\mathscr{V}^{(B)}$. Таким образом,

$$\mathscr{V}^{(B)}(x,y) := \big\{f \in \mathbb{V}^{(B)} : \ [\![f : x \to y]\!] = \mathbb{1}\big\}.$$

Подчеркнем, что $\mathscr{V}_*^{(B)}$ и $\mathscr{V}^{(B)}$ являются категориями в смысле $\mathbb{V}$ в отличие от Set_*^B и Set^B.

Спуск категории Set_*^B *совпадает с категорией* $\mathscr{V}_*^{(B)}$, *а спуск категории* Set^B *совпадает с категорией* $\mathscr{V}^{(B)}$:

$$\mathscr{V}_*^{(B)} = \mathrm{Set}_*^B{\downarrow}, \quad \mathscr{V}^{(B)} = \mathrm{Set}^B{\downarrow}.$$

$\lhd$ Следует из определений с учетом правил спуска 5.3.3 (1, 4, 6). $\rhd$

5.8.5. Рассмотрим еще несколько подкатегорий категории множеств и соответствий.

(1) Пусть $\mathscr{V}_*$ — категория непустых множеств и соответствий. Тем самым $\mathrm{Ob}\,\mathscr{V}_* := \mathbb{V} \setminus \{\varnothing\}$ и $\mathscr{V}_*(x, y)$ — множество всех непустых соответствий из x в y. Композиция — это обычная суперпозиция соответствий.

(2) Обозначим символом $\mathscr{P}_n(\mathbb{V}_*^{(B)})$ категорию, состоящую из непустых подмножеств класса $\mathbb{V}^{(B)}$ и экстенсиональных соответствий, имеющих непустой график, с обычной суперпозицией в качестве композиции:

$$\mathrm{Ob}\,\mathscr{P}_n(\mathbb{V}_*^{(B)}) := \mathscr{P}_n(\mathbb{V}^{(B)}) \setminus \{\varnothing\};$$

$$\mathscr{P}_n(\mathbb{V}_*^{(B)})(X, Y) := \{\Phi : \Phi \text{ — экстенсиональное соответствие}$$

$$\text{из } X \text{ в } Y \text{ и } \mathrm{Gr}(\Phi) \neq \varnothing\},$$

$$\mathrm{Com}(\Phi, \Psi) := \Psi \circ \Phi \quad (\Phi, \Psi \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{P}_n(\mathbb{V}_*^{(B)})).$$

Подкатегорию категории $\mathscr{P}_n(\mathbb{V}_*^{(B)})$, состоящую из циклических множеств и вполне экстенсиональных соответствий, мы обозначим через $\mathscr{P}_{cn}(\mathbb{V}_*^{(B)})$. Пусть еще $\mathscr{P}_n(\mathbb{V}^{(B)})$ и $\mathscr{P}_{cn}(\mathbb{V}^{(B)})$ — подкатегории категорий $\mathscr{P}_n(\mathbb{V}_*^{(B)})$ и $\mathscr{P}_{cn}(\mathbb{V}_*^{(B)})$ соответственно с теми же классами объектов, но с классами экстенсиональных отображений в качестве морфизмов. Корректность этих определений обеспечена 5.5.5 (2) и 5.5.6 (1).

(3) Рассмотрим категории $\mathrm{Set}_*(B)$ и $\mathrm{CSet}_*(B)$. Объекты этих категорий — непустые B-множества и непустые расширенные B-множества соответственно; морфизмы — нерастягивающие и вполне нерастягивающие соответствия. При этом композиция морфизмов — суперпозиция соответствий.

Подкатегории категорий $\mathrm{Set}_*(B)$ и $\mathrm{CSet}_*(B)$, состоящие из тех же объектов и из нерастягивающих отображений, мы обозначим соответственно символами $\mathrm{Set}(B)$ и $\mathrm{CSet}(B)$.

5.8.6. Рассмотрим основные функторы булевозначного анализа, соответствующие изученным в 5.1–5.7 операциям канонического вложения, спуска, подъема и погружения.

Пусть $\mathscr{F}^\wedge$ символизирует отображение из $\mathscr{V}_*$ в $\mathscr{V}_*^{(B)}$, сопоставляющее множеству $x \in \mathbb{V} \setminus \{\mathbb{0}\}$ и соответствию f элементы $x^\wedge \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $f^\wedge \in \mathbb{V}^{(B)}$.

(1) *Отображение* $\mathscr{F}^\wedge$ *— ковариантный функтор из категории* $\mathscr{V}_*$ *в категорию* $\mathscr{V}_*^{(B)}$, *а также из категории* $\mathscr{V}$ *в категорию* $\mathscr{V}^{(B)}$.

$\lhd$ Следует из 5.1.5 и 5.1.6. $\rhd$

Функтор $\mathscr{F}^\wedge$ (а также его ограничение на подкатегорию $\mathscr{V}$) называют *функтором канонического вложения* или же *функтором стандартного имени*.

Обозначим символом $\mathscr{F}^{\downarrow}$ отображение, сопоставляющее каждому непустому $\mathbb{V}^{(B)}$-множеству X его спуск $X{\downarrow}$ и каждому соответствию Φ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ — соответствие $\Phi{\downarrow}$.

(2) *Отображение* $\mathscr{F}^{\downarrow}$ *является ковариантным функтором из категории* $\mathscr{V}_*^{(B)}$ *в категорию* $\mathscr{V}_*$ *(соответственно из категории* $\mathscr{V}^{(B)}$ *в категорию* $\mathscr{V}$*).*

$\lhd$ Следует из 5.3.4 и 5.3.5. $\rhd$

Рассмотрим теперь отображение $\mathscr{F}^{\uparrow}$, сопоставляющее каждому объекту X и каждому морфизму Φ категории $\mathscr{P}_n(\mathbb{V}_*^{(B)})$ их подъемы $X{\uparrow}$ и $\Phi{\uparrow}$ соответственно. Ввиду теоремы 5.5.5 $\mathscr{F}^{\uparrow}$ действует в категорию $\mathscr{V}_*^{(B)}$, но не сохраняет, вообще говоря, композицию.

(3) *Отображение* $\mathscr{F}^{\uparrow}$ *представляет собой ковариантный функтор из категории* $\mathscr{P}_n(\mathbb{V}^{(B)})$ *в категорию* $\mathscr{V}^{(B)}$*.*

$\lhd$ Следует из теоремы 5.5.6. $\rhd$

Пусть $\mathscr{F}^{\sim}$ — функция, сопоставляющая объекту X и морфизму Φ категории $\mathrm{Set}(B)$ элементы $\mathscr{F}^{\sim}(X) := X^{\sim}$ и $\mathscr{F}^{\sim}(\Phi) := \Phi^{\sim}$. Так же, как и $\mathscr{F}^{\uparrow}$ отображение $\mathscr{F}^{\sim}$ действует в категорию $\mathscr{V}_*^{(B)}$, но композицию соответствий, вообще говоря, не сохраняет (см. 5.7.4 (2)).

(4) *Отображение* $\mathscr{F}^{\sim}$ *является ковариантным функтором из категории* $\mathrm{Set}(B)$ *в категорию* $\mathscr{V}^{(B)}$*.*

$\lhd$ Следует из теоремы 5.7.5. $\rhd$

Функторы $\mathscr{F}^{\downarrow}$, $\mathscr{F}^{\uparrow}$ и $\mathscr{F}^{\sim}$, а также их ограничения на подкатегории называют соответственно *функторами спуска, подъема* и *погружения.*

5.8.7. Богатые интерпретационные возможности булевозначного универсума связаны с тем, что он представляет собой булев топос. Рассмотренные выше категории непустых булевых множеств $\mathrm{Set}(B)$, $\mathrm{CSet}(B)$ и $\mathscr{V}^{(B)}$, хотя и удобны в приложениях из-за техники спусков и подъемов, но не располагают в полном объеме топосной структурой ввиду отсутствия в них пустого множества. Ниже рассмотрим категорию булевых множеств B-Set, которая не так удобна при изучении конкретных аналитических задач, но позволяет смотреть на булевозначный универсум как на булев топос.

Пусть B — фиксированная полная булева алгебра и рассмотрим категорию B-Set булевых множеств. Объектами этой категории служат произвольные B-множества. Морфизм B-множеств $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ определим как отображение $f : X \times Y \to B$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $f(x,y) \triangle f(x',y') \leqslant d_X(x,y) \vee d_Y(x',y')$ $(x,x' \in X;\ y,y' \in Y)$;

(2) $d_Y(y,y')^* \leqslant f(x,y) \wedge f(x,y')$ $(x \in X;\ y,y' \in Y)$;

(3) $\bigvee\{f(x,y) :\ y \in Y\} = \mathbb{1}$ $(x \in X)$.

Условие (1) означает, что f — нерастягивающее отображение, и равносильно следующим двум неравенствам:

$$d_X(x,x')^* \wedge f(x,y) \leqslant f(x',y), \quad f(x,y) \wedge d_Y(y,y')^* \leqslant f(x,y').$$

Мы уже знаем, что булево множество X можно мыслить как подмножество $\mathbb{V}^{(B)}$ с булевой метрикой, определяемой по формуле $d_X(x,x') := [\![x \neq x']\!]$ $(x,x' \in X)$, см. 5.7.6. Если иметь в виду это обстоятельство, то определение морфизма становится прозрачным. В самом деле, согласно теореме 4.5.7 найдется такой элемент $\tilde{f} \in \mathbb{V}^{(B)}$, что $f(x,y) = [\![(x,y)^{(B)} \in \tilde{f}]\!]$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$. При этом выполняется

$$[\![t \in \tilde{f}]\!] = \bigvee_{x\in X,\, y\in Y} f(x,y) \wedge [\![t = (x,y)^{(B)}]\!] \quad (t \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Как видно, $[\![\tilde{f} \subset X\!\uparrow \times Y\!\uparrow]\!] = \mathbb{1}$.

Теперь понятно, что первое условие выражает неразличимость равных элементов и представляет собой внешнюю запись соотношения $x = x' \wedge y = y' \wedge (x,y) \in \tilde{f} \to (x',y') \in \tilde{f}$, которое является следствием аксиомы равенства 1.1.10 (3). Второе условие выражает свойство однозначности морфизма $\tilde{f}$. Третье условие означает, что $\mathrm{dom}(\tilde{f}) = X\!\uparrow$, т. е. для каждого $x \in X\!\uparrow$ имеется $\tilde{f}$-образ.

Композицию морфизмов $f : X\times Y \to B$ и $g : Y\times Z \to B$ определим равенством

$$(g \circ f)(x,z) := \bigvee_{y\in Y} f(x,y) \wedge g(y,z) \quad (x \in X,\ y \in Y).$$

Из приведенных выше замечаний видно, что правая часть этого определения есть булева оценка формулы (см. 5.4.2) $(\exists\, y \in Y\!\uparrow)\,(x,y) \in \tilde{f} \wedge (y,z) \in \tilde{g}$, т. е. $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$. Сказанное становится особенно наглядным, если использовать обозначение $[\![f(x) = y]\!] := f(x,y)$.

5.8.8. *Для произвольной полной булевой алгебры B категория булевых множеств B-Set является булевым топосом.*

$\lhd$ В силу 3.4.5 и 3.7.5 (4) нужно лишь убедиться, что в категории B-Set существуют конечный объект, обратные образы и объекты-степени. Напомним, что сама булева алгебра B служит B-множеством с метрикой $d(b,b') := b \triangle b'$, см. 5.6.9.

(1): Конечным объектом $\mathbf{1}$ категории B-Set будет одноэлементное B-множество $\{0\}$ с булевой метрикой, определяемой равенством $d(0,0) = \mathbb{0}$. Единственный морфизм $f : X \times \mathbf{1} \to B$ из B-множества X в $\mathbf{1}$ задается равенством $[\![f(x) = 0]\!] := f(x,0) = \mathbb{1}$ $(x \in X)$.

(2): Символом $S_B(Y)$ обозначим множество всех нерастягивающих отображений из B-множества Y в B, см. 5.6.7. Покажем, что для произвольного B-множества Y множества $\mathrm{Sub}(Y)$ и $S_B(Y)$ биективны (определение $\mathrm{Sub}(Y)$ см. 3.4.1).

В самом деле, морфизм $f : X \to Y$ будет мономорфизмом в том и только в том случае, когда выполнено условие $d_X(x,x')^* \leqslant f(x,y) \wedge f(x',y)$ $(x,x' \in X;\ y \in Y)$. Из последнего следует, что нерастягивающим будет также и отображение $s_f : Y \to B$, определяемое равенством

$$s_f(y) := \bigvee_{x\in X} [\![f(x) = y]\!] \quad (y \in Y).$$

Тем самым, отображение $f \mapsto s_f$ действует из $\mathrm{Sub}(Y)$ в $S_B(Y)$. Наоборот, для нерастягивающего отображения $s : Y \to B$ введем B-множество (X, d_s) формулами

$$X := Y, \quad d_s(x,x') := d_Y(x,x') \vee s(x)^* \vee s(x')^* \quad (x,x' \in X).$$

Нетрудно проверить, что морфизм $f_s : X \to Y$ (в категории B-Set), определяемый правилом $[\![f(x) = y]\!] := s(x) \wedge s(y)$ $(x \in X,\ y \in Y)$, будет мономорфизмом. Кроме того, верно очевидное соотношение $s_{f_s} = s$.

Рассмотрим теперь мономорфизм $f : X \to Y$ и пусть $s_f : Y \to B$ — соответствующее ему нерастягивающее отображение. Построим мономорфизм $f_{s_f} : X(s_f) \to Y$ как указано выше и определим морфизм $g : X \to X(s_f)$ формулой $[\![g(x) = y]\!] := [\![f(x) = y]\!]$. Легко видеть, что g — изоморфизм категории B-Set и $f = f_{s_f} \circ g$.

(3): Возьмем два морфизма $f : X \to Z$ и $g : X \to Z$ категории B-Set и покажем существование обратного образа, см. 3.2.5. На декартовом произведении $U := X \times Y$ определим булеву метрику d_U формулой

$$d_U\big((x, y), (x', y')\big) = d_X(x, x') \vee d_Y(y, y') \vee e_U(x, y) \vee e_U(x', y'),$$

где $e_U(x, y) := \bigvee\{[\![f(x) = z]\!] \wedge [\![g(y) = z]\!] : z \in Z\}$. Подъемы (в смысле 3.2.5) $f' : U \to Y$ и $g' : U \to X$ вдоль g и f соответственно определяются формулами

$$[\![g'(x, y) = x']\!] := d_X(x, x') \vee e_U(x, y), \quad [\![f'(x, y) = y']\!] := d_Y(y, y') \vee e_U(x, y).$$

(4): Определим теперь объект-степень $\mathscr{P}(Y)$ как B-множество $\big(S_B(Y), d_{\mathscr{P}}\big)$, где булева метрика задается формулой

$$d_{\mathscr{P}}(s, t) := \bigwedge_{y \in Y} (s(y) \Leftrightarrow t(y)) \quad (s, t \in S_B(Y)).$$

Как видно, отображение $e : S_B(X) \times X \to B$, определяемое равенством $e(s, x) := s(x)$, будет нерастягивающим, поэтому в соответствии с установленным в (2) ему соответствует мономорфизм f_e, действующий из некоторого объекта E в объект $\mathscr{P}(X) \times X$. Остается положить $\in_X := E$ и $\in := f_e$, см. 3.5.4 (2).

Пусть $\mathbf{B}$ обозначает булеву алгебру B, рассматриваемую как B-множество с метрикой $d(b, b') := b \triangle b'$. Определим морфизм $\top : \mathbf{1} \to \mathbf{B}$ формулой $[\![\top(0) = b]\!] = b$. Если теперь $f : X \to Y$ — произвольный мономорфизм, то характеристический морфизм $\chi_f : Y \to \mathbf{B}$ совпадает с s_f. Таким образом, пара $(\mathbf{B}, \top)$ представляет собой классификатор подобъектов категории B-Set и, в частности, B-Set — булев топос. $\triangleright$

5.9. Взаимосвязи основных функторов

Между основными функторами, описанными в предыдущем параграфе, существуют интересные и весьма полезные в приложениях связи. Изучение последних составляет содержание текущего параграфа.

5.9.1. Напомним, что для произвольного $X \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$ множество $\mathrm{mix}(X)$ состоит из всевозможных перемешиваний $\mathrm{mix}(b_\xi x_\xi)$ семейств $(x_\xi) \subset X$ относительно любых разбиений единицы $(b_\xi) \subset B$ (см. 5.2.5). При этом операция mix действует как взятие циклической оболочки (5.2.6). Распространим mix на экстенсиональные соответствия.

Пусть X и Y — подмножества класса $\mathbb{V}^{(B)}$, а Φ — экстенсиональное соответствие из X в Y. Существует единственное вполне экстенсиональное соответствие Ψ из $\mathrm{mix}(X)$ в $\mathrm{mix}(Y)$, для которого

$$\Psi(x) = \mathrm{mix}(\Phi(x)) \quad (x \in \mathrm{dom}(\Phi)).$$

$\lhd$ Действительно, следует положить $\Psi := \Phi{\uparrow}{\downarrow}$ и воспользоваться утверждениями 5.5.7 (1) и 5.6.7 (2). Из 5.3.5 и 5.4.3 (1) видно, что $\mathrm{Gr}(\Psi) = \mathrm{mix}(\mathrm{Gr}(\Phi))$. $\rhd$

Положим по определению $\mathrm{mix}(\Phi) := \Psi$. Если Θ — еще одно экстенсиональное соответствие и $\mathrm{dom}(\Theta) \subset Y$, то в силу 5.3.5 (3) и 5.4.4 (8) будет $\mathrm{mix}(\Theta \circ \Phi) = \mathrm{mix}(\Theta) \circ \mathrm{mix}(\Phi)$ тогда и только тогда, когда $(\Theta \circ \Phi){\uparrow} = \Theta{\uparrow} \circ \Phi{\uparrow}$. Кроме того, очевидно, $\mathrm{mix}(I_X) = I_{\mathrm{mix}(X)}$.

5.9.2. Возьмем непустое множество X. Обозначим символом $B_0(X)$ множество всех разбиений единицы в B вида $(b_x = b(x))_{x\in X}$:

$$b \in B_0(X) \leftrightarrow \big(b \in B^X \wedge (\forall\, x \in X)(\forall\, y \in X)((x \neq y) \to b(x) \wedge b(y) = 0)\big).$$

Элементу $y \in X$ поставим в соответствие разбиение единицы $\imath y := \imath_X y := (b_x)_{x\in X}$, где $b_x = \mathbb{1}$ при $x = y$ и $b_x = 0$ при $x \neq y$. Понятно, что $\imath_X$ является инъекцией из X в $B_0(X)$. Взяв u, $v \in B_0(X)$, положим

$$d(u, v) := \bigwedge\{u(x)^* \vee v(x)^* \,:\, x \in X\}.$$

Нетрудно проверить, что d есть B-метрика на $B_0(X)$. Более того, $(B_0(X), d)$ — расширенное B-множество. Последнее можно установить по существу теми же рассуждениями, что и в 5.2.6. Итак, $B_0(\,\cdot\,)$ — отображение из $\mathbb{V}$ в $\mathrm{CSet}(B)$. Распространим это отображение на соответствия.

Возьмем соответствие $\Phi := (F, X, Y)$. Положим соответствие $B_0(\Phi) := (G, B_0(X), B_0(Y))$, где

$$G := \big\{(u, v) \in B_0(X) \times B_0(Y) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall\, x \in X)(\forall\, y \in Y)\big(u(x) \wedge v(y) \neq 0 \to (x, y) \in F\big)\big\}.$$

Если Φ однозначно, то и $B_0(\Phi)$ однозначно.

Непосредственно из определений выводится, что

$$B_0(I_X) = I_{B_0(X)}, \quad B_0(\Psi \circ \Phi) = B_0(\Psi) \circ B_0(\Phi), \quad \Phi = \imath_Y^{-1} \circ B_0(\Phi) \circ \imath_X.$$

Из сказанного следует, что отображение $B_0(\,\cdot\,)$ является ковариантным функтором из $\mathscr{V}_*$ в $\mathrm{CSet}_*(B)$.

5.9.3. Некоторые взаимосвязи между основными операциями булевозначного анализа приводились ранее в форме правил сокращения стрелок. Придадим этим правилам функторные формулировки.

(1) *Функтор спуска $\mathscr{F}^{\downarrow}$ и функтор подъема $\mathscr{F}^{\uparrow}$ устанавливают изоморфизм между категориями $\mathscr{V}^{(B)}$ и $\mathscr{P}_{cn}(\mathbb{V}^{(B)})$. Иначе говоря, $\mathscr{F}^{\uparrow} \circ \mathscr{F}^{\downarrow}$ и $\mathscr{F}^{\downarrow} \circ \mathscr{F}^{\uparrow}$ совпадают с тождественными функторами на $\mathscr{V}^{(B)}$ и $\mathscr{P}_{cn}(\mathbb{V}^{(B)})$ соответственно.*

$\lhd$ Тождественность функтора $\mathscr{F}^{\uparrow} \circ \mathscr{F}^{\downarrow}$ легко вытекает из правил «спуск-подъем» 5.4.3 (2) и 5.5.7 (3), а функтора $\mathscr{F}^{\downarrow} \circ \mathscr{F}^{\uparrow}$ — из правил «подъем-спуск» 5.4.3 (1) и 5.5.7 (1). $\rhd$

(2) *Функтор $\mathrm{mix} : \mathscr{P}_n(\mathbb{V}^{(B)}) \to \mathscr{P}_{cn}(\mathbb{V}^{(B)})$ совпадает с суперпозицией $\mathscr{F}^{\uparrow} \circ \mathscr{F}^{\downarrow}$ и является $\mathscr{P}_{cn}(\mathbb{V}^{(B)})$-рефлектором категории $\mathscr{P}_n(\mathbb{V}^{(B)})$. В частности, $\mathscr{P}_{cn}(\mathbb{V}^{(B)})$ — рефлективная подкатегория в $\mathscr{P}_n(\mathbb{V}^{(B)})$.*

$\lhd$ Равенство $\mathrm{mix} := \mathscr{F}^{\uparrow} \circ \mathscr{F}^{\downarrow}$ вытекает из 5.4.3 (1) и 5.5.7 (2). Возьмем непустые множества A, $C \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$, и пусть C циклично. Тогда всякое экстенсиональное отображение $g : A \to C$ допускает единственное экстенсиональное распространение $\bar{g} = g{\uparrow}{\downarrow} : \operatorname{mix}(A) \to C$ (см. 5.3.4, 5.5.6 и 5.5.7 (2)). Следовательно, отображение ограничения $\theta_{A,C} : h \mapsto h \restriction A$ служит биекцией $\mathscr{P}_{cn}(\mathbb{V}^{(B)})$ $(\operatorname{mix}(A), C)$ на $\mathscr{P}_n(\mathbb{V}^{(B)})(A, C)$. Семейство отображений $\theta_{A,C}$ мы обозначим через θ. Ясно, что θ есть сопряжение от mix к функтору тождественного вложения $\mathscr{P}_{cn}(\mathbb{V}^{(B)})$ в $\mathscr{P}_n(\mathbb{V}^{(B)})$. В самом деле, если A', $C' \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$ и C' циклично, то для любых экстенсиональных отображений $f : \operatorname{mix} A \to C$, $g : A' \to A$, $h : C \to C'$ будет $(f \circ \operatorname{mix}(g)) \restriction A' = (f \restriction A) \circ g$. Тем более верно

$$(h \circ (f \circ \operatorname{mix}(g))) \restriction A' = h \circ (f \restriction A) \circ g,$$

или, что то же,

$$\theta_{A',C'}(h \circ f \circ \operatorname{mix}(g)) = h \circ \theta_{A,C}(f) \circ g. \ \rhd$$

(3) *Суперпозиция функтора канонического вложения и функтора спуска естественно изоморфна функтору B_0; символически $\mathscr{F}^{\downarrow} \circ \mathscr{F}^{\wedge} \simeq B_0$.*

$\lhd$ Для любого множества X отображение

$$\theta_X : (b_x)_{x \in X} \mapsto \operatorname*{mix}_{x \in X}(b_x x^{\wedge}) \quad ((b_x)_{x \in X} \in B_0(X))$$

является биекцией $B_0(X)$ на $X^{\wedge}{\downarrow}$. Отображение $\theta : X \mapsto \theta_X$ $(X \in \operatorname{Ob} \mathscr{V}_*)$ есть изоморфизм функторов B_0 и $\mathscr{F}{\downarrow} \circ \mathscr{F}^{\wedge}$. Для этого достаточно заметить, что при $u \in B_0(X)$ и $v \in B_0(Y)$, $a := \theta_X(u)$ и $b := \theta_Y(v)$ будет $(a, b) \in \Phi^{\wedge}{\downarrow}$ в том и только в том случае, если $(x, y) \in \Phi$ всякий раз, когда $u(x) \wedge v(x) \neq 0$. $\rhd$

5.9.4. Теорема. *Функтор спуска $\mathscr{F}^{\downarrow}$ является правым сопряженным к функтору погружения $\mathscr{F}^{\sim}$. При этом модифицированный спуск $\overline{\downarrow}$ есть сопряжение, а модифицированный подъем $\underline{\uparrow}$ — косопряжение.*

$\lhd$ Рассмотрим функторы $\mathscr{H}^{\sim}$ и $\mathscr{H}^{\downarrow}$ из категории $\operatorname{Set}(B) \times \mathscr{V}^{(B)}$ в категорию $\mathscr{V}$, определяемые соотношениями

$$\mathscr{H}^{\sim}(X, Y) := \mathscr{V}^{(B)}(X^{\sim}, Y), \quad \mathscr{H}^{\downarrow}(X, Y) := \operatorname{Set}(B)(X, Y{\downarrow});$$
$$\mathscr{H}^{\sim}(f, g) := \Phi' \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \Phi' = g \circ \Phi \circ f^{\sim}; \quad \mathscr{H}^{\downarrow}(f, g) := g{\downarrow} \circ \Psi \circ f,$$

где $X \in \operatorname{Ob} \operatorname{Set}(B)$, $Y \in \operatorname{Ob} \mathscr{V}^{(B)}$, $f \in \operatorname{Set}(B)(X_1, X)$, $g \in \mathscr{V}^{(B)}(Y, Y_1)$, $\Phi \in \mathscr{H}^{\sim}(X, Y)$, $\Psi \in \mathscr{H}^{\downarrow}(X, Y)$.

Требуемое утверждение состоит в том, что модифицированный спуск $\overline{\downarrow}$ — это изоморфизм функторов $\mathscr{H}^{\sim}$ и $\mathscr{H}^{\downarrow}$. Ввиду теоремы 5.7.8 нужно лишь установить, что $\overline{\downarrow}$ — функторный морфизм функтора $\mathscr{H}^{\sim}$ в функтор $\mathscr{H}^{\downarrow}$ или, другими словами, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}^{\sim}(X, Y) \arrow[r, "\overline{\downarrow}"] \arrow[d, "\mathscr{H}^{\sim}(f,g)"'] & \mathscr{H}^{\downarrow}(X, Y) \arrow[d, "\mathscr{H}^{\downarrow}(f,g)"] \\
\mathscr{H}^{\sim}(X_1, Y_1) \arrow[r, "\overline{\downarrow}"'] & \mathscr{H}^{\downarrow}(X_1, Y_1)
\end{tikzcd}$$

для любых указанных выше X, X_1, Y, Y_1, f и g. Последнее равносильно справедливости равенства $(\mathscr{H}(f, g)\Phi)\overline{\downarrow} = \mathscr{H}^{\downarrow}(f, g)(\Phi\overline{\downarrow})$ при каждом $\Phi \in \mathscr{H}^{\sim}(X, Y)$, или, учитывая определение $\mathscr{H}^{\sim}$ и $\mathscr{H}^{\downarrow}$, совместности условий

$$\Psi \in \mathscr{H}^{\downarrow}(X,Y), \quad [\![\Psi = g\circ\Phi\circ f^{\sim}]\!] = \mathbb{1}, \quad (g{\downarrow})\circ(\Phi{\updownarrow})\circ f = \Psi{\updownarrow}.$$

Последние выполнены в том и только в том случае, если

$$[\![g\circ\Phi\circ f^{\sim} = (g{\downarrow}\circ(\Phi{\updownarrow})\circ f){\updownarrow}]\!] = \mathbb{1}.$$

Однако, как видно из правил сокращения стрелок и определений модифицированных спусков и подъемов, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ имеют место равенства

$$(g{\downarrow}\circ(\Phi{\updownarrow})\circ f){\updownarrow} = (g{\downarrow}\circ(\Phi{\downarrow})\circ\imath\circ f\circ\imath^{-1}){\uparrow} =$$
$$= g{\downarrow}{\uparrow}\circ(\Phi{\downarrow}{\uparrow})\circ(\imath\circ f\circ\imath^{-1}){\uparrow} = g\circ\Phi\circ(\imath\circ f\circ\imath^{-1}){\uparrow}.$$

Осталось заметить, что $[\![(\imath\circ f\circ\imath^{-1}){\uparrow} = f^{\sim}]\!] = \mathbb{1}$, и теорема доказана. $\triangleright$

5.9.5. Приведем несколько важных следствий теоремы 5.7.6 (сохраняя принятые в ней посылки и обозначения).

(1) *Если (X, d_X) — расширенное B-множество, то $\imath_X$ — биекция между X и X'.*

$\triangleleft$ Нужно только заметить, что в случае, если $x = \operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, для разбиения единицы (b_ξ) и семейства $(x_\xi)\subset X$ будет $\imath_X x = \operatorname{mix}(b_\xi \imath_X x_\xi)$. $\triangleright$

(2) *Если $X \in \operatorname{Ob}\mathscr{V}^{(B)}$, то существует $\jmath_X \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $[\![\jmath_X$ — изоморфизм (в категории $\mathscr{V}^{(B)}$) X на $X{\downarrow}^{\sim}]\!] = \mathbb{1}$.*

$\triangleleft$ В самом деле, если $Y := X{\downarrow}$, то, полагая $\jmath_X := \imath_Y{\uparrow}$, получим, что $\jmath_X$ — изоморфизм между $Y{\uparrow} = X$ и $Y^{\sim} = X{\downarrow}^{\sim}$, ибо $\imath_Y$ есть изоморфизм между Y и $Y^{\sim}{\downarrow}$. $\triangleright$

(3) *Если X и Y — расширенные B-множества, а Φ — соответствие из $X^{\sim}$ в $Y^{\sim}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то существует единственное вполне нерастягивающее соответствие Ψ из X в Y такое, что $\Psi^{\sim} = \Phi$.*

$\triangleleft$ Действительно, $\Phi' := \Phi{\downarrow}$ — вполне экстенсиональное соответствие из $X' := X^{\sim}{\downarrow}$ в $Y' := Y^{\sim}{\downarrow}$. Значит, $\Psi := \imath_Y^{-1}\circ\Phi'\circ\imath_X$ — вполне нерастягивающее соответствие из X в Y. Если $\Psi' := \Psi^{\sim}{\downarrow}$, то по 5.7.6 (3) будет $\imath_Y^{-1}\circ\Psi\circ\imath_X = \imath_Y^{-1}\circ\Psi'\circ\imath_X$. Принимая во внимание (1), $\Psi = \Psi'$. Отсюда $\Phi = \Phi'{\uparrow} = \Psi'{\uparrow} = \Psi{\uparrow}$. $\triangleright$

(4) *Если X и Y — расширенные B-множества, то отображение $\Phi \mapsto \Phi^{\sim}$ задает биекцию между множествами морфизмов $\mathrm{CSet}_*(B)(X,Y)$ и $\mathscr{V}_*^{(B)}(X^{\sim}, Y^{\sim})$.*

5.9.6. *Для всякого B-множества (X, d_X) существует тройка $(X', d'_X, \imath_X)$, называемая B-расширением (X, d_X) и удовлетворяющая условиям*:

(1) *(X', d'_X) — расширенное B-множество, а $\imath_X$ — изометрическое отображение X в X';*

(2) $X' = \operatorname{mix}(\operatorname{im}(\imath_X))$;

(3) *для любого нерастягивающего соответствия Φ из X в расширенное B-множество Y существует единственное вполне нерастягивающее соответствие Φ' из X' в Y такое, что $\operatorname{dom}(\Phi') = \operatorname{mix}(\imath(\operatorname{dom}(\Phi)))$ и*

$$\operatorname{mix}(\Phi(x)) = \Phi(\imath_X x) \quad (x \in \operatorname{dom}(\Phi));$$

(4) *если тройка $(X'', d''_X, \imath'_X)$ удовлетворяет (1)–(3), то существует B-изоморфизм $\imath$ между X' и X'', для которого $\imath\circ\imath_X = \imath'_X$.*

$\lhd$ Для доказательства нужно в 5.7.6 (3) взять в качестве Y расширенное B-множество и воспользоваться следствием 5.9.5 (1). $\rhd$

5.9.7. *Пусть X и Y — произвольные B-множества и Φ — вполне нерастягивающее соответствие из X в Y. Тогда для любого множества $A \subset \operatorname{dom}(\Phi)$ будет*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \pi_\Phi(A)^\sim = \pi_{\Phi^\sim}(A^\sim).$$

$\lhd$ Заметим, что соотношения $(\forall\, a \in A^\wedge)(y \in \Phi^\sim(\pi_X a))$ и $y \in \pi_{\Phi^\sim}(A^\sim)$ равносильны, так как $A^\sim = \pi_X(A^\wedge)$. Пользуясь теоремой 5.7.4 и полной нерастягиваемостью Φ, можно для $y \in \imath_Y(Y)$ написать эквивалентности

$$y \in \pi_{\Phi^\sim}(A^\sim){\downarrow} \leftrightarrow \bigwedge\{[\![y \in \Phi^\sim(\pi_X a^\wedge)]\!] : a \in A\} = \mathbb{1} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, a \in A)[\![y \in \pi_Y(\Phi(a)^\wedge)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow (\forall\, a \in A)(y \in \Phi(a)^\sim{\downarrow}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, a \in A) y \in \operatorname{mix}(\imath_Y(\Phi(a))) \leftrightarrow (\forall\, a \in A)\, y \in \imath_Y(\operatorname{mix}(\Phi(a))) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow y \in \bigcap_{a \in A} \imath_A(\Phi(a)) \leftrightarrow y \in \imath_Y(\pi_\Phi(A)).$$

Следовательно, $\pi_{\Phi^\sim}(A^\sim) = \imath_Y(\pi_\Phi(A)){\uparrow} = \pi_\Phi(A)^\sim$. $\rhd$

5.9.8. Теорема. *Функторы $\mathscr{F}^\sim$ и $\mathscr{F}^\downarrow$ устанавливают эквивалентность категорий $\mathrm{CSet}_*(B)$ и $\mathscr{V}_*^{(B)}$. В частности, $\mathscr{F}^\sim$ и $\mathscr{F}^\downarrow$ — сопряженные друг к другу полные унивалентные функторы, сохраняющие индуктивные и проективные пределы (на указанных категориях).*

$\lhd$ Достаточно обосновать справедливость следующих двух утверждений:

(1) функтор $\mathscr{F}^\downarrow \circ \mathscr{F}^\sim$ естественно изоморфен тождественному функтору на $\mathrm{CSet}_*(B)$, а изоморфизм осуществляется отображениями $\imath_X : X \mapsto X'$ $(X \in \mathrm{CSet}_*(B))$;

(2) функтор $\mathscr{F}^\sim \circ \mathscr{F}^\downarrow$ естественно изоморфен тождественному функтору на $\mathscr{V}_*^{(B)}$; изоморфизм задается отображениями $\jmath_X \in \mathscr{V}^{(B)}(X, X{\downarrow}^\sim)$ $(X \in \mathscr{V}_*^{(B)})$.

Для доказательства (1) достаточно воспользоваться следствием 5.9.5 (1) и заметить, что ввиду 5.7.6 (3) при X, $Y \in \operatorname{Ob}\mathrm{CSet}_*(B)$ и $\Phi \in \mathrm{CSet}_*(B)(X, Y)$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\imath_X"] \arrow[d, "\Phi"'] & X^\sim{\downarrow} \arrow[d, "\Phi^\sim{\downarrow}"] \\ Y \arrow[r, "\imath_Y"'] & Y^\sim{\downarrow} \end{tikzcd}$$

Далее, из 5.9.5 (2, 3) вытекает, что для любых X, $Y \in \operatorname{Ob}\mathscr{V}_*^{(B)}$ и $\Phi \in \mathscr{V}_*^{(B)}(X, Y)$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\jmath_X"] \arrow[d, "\Phi"'] & X{\downarrow}^\sim \arrow[d, "\Phi{\downarrow}^\sim"] \\ Y \arrow[r, "\jmath_Y"'] & Y{\downarrow}^\sim \end{tikzcd}$$

коммутативна. Отсюда вытекает (2). $\rhd$

5.9.9. *Для любых* $X \in \operatorname{Ob}\mathrm{CSet}_*(B)$ *и* $Y \in \operatorname{Ob}\mathscr{V}_*^{(B)}$ *выполнено:* $(\jmath_Y)\downarrow = \imath_{Y\downarrow}$, $\mathbb{V}^{(B)} \models (\imath_X)^{\sim} = \jmath_{X^{\sim}}$.

$\lhd$ Первое равенство вытекает непосредственно из определений: $(\jmath_Y)\downarrow = (\imath_{Y\downarrow})\uparrow\downarrow = \imath_{Y\downarrow}$. Для доказательства второго положим

$$b := [\![(\imath_X)^{\sim} = \jmath_{X^{\sim}}]\!], \quad b_x := [\![\imath_{X^{\sim}}\pi_X x^{\wedge} = \jmath_{X^{\sim}}\pi_X x^{\wedge}]\!] \quad (x \in X).$$

Заметим, что $b = \bigwedge\{b_x : x \in X\}$. Поэтому нужно показать, что $b_x = \mathbb{1}$ для каждого $x \in X$. Однако если $x \in X$, то по 5.7.4 и по определению $\jmath_X$ имеем $b_x = [\![\pi_{X^{\sim}\downarrow}(\imath_X x)^{\wedge} = (\imath_{X^{\sim}\downarrow})\uparrow \circ \pi_X(x^{\wedge})]\!]$. Наконец, привлекая равенства

$$[\![\pi_X x^{\wedge} = \imath_X x]\!] = [\![\pi_{X^{\sim}\downarrow} y^{\wedge} = \imath_{X^{\sim}\downarrow} y]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X, y \in Y^{\sim}\downarrow),$$

справедливые ввиду определения $\imath_X$ из доказательства 5.7.6 (1), и полагая $y = \imath_X x$, получим

$$b_x = [\![\pi_{X^{\sim}\downarrow}(\imath_X x)^{\wedge} = \imath_{X^{\sim}\downarrow}(\imath_X x)]\!] = \mathbb{1},$$

что и требовалось. $\rhd$

5.10. Комментарии

5.10.1. (1) С кардиналами внутри модели $\mathbb{V}^{(B)}$ дело обстоит не так просто, как с ординалами (ср. 5.1.7). Например, ординал может потерять свойство быть кардиналом при каноническом вложении в $\mathbb{V}^{(B)}$. Более того, бесконечные кардиналы могут «склеиваться», т. е. стандартные имена двух бесконечных кардиналов могут иметь одну и ту же мощность внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Отметим, что кардиналы в $\mathbb{V}^{(B)}$ будут вести себя достаточно разумно, если потребовать от B выполнения условия счетности антицепей (подробности см. в главе 9).

(2) Свойства конструктивных множеств (см. 1.6.10) внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ похожи на свойства ординалов. Именно, если $L(x)$ — формула, утверждающая, что x — конструктивное множество, а $\mathbb{L}$ — универсум конструктивных множеств, то

$$[\![L(u)]\!] = \bigvee\{[\![u = v]\!] : \ v \in \mathbb{L}\} \quad (u \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

При этом сохраняют силу утверждения 5.1.7 (2–4), если заменить в последних Ord на L (см. книги Дж. Белла [191], Т. Йеха [64], Г. Такеути и У. М. Заринга [394]).

(3) Ввиду 5.1.9 может показаться, что в 5.1.10 (2) имеет место равенство, т. е. $[\![\mathscr{P}(X^{\wedge}) = \mathscr{P}(X)^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}$. Однако это не так: если B — алгебра регулярных замкнутых подмножеств канторова ω-дисконтинуума, то $[\![\mathscr{P}(\omega^{\wedge}) \neq \mathscr{P}(\omega)^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}$.

5.10.2. (1) Двойной спуск 5.2.8 возникает и в связи с другими теоретико-множественными операциями. Так, например, если $\prod X$ — класс всех отображений f из X в $\bigcup X$ таких, что $f(x) \in x$ для любого $x \in X$, а $\sum X := \bigcup\{x \times \{x\} : x \in X\}$, то для каждого $X \in \mathbb{V}^{(B)}$ имеются естественные биекции

$$\Big(\prod X\Big)\downarrow\downarrow = \prod(X\downarrow\downarrow), \quad \Big(\sum X\Big)\downarrow = \sum(X\downarrow\downarrow).$$

В выражении $(\prod X)\downarrow\downarrow$ повторный спуск — спуск отображений.

(2) Очевидно, что в 5.2.9 (3) включение строгое (если $B \neq 2$). Отметим также, что $\mathscr{P}(X)\downarrow$ — алгебраическая система сигнатуры $(\vee, \wedge, *, 0, 1)$. Можно показать, что это полная булева алгебра, являющаяся пополнением множества $\mathscr{P}(X)\downarrow\downarrow$, упорядоченного по включению в следующем смысле. Существует сохраняющая порядок инъекция $\imath : \mathscr{P}(X)\downarrow\downarrow \to \mathscr{P}(X)\downarrow$, для которой при $a \in \mathscr{P}(X)\downarrow$, $a < \mathbb{1}$, найдется $b \in \mathscr{P}(X)\downarrow\downarrow$, так что будет $a \leqslant \imath(b) < \mathbb{1}$. Положение здесь вполне аналогично конструкции пополнения булевой алгебры (см. 9.3.1, 9.3.2, а также книги Т. Йеха [64] и Р. Сикорского [160]).

5.10.3. (1) Как уже было отмечено в 5.3.2, общий символ $\downarrow$ используется для обозначения различных, но имеющих общую природу операций. Таким образом, запись $X\downarrow$ может быть осмыслена однозначно лишь при дополнительной информации о том, какой именно объект X спускается. Ситуация здесь вполне аналогична употреблению знака $+$ для записи весьма произвольных групповых операций: сложение чисел, векторов, линейных операторов и т. п. Точное толкование всегда легко восстанавливается по контексту.

(2) При доказательстве 5.3.3 (8) было установлено, в частности, что для каждого $X \in \mathbb{V}^{(B)}$ отображение $\updownarrow$ осуществляет биекцию между множествами $\mathscr{V}(n, X\downarrow)$ и $\mathscr{V}^{(B)}(n^\wedge, X)$. В действительности этот факт носит весьма общий характер и отражает глубокую взаимосвязь операций спуска и канонического вложения. Подробнее об этом см. в 5.9.

5.10.4. (1) Формулы 5.4.2 и соответствующие им аналоги из 4.6.8 являются частными случаями следующих правил. Если φ и ψ — предикативные формулы с $n{+}1$ и $m{+}1$ свободными переменными соответственно, а $X_1, \dots, X_n$ и $Y_1, \dots, Y_m$ — некоторые $\mathbb{V}^{(B)}$-классы, то

$$[\![(\forall\, u)(\varphi(u, \overline{X}) \to \psi(u, \overline{Y})]\!] = \bigwedge\{[\![\psi(u, \overline{X})]\!] : x \in A\},$$

$$[\![(\exists\, u)(\varphi(u, \overline{X}) \wedge \psi(u, \overline{Y})]\!] = \bigvee\{[\![\psi(u, \overline{X})]\!] : x \in A\},$$

где A — любой подкласс класса $\mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющий условию

$$\operatorname{mix}(A) = \big\{x \in \mathbb{V}^{(B)} :\ [\![\varphi(x, \overline{X})]\!] = \mathbb{1}\big\} \neq \varnothing \quad (\overline{X} = (X_1, \dots, X_n)).$$

(2) Операцией подъема мы уже неявно пользовались в 4.4. Поясним этот момент. Пусть x — подмножество неотделимого универсума, а $x' \subset \mathbb{V}^{(B)}$ — его образ при факторизации (см. 4.5.2, 4.5.7): $x' := \pi``x := \{\pi t : t \in x\}$. Определим формулами $\operatorname{dom}(y) := x$, $\operatorname{im}(y) := \{\mathbb{1}\}$ элемент y неотделимого универсума. Тогда $[\![\pi y = x'\uparrow]\!] = \mathbb{1}$. В самом деле,

$$[\![\pi t \in x'\uparrow]\!] = \bigvee_{u \in x'} [\![\pi t = u]\!] = \bigvee_{u \in x} [\![\pi t = \pi u]\!] =$$

$$= \bigvee_{u \in \operatorname{dom}(y)} y(u) \wedge [\![t = u]\!] = [\![t \in y]\!] = [\![\pi t \in \pi y]\!].$$

Таким образом, элемент y из 4.4.5 (2), элементы $\{x\}^B$ и $\{x, y\}^B$ из 4.4.8, f из 4.4.11 (1–3) — все это подъемы в неотделимом универсуме. Кроме того, $X^\wedge$ есть подъем класса $\{x^\wedge : x \in X\}$ (см. 5.4.1 (1)).

5.10.5. (1) Употребление символа $\uparrow$ для обозначения разного рода подъемов аналогично ситуации с обозначением спусков. Поэтому здесь уместны все предостережения и соглашения, высказанные в 5.3.2 и 5.10.3 (1).

Терминология, использующая «подъемы и спуски», была предложена С. С. Кутателадзе [123, 124] в память об М. К. Эшере (о котором см., в частности, книги Дж. Л. Лохера [293] и Д. Р. Хофштедтера [248]).

(2) Операции канонического вложения и подъема действуют в один и тот же класс $\mathbb{V}^{(B)}$ и во многом напоминают друг друга (ср., например, 4.6.8 и 5.4.1 (1), а также формулы из 5.4.2 с аналогичными формулами из 4.6.8, 5.4.3 и 5.1.1 (1), 5.4.4 и 5.1.4, 5.5.5 и 5.1.5). Более глубокая аналогия уже была отмечена в 5.7.

(3) В утверждениях 5.5.5 (1, 2) нельзя опустить условие общего положения. Соответствующие контрпримеры легко строить, используя следующее соображение. Допустим, что $A \subset X$ и Φ — соответствие из X в X с графиком $\{(x, x) : x \in M\}$. Если $A \subset X$, причем $A \cap M = \varnothing$, но $A \cap \mathrm{mix}(M) \neq \varnothing$, то $\Phi(A) = \varnothing$ и $[\![\Phi(A){\uparrow} = \varnothing]\!] = \mathbb{1}$. С другой стороны, $[\![\Phi{\uparrow}(A{\uparrow}) \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1}$, ибо для $z \in A \cap \mathrm{mix}(M)$ будет $[\![z \in \Phi{\uparrow}(A{\uparrow})]\!] = \mathbb{1}$.

(4) Отметим, что в нескольких ранних публикациях [60, 70, 71] аналоги вышеуказанных утверждений сформулированы в неявном предположении, что $A \subset \mathrm{dom}(\Phi)$ или $\mathrm{im}(\Phi) \subset \mathrm{dom}(\Psi)$. Отсутствие явных оговорок такого рода может привести к недоразумениям при работе с соответствиями общего вида. Однако для всюду определенных соответствий и, в частности отображений, никакой опасности нет. Высказанные замечания относятся и к правилам подсчета поляр (см. 5.5.7 (6)).

5.10.6. (1) Концепция булевой метрики появилась в начале 1950-х годов при изучении различных «расстояний» на абстрактных множествах со значениями в упорядоченных системах (см., например, у Л. М. Блюменталя [197], П. С. Рема [356] и Д. Эллиса [220]).

Какой-либо особо богатой геометрии, связанной с этой концепцией, обнаружено не было, чем, по-видимому, и объясняется малая популярность B-метрик в последующие годы. Причину такого курьеза можно усмотреть отчасти с помощью теорем 5.7.4 и 5.7.6.

Геометрия булевых метрик весьма содержательна и интересна в сочетании с топологическими или функционально-аналитическими структурами. Наличие должным образом согласованной B-метрики указывает на целесообразность изучения рассматриваемой структуры с помощью булевозначных моделей.

(2) Отображение $[\![\,\cdot = \cdot\,]\!] : X^2 \to B$ называют *булевозначным равенством* (*отношением равенства*), если оно удовлетворяет условиям 4.2.8 (1, 3, 4). Такие отображения широко используются при булевозначной интерпретации теорий первого порядка (см. сборник обзоров [225], изданный М. Фурманом, К. Малвеем и Д. Скоттом).

Легко видеть, что понятие булевозначного равенства есть просто «зеркальное отражение» идеи булевой метрики, ибо условия 4.2.8 (1, 3, 4) выполнены в том и только в том случае, если отображение $(x, y) \mapsto [\![x = y]\!]^*$ есть булева метрика. В этом контексте идея булевой метрики весьма плодотворна.

(3) Принятые в этом параграфе определения 5.6.1 мотивированы тем, что рассматриваемые в анализе структуры обладают некоторой естественной B-(полу)метрикой. В то же время B-значное равенство приходится здесь вводить достаточно искусственно.

5.10.7. (1) Погружение произвольного булева множества и нерастягивающего отображения в булевозначный универсум (теоремы 5.7.4 и 5.7.6) осуществлено А. Г. Кусраевым [93, 95]. В основу определения 5.7.2 положен метод Р. Соловея и

С. Тенненбаума [379], примененный ими при погружении полных булевых алгебр в булевозначный универсум.

(2) Можно показать, что справедливо утверждение, обратное к 5.7.1. Именно, если ψ — ультрафильтр на $B^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то отображение $\rho_\psi : B \to B$, определенное формулой $\rho_\psi(b) := [\![b^\wedge \in \psi]\!]$, есть автоморфизм $B^\wedge$. При этом $\rho_{\psi_\rho} = \rho$ и $[\![\psi_{\rho_\psi} = \psi]\!] = \mathbb{1}$.

(3) По поводу 5.7.4 (1, 2) можно высказать те же замечания, что и в 5.5.5 (см. 5.10.5 (4)).

5.10.8. (1) Функтор погружения введен и изучен А. Г. Кусраевым [95]. Основные результаты параграфа 5.7 (теоремы 5.7.4–5.7.6, 5.7.8) показывают, что при работе с B-структурами можно считать их структурированными подмножествами булевозначного универсума и фактически вместо погружения работать с подъемами и спусками.

(2) Имеется гейтинговозначный вариант категории B-Set, играющей важную роль в интерпретации интуиционистских теорий. Об этом можно прочитать у Р. Голдблатта [40], Г. Такеути и С. Титани [391].

(3) Пусть $\mathscr{S}et$ — категория множеств и отображений внутри булевозначной модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Можно показать, что спуск этой категории эквивалентен категории B-Set. Более того, утверждение 5.8.8 вытекает из следующего более общего факта: если $\mathscr{E}$ — топос в модели $\mathbb{V}^{(B)}$, то его спуск $\mathscr{E}{\downarrow}$ — также топос.

5.10.9. Взаимосвязи, существующие между основными функторами булевозначного анализа, давно и плодотворно используются в приложениях. Трудно здесь выделить вклад отдельных авторов, кроме основополагающих работ Д. Скотта, Р. Соловея и С. Тенненбаума. Материал параграфа 5.9 взят из работ А. Г. Кусраева [93, 95, 97].

Глава 6
Функциональное представление булевозначного универсума

К числу наиболее привычных объектов исследования функционального анализа относятся разнообразные пространства функций. Функциональное представление абстрактных пространств и операторов — один из традиционных функционально-аналитических методов исследования. В этой связи возникает естественное желание построить функциональный аналог булевозначного универсума, т. е. иметь дело не с абстрактной булевозначной системой, а с моделью, элементами которой являются функции, а основные логические операции вычисляются «поточечно». Эту мысль можно проиллюстрировать на следующем простом примере: рассмотрим класс $\mathbb{V}^{(Q)}$ всех функций, определенных на фиксированном непустом множестве Q и действующих в класс $\mathbb{V}$ всех множеств, а в качестве значений истинности в модели $\mathbb{V}^{(Q)}$ возьмем всевозможные подмножества Q; при этом истинность $[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!]$ высказывания $\varphi(t_1,\dots,t_n)$ на функциях $u_1,\dots,u_n\in\mathbb{V}^{(Q)}$ можно определить формулой:

$$[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!]=\big\{q\in Q:\ \varphi\big(u_1(q),\dots,u_n(q)\big)\big\}.$$

В настоящей главе приводится вариант решения поставленной задачи. С этой целью мы вводим и исследуем понятие непрерывного поливерсума, представляющего собой непрерывное расслоение моделей теории множеств. Оказывается, что класс непрерывных сечений поливерсума является булевозначной системой, удовлетворяющей всем основным принципам булевозначного анализа. Более того, любая булевозначная система может быть представлена в виде класса сечений подходящего непрерывного поливерсума.

6.1. Аксиоматика булевозначного универсума

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые взаимоотношения между основными принципами булевозначного универсума и дано аксиоматическое определение булевозначной модели.

6.1.1. Пусть B — полная булева алгебра. Тройку $(\mathfrak{U},[\![\,\cdot=\cdot\,]\!],[\![\,\cdot\in\cdot\,]\!])$ называют *булевозначной системой* над B (или *B-значной системой*), если классы $[\![\,\cdot=\cdot\,]\!]$ и $[\![\,\cdot\in\cdot\,]\!]$ являются класс-функциями из $\mathfrak{U}\times\mathfrak{U}$ в B, обладающими следующими свойствами:

(1) $[\![u=u]\!]=\mathbb{1}$;
(2) $[\![u=v]\!]=[\![v=u]\!]$;
(3) $[\![u=v]\!]\wedge[\![v=w]\!]\leqslant[\![u=w]\!]$;
(4) $[\![u=v]\!]\wedge[\![v\in w]\!]\leqslant[\![u\in w]\!]$;

(5) $[\![u = v]\!] \wedge [\![w \in v]\!] \leqslant [\![w \in u]\!]$

для всех $u, v, w \in \mathfrak{U}$.

Класс-функции $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ называют булевозначными (B-значными) *оценками истинности* равенства и принадлежности.

Вместо $(\mathfrak{U}, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$ мы обычно будем писать просто $\mathfrak{U}$ и в случае необходимости снабжать символы булевозначных оценок истинности индексами $[\![\cdot = \cdot]\!]_{\mathfrak{U}}$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]_{\mathfrak{U}}$.

Булевозначную систему $\mathfrak{U}$ называют *отделимой*, если для любых $u, v \in \mathfrak{U}$ из $[\![u = v]\!] = \mathbb{1}$ следует $u = v$.

6.1.2. Рассмотрим булевозначные системы $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ над полными булевыми алгебрами B и C соответственно и предположим, что между алгебрами B и C имеется булев изоморфизм $\jmath : B \to C$. *Изоморфизмом булевозначных систем* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{V}$*, согласованным с изоморфизмом* $\jmath$, мы будем называть биективную класс-функцию $\imath : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$, удовлетворяющую соотношениям

$$
\jmath([\![u_1 = u_2]\!]_{\mathfrak{U}}) = [\![\imath(u_1) = \imath(u_2)]\!]_{\mathfrak{V}},
$$
$$
\jmath([\![u_1 \in u_2]\!]_{\mathfrak{U}}) = [\![\imath(u_1) \in \imath(u_2)]\!]_{\mathfrak{V}}
$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathfrak{U}$. Назовем булевозначные системы *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм.

В том случае, когда $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — булевозначные системы над одной и той же алгеброй B, всякий изоморфизм $\imath : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ по умолчанию предполагается ассоциированным с тождественным изоморфизмом:

$$
[\![u_1 = u_2]\!]_{\mathfrak{U}} = [\![\imath(u_1) = \imath(u_2)]\!]_{\mathfrak{V}},
$$
$$
[\![u_1 \in u_2]\!]_{\mathfrak{U}} = [\![\imath(u_1) \in \imath(u_2)]\!]_{\mathfrak{V}}.
$$

При необходимости подчеркнуть это обстоятельство, мы будем называть такой изоморфизм *B-изоморфизмом* и называть соответствующие системы *B-изоморфными*.

6.1.3. Всюду, употребляя запись вида $\varphi(t_1, \dots, t_n)$, мы по умолчанию предполагаем, что φ — формула теоретико-множественной сигнатуры, все свободные переменные которой попадают в список $(t_1, \dots, t_n)$.

Произвольный набор $(u_1, \dots, u_n)$ элементов системы $\mathfrak{U}$ называют *означиванием* списка переменных $(t_1, \dots, t_n)$. Рекурсией по сложности формулы определяют (булевозначную) истинность

$$
[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!]
$$

любой формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ относительно произвольного означивания $(u_1, \dots, u_n)$ переменных $(t_1, \dots, t_n)$. Если формула φ атомарна, т. е. имеет вид $t_1 = t_2$ или $t_1 \in t_2$, то ее истинность относительно означивания (u_1, u_2) полагается равной $[\![u_1 = u_2]\!]$ и $[\![u_1 \in u_2]\!]$ соответственно. Истинность же формул бо́льшей сложности задают следующим образом:

$$
\begin{aligned}
[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)\ \wedge\ \psi(u_1,\dots,u_n)]\!] &:= [\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] \wedge [\![\psi(u_1,\dots,u_n)]\!],\\
[\![\varphi(u_1,\dots,u_n) \vee \psi(u_1,\dots,u_n)]\!] &:= [\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] \vee [\![\psi(u_1,\dots,u_n)]\!],\\
[\![\varphi(u_1,\dots,u_n) \to \psi(u_1,\dots,u_n)]\!] &:= [\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] \Rightarrow [\![\psi(u_1,\dots,u_n)]\!],\\
[\![\neg\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] &:= [\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!]^*,\\
[\![(\forall\, t)\,\varphi(t,u_1,\dots,u_n)]\!] &:= \bigwedge_{u\in\mathfrak{U}} [\![\varphi(u,u_1,\dots,u_n)]\!],\\
[\![(\exists\, t)\,\varphi(t,u_1,\dots,u_n)]\!] &:= \bigvee_{u\in\mathfrak{U}} [\![\varphi(u,u_1,\dots,u_n)]\!].
\end{aligned}
$$

Говорят, что формула $\varphi(t_1,\dots,t_n)$ *истинна* в системе $\mathfrak{U}$ относительно означивания $(u_1,\dots,u_n)$, если имеет место равенство $[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] = \mathbb{1}$. В этом случае пишут $\mathfrak{U} \models \varphi(u_1,\dots,u_n)$.

6.1.4. *Если формула $\varphi(t_1,\dots,t_n)$ доказуема в исчислении предикатов, то $[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] = \mathbb{1}$ для всех $u_1,\dots,u_n \in \mathfrak{U}$.*

$\lhd$ Несложно убедиться в том, что все аксиомы исчисления предикатов истинны в системе $\mathfrak{U}$, а правила вывода сохраняют истинность. Последнее означает, что выводимость формулы φ в исчислении предикатов из формул $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ обеспечивает неравенство $[\![\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n]\!] \leqslant [\![\varphi]\!]$. $\rhd$

Из последнего предложения следует, что для любой формулы $\varphi(t,t_1,\dots,t_n)$ и любых элементов $u,v,w_1,\dots,w_n \in \mathfrak{U}$ имеет место неравенство $[\![u = v]\!] \wedge [\![\varphi(u,w_1,\dots,w_n)]\!] \leqslant [\![\varphi(v,w_1,\dots,w_n)]\!]$.

6.1.5. Следующие ниже определения полезно сравнить с определениями из 4.3.1, 5.2.1 и 5.4.1. Пусть $u \in \mathfrak{U}$ таково, что $\mathfrak{U} \models u \neq \varnothing$. *Спуском* элемента u называют класс $\{v \in \mathfrak{U} : \mathfrak{U} \models v \in u\}$, который будет обозначен символом $u{\downarrow}$.

Пусть $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство элементов $\mathfrak{U}$ и $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство элементов алгебры B. Элемент $u \in \mathfrak{U}$ называют *подъемом* семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, если

$$
[\![v \in u]\!] = \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi \wedge [\![v = u_\xi]\!]
$$

для всех $v \in \mathfrak{U}$.

Пусть $\mathscr{U}$ — подмножество $\mathfrak{U}$. Элемент $\overline{u} \in \mathfrak{U}$ называют *подъемом* множества $\mathscr{U}$, если $[\![v \in \overline{u}]\!] = \bigvee_{u\in\mathscr{U}} [\![v = u]\!]$ для всех $v \in \mathfrak{U}$, т. е. $\overline{u}$ служит подъемом семейства $(u)_{u\in\mathscr{U}}$ относительно стационарного семейства (со значением единица).

Предположим, что $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — антицепь в алгебре B. Элемент $u \in \mathfrak{U}$ называют *перемешиванием* семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно семейства $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, если $[\![u = u_\xi]\!] \geqslant b_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$ и $[\![u = \varnothing]\!] \geqslant (\bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi)^*$.

Если система $\mathfrak{U}$ отделима и в ней истинна аксиома экстенсиональности, то подъем (перемешивание) любого семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно семейства (антицепи) $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ определен единственным образом. В этом случае, если подъем (перемешивание) существует, мы будем обозначать его символом $\mathrm{asc}_{\xi\in\Xi}\, b_\xi u_\xi$ (соответственно $\mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi u_\xi)$). Для подъема множества $\mathscr{U} \subset \mathfrak{U}$ используем, как и раньше, обозначение $\mathscr{U}{\uparrow}$.

6.1.6. В предыдущих двух главах можно было убедиться, что в булевозначном моделировании особую роль играют два основных принципа — принцип максимума и принцип перемешивания. В 4.5.7 установлено еще одно важное свойство булевозначного универсума, которое мы будем называть принципом подъема. Приведем формулировки упомянутых трех принципов, а в следующих пунктах исследуем взаимосвязь между ними. Пусть B — полная булева алгебра и $\mathfrak{U}$ — некоторая B-значная алгебраическая система.

Принцип максимума. *Для любой формулы $\varphi(t, t_1, \dots, t_n)$ и элементов $u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{U}$ существует такой элемент $u \in \mathfrak{U}$, что*

$$[\![(\exists\, t)\, \varphi(t, u_1, \dots, u_n)]\!] = [\![\varphi(u, u_1, \dots, u_n)]\!].$$

Принцип перемешивания. *Для всякого семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathfrak{U}$ и любой антицепи $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре B существует перемешивание $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$.*

Принцип подъема. (1) *Для всякого семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathfrak{U}$ и любого семейства $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов алгебры B существует подъем $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$.*

(2) *Для любого элемента $u \in \mathfrak{U}$ существуют семейство $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathfrak{U}$ и семейство $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов алгебры B такие, что u является подъемом $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$.*

Важность этих принципов связана с тем, что если они выполнены в булевозначной системе, то в последней появляется возможность конструирования квалифицированных элементов из имеющихся элементов.

6.1.7. Теорема. *Если B-значная система $\mathfrak{U}$ удовлетворяет принципу перемешивания, то она также удовлетворяет и принципу максимума.*

$\triangleleft$ Доказательство аналогично 4.3.3. Рассматривая формулу $\varphi(t, t_1, \dots, t_n)$, обозначим через $\vec{u}$ набор произвольных элементов $u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{U}$ и положим $b := [\![(\exists\, t)\, \varphi(t, \vec{u})]\!]$. По определению булевозначной истинности $b = \bigvee_{v\in\mathfrak{U}} [\![\varphi(v, \vec{u})]\!]$. По принципу исчерпывания можно найти антицепь $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре B и семейство $(v_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathfrak{U}$ такие, что $\bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi = b$ и $b_\xi \leqslant [\![\varphi(v_\xi, \vec{u})]\!]$. По условию теоремы существует перемешивание $v \in \mathfrak{U}$ семейства $(v_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно антицепи $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$. В частности, $[\![v = v_\xi]\!] \geqslant b_\xi$. В силу предложения 6.1.4 имеют место неравенства $[\![\varphi(v, \vec{u})]\!] \geqslant [\![v = v_\xi]\!] \wedge [\![\varphi(v_\xi, \vec{u})]\!] \geqslant b_\xi$. Следовательно, $[\![\varphi(v, \vec{u})]\!] \geqslant \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi = b$. Неравенство $[\![\varphi(v, \vec{u})]\!] \leqslant b$ очевидно. $\triangleright$

6.1.8. Теорема. *Пусть B-значная система $\mathfrak{U}$ удовлетворяет принципу подъема и в $\mathfrak{U}$ истинна аксиома экстенсиональности. Тогда для $\mathfrak{U}$ справедлив принцип перемешивания.*

$\triangleleft$ Пусть $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство элементов $\mathfrak{U}$ и $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — антицепь в алгебре B. По условию теоремы для всякого $\xi \in \Xi$ найдутся семейство $(u_\xi^\alpha)_{\alpha\in A(\xi)}$ элементов $\mathfrak{U}$ и семейство $(b_\xi^\alpha)_{\alpha\in A(\xi)}$ элементов алгебры B такие, что

$$[\![v \in u_\xi]\!] = \bigvee_{\alpha\in A(\xi)} b_\xi^\alpha \wedge [\![v = u_\xi^\alpha]\!] \quad \text{для всех } v \in \mathfrak{U}.$$

Рассмотрим множество $\Gamma = \{(\xi, \alpha) :\ \xi \in \Xi,\ \alpha \in A(\xi)\}$ и для каждой пары $\gamma = (\xi, \alpha) \in \Gamma$ положим $c_\gamma := b_\xi \wedge b_\xi^\alpha$ и $v_\gamma = u_\xi^\alpha$. Пусть $u \in \mathfrak{U}$ — подъем семейства $(v_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ относительно $(c_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. Непосредственный подсчет с привлечением определений и бесконечного дистрибутивного закона 2.1.6 (2) дает следующие соотношения:

$$[\![v \in u]\!] = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma \wedge [\![v = v_\gamma]\!] = \bigvee_{\xi \in \Xi} \bigvee_{\alpha \in A(\xi)} b_\xi \wedge b_\xi^\alpha \wedge [\![v = u_\xi^\alpha]\!] = \bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi \wedge [\![v \in u_\xi]\!].$$

Покажем, что u является перемешиванием семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$.

Сначала установим неравенство $[\![u = u_\xi]\!] \geqslant b_\xi$. В силу истинности аксиомы экстенсиональности достаточно показать $\big([\![v \in u]\!] \Leftrightarrow [\![v \in u_\xi]\!]\big) \geqslant b_\xi$ или, что то же самое, $b_\xi \wedge [\![v \in u]\!] = b_\xi \wedge [\![v \in u_\xi]\!]$. Поскольку $b_\xi \wedge b_\eta = \mathbb{0}$ при $\xi \neq \eta$, мы имеем

$$b_\xi \wedge [\![v \in u]\!] = \bigvee_{\eta \in \Xi} b_\xi \wedge b_\eta \wedge [\![v \in u_\eta]\!] = b_\xi \wedge [\![v \in u_\xi]\!].$$

Покажем теперь, что $[\![u \neq \varnothing]\!] \leqslant \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi$. Действительно,

$$[\![u \neq \varnothing]\!] = [\![(\exists\, t)\, t \in u]\!] = \bigvee_{v \in \mathfrak{U}} [\![v \in u]\!] = \bigvee_{v \in \mathfrak{U}} \bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi \wedge [\![v \in u_\xi]\!] \leqslant \bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi. \ \triangleright$$

6.1.9. Теорема. *Если B-значная система $\mathfrak{U}$ удовлетворяет принципам максимума и подъема, то она также удовлетворяет и принципу перемешивания.*

$\triangleleft$ Пусть $\varnothing^\wedge \in \mathfrak{U}$ — подъем пустого подмножества $\mathfrak{U}$. Легко проверить, что $[\![\varnothing^\wedge = \varnothing]\!] = \mathbb{1}$. (Здесь, как и всюду в дальнейшем, запись $u = \varnothing$ означает $(\forall\, t)\ t \notin u$.)

Рассмотрим семейство $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathfrak{U}$ и антицепь $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре B. Положим $b := (\bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi)^*$. Определим семейство $(v_\xi)_{\xi\in\Xi'}$ и разбиение единицы $(c_\xi)_{\xi\in\Xi'}$ следующим образом: $\Xi' = \Xi \cup \{\Xi\}$, $v_\xi = u_\xi$, $c_\xi = b_\xi$ при $\xi \in \Xi$ и $v_\Xi = \varnothing^\wedge$, $c_\Xi = b$. Пусть $u \in \mathfrak{U}$ — подъем семейства $(v_\xi)_{\xi\in\Xi'}$ относительно $(c_\xi)_{\xi\in\Xi'}$. Легко понять, что $[\![u \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1}$. Действительно, $[\![v_\xi \in u]\!] \geqslant c_\xi$ при $\xi \in \Xi'$, откуда следует, что

$$[\![u \neq \varnothing]\!] = \bigvee_{v \in \mathfrak{U}} [\![v \in u]\!] \geqslant \bigvee_{\xi \in \Xi'} c_\xi = \mathbb{1}.$$

Таким образом, $[\![(\exists\, t)\, t \in u]\!] = \mathbb{1}$. Согласно принципу максимума найдется такой элемент $v \in \mathfrak{U}$, что $[\![v \in u]\!] = \mathbb{1}$. Тогда по определению подъема

$$c_\xi = \mathbb{1} \wedge c_\xi = \bigvee_{\eta \in \Xi'} c_\eta \wedge [\![v = v_\eta]\!] \wedge c_\xi = [\![v = v_\xi]\!] \wedge c_\xi$$

и, стало быть, $[\![v = v_\xi]\!] \geqslant c_\xi$ для всех $\xi \in \Xi'$. В частности, при $\xi \in \Xi$ имеем $[\![v = u_\xi]\!] \geqslant b_\xi$. Кроме того, в силу 6.1.4 выполнены следующие соотношения:

$$\Big(\bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi\Big)^* \leqslant [\![v = \varnothing^\wedge]\!] = [\![v = \varnothing^\wedge]\!] \wedge [\![\varnothing^\wedge = \varnothing]\!] \ \leqslant\ [\![v = \varnothing]\!].$$

Следовательно, v является перемешиванием семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно антицепи $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$. $\triangleright$

6.1.10. Пусть B — полная булева алгебра и $\mathfrak{U}$ — некоторая B-значная система. Систему $\mathfrak{U}$ назовем *булевозначным универсумом над B* (*B-значным универсумом*), если $\mathfrak{U}$ удовлетворяет следующим трем условиям:

(1) система $\mathfrak{U}$ отделима;

(2) $\mathfrak{U}$ удовлетворяет принципу подъема;

(3) в $\mathfrak{U}$ истинны аксиомы экстенсиональности и регулярности.

6.1.11. Теорема. *Для любой полной булевой алгебры B существует B-значный универсум, причем единственный с точностью до B-изоморфизма.*

$\lhd$ Существование B-значного универсума следует из результатов главы 4. Единственность будет видна из установленной ниже теоремы 6.4.10. $\rhd$

6.2. Понятие непрерывного расслоения

Здесь мы дадим определение непрерывного расслоения, уделяя особое внимание нюансам, которые привносит класс-топология.

6.2.1. Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называют *открытым*, если оно удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий:

(1) для всякого открытого подмножества $A \subset X$ образ $f(A)$ открыт в Y;

(2) для всякой точки $x \in X$ и любой ее окрестности $A \subset X$ образ $f(A)$ является окрестностью точки $f(x)$ в Y;

(3) $f^{-1}(\mathrm{cl}(B)) \subset \mathrm{cl}(f^{-1}(B))$ для любого подмножества $B \subset Y$.

Заметим, что равенство $f^{-1}(\mathrm{cl}(B)) = \mathrm{cl}(f^{-1}(B))$ имеет место для всех подмножеств $B \subset Y$ тогда и только тогда, когда отображение f непрерывно и открыто.

6.2.2. Отображение $f : X \to Y$ называют *замкнутым*, если оно удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий:

(1) для всякого замкнутого подмножества $A \subset X$ образ $f(A)$ замкнут в Y;

(2) $\mathrm{cl}(f(A)) \subset f(\mathrm{cl}(A))$ для любого подмножества $A \subset X$.

Равенство $\mathrm{cl}(f(A)) = f(\mathrm{cl}(A))$ выполнено для любого подмножества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда отображение $f : X \to Y$ непрерывно и замкнуто.

6.2.3. Пусть X — некоторый класс. Подкласс $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ называют *топологией* на X, если

(1) $\bigcup \tau = X$;

(2) $U \cap V \in \tau$ для всех $U, V \in \tau$;

(3) $\bigcup \mathscr{U} \in \tau$ для любого подмножества $\mathscr{U} \subset \tau$.

Класс X, наделенный топологией, мы, как обычно, будем называть *топологическим пространством.*

Все основные топологические понятия (такие, как окрестность точки, замкнутое множество, внутренность, замыкание, непрерывная функция, хаусдорфовость и т. п.) вводят аналогично тому, как это делается для топологии на множестве. Заметим, однако, что не все классические подходы к определению этих понятий сохраняют свою формальную силу в случае класс-топологии. Например, из двух определений замкнутого множества:

(a) как подмножества X, дополнение которого принадлежит τ,

(b) как подмножества X, дополнение которого с каждой своей точкой содержит элемент τ,

следует выбрать второе.

Определяя замыкание множества A как наименьшее замкнутое подмножество X, содержащее A, мы подвергаем себя определенному риску: некоторые множества могут не иметь замыкания. Однако эта проблема отсутствует, если топология τ хаусдорфова: в этом случае каждое множество будет иметь замыкание. (Действительно, в случае хаусдорфовой топологии каждый сходящийся фильтр имеет единственный предел, а значит, совокупность всех пределов сходящихся фильтров над данным множеством окажется множеством, а не собственным классом.)

Символом $\mathrm{Clop}(X)$, как и раньше, мы обозначаем класс всех открыто-замкнутых подмножеств X (т. е. подмножеств, являющихся одновременно открытыми и замкнутыми). В дальнейшем запись $U \sqsubset X$ будет означать, что $U \in \mathrm{Clop}(X)$. Для класса $\{U \sqsubset X : \ x \in U\}$ мы будем использовать обозначение $\mathrm{Clop}(x)$.

Топологию называют *экстремально несвязной*, если замыкание всякого открытого множества является открытым множеством.

6.2.4. Пусть Q — произвольное непустое множество и $V^Q \subset Q \times \mathbb{V}$ — класс-соответствие. Для каждой точки $q \in Q$ класс

$$\{q\} \times V^Q(q) = V^Q \cap \big(\{q\} \times \mathbb{V}\big) = \big\{(q,x) : \ (q,x) \in V^Q\big\}$$

мы обозначим символом V^q. Очевидно, $V^p \cap V^q = \varnothing$ при $p \neq q$. Соответствие V^Q называют *расслоением* над Q, а класс V^q — *слоем* расслоения V^Q в точке q.

Пусть $D \subset Q$. Функцию $u : D \to V^Q$ называют *сечением* расслоения V^Q над множеством D, если $u(q) \in V^q$ для всех $q \in D$. Класс всех сечений V^Q над D обозначают символом $S(D, V^Q)$. Сечения, определенные на Q, называют *глобальными*. Если X — подмножество V^Q, то символом $S(D, X)$ обозначают множество всех сечений расслоения X над D.

Точку $q \in Q$ называют *проекцией элемента* $x \in V^Q$ и обозначают символом $\mathrm{pr}(x)$, если $x \in V^q$. *Проекцией множества* $X \subset V^Q$ мы будем называть совокупность $\{\mathrm{pr}(x) : \ x \in X\}$ и обозначать ее символом $\mathrm{pr}(X)$.

6.2.5. Предположим теперь, что Q — топологическое пространство и на классе $V^Q \subset Q \times \mathbb{V}$ задана некоторая топология. В этом случае мы будем называть V^Q *непрерывным расслоением* над Q.

Под *непрерывным сечением* расслоения V^Q мы понимаем сечение, являющееся непрерывной функцией. Для любого подмножества $D \subset Q$ символом $C(D, V^Q)$ будет обозначен класс всех непрерывных сечений V^Q над D. Аналогичным образом, если X — подмножество V^Q, то под символом $C(D, X)$ мы подразумеваем совокупность всех непрерывных сечений X над D. Очевидно, $C(D, X) = C(D, V^Q) \cap S(D, X)$.

Всюду в дальнейшем мы считаем, что Q — экстремально несвязный компакт, и предполагаем выполненными следующие условия:

(1) $(\forall\, q \in Q)(\forall\, x \in V^q)(\exists\, u \in C(Q, V^Q))u(q) = x$;

(2) $(\forall\, u \in C(Q, V^Q))(\forall\, A \sqsubset Q)u(A) \sqsubset V^Q$.

6.2.6. *Непрерывное расслоение V^Q обладает следующими свойствами*:

(1) *топология V^Q хаусдорфова;*

(2) *для любых $u \in C(Q, V^Q)$ и $q \in Q$ семейство $\{u(A) : \ A \in \mathrm{Clop}(q)\}$ является базой окрестностей точки $u(q)$;*

(3) *все элементы $C(Q, V^Q)$ являются открытыми и замкнутыми отображениями.*

$\triangleleft$ Пусть x и y — различные элементы V^Q. Положим $p := \mathrm{pr}(x)$ и $q := \mathrm{pr}(y)$. В силу 6.2.5 (1) найдутся сечения $u, v \in C(Q, V^Q)$ такие, что $u(p) = x$ и $v(q) = y$.

Предположим сначала, что $p = q$. В силу 6.2.5 (2) множество $A = \{q \in Q : u(q) \neq v(q)\} = Q \setminus u^{-1}\big(v(Q)\big)$ открыто-замкнуто. Тогда $u(A)$ и $v(A)$ — непересекающиеся окрестности точек x и y.

Пусть теперь $p \neq q$. В этом случае существуют $A, B \sqsubset Q$ такие, что $A \cap B = \varnothing$, $p \in A$ и $q \in B$. Тогда $u(A)$ и $v(B)$ — непересекающиеся окрестности точек x и y.

Утверждение (2) с очевидностью вытекает из 6.2.5 (2).

Утверждение (3) эквивалентно 6.2.5 (2) в силу того обстоятельства, что $\mathrm{Clop}(Q)$ является базой как открытой, так и замкнутой топологии в Q. $\triangleright$

6.2.7. *Подмножество $X \subset V^Q$ открыто-замкнуто тогда и только тогда, когда $u^{-1}(X) \sqsubset Q$ для всех $u \in C(Q, V^Q)$.*

$\triangleleft$ В пояснении нуждается лишь достаточность. Рассмотрим произвольный элемент $x \in V^Q$. Пусть сечение $u \in C(Q, V^Q)$ и точка $q \in Q$ таковы, что $u(q) = x$.

Предположим сначала, что $x \in X$. Поскольку множество $A = u^{-1}(X)$ открыто-замкнуто, $u(A)$ — окрестность x, содержащаяся в X. В силу произвольности x заключаем, что множество X открыто.

Если же $x \notin X$, то, воспользовавшись открыто-замкнутостью множества $A = Q \setminus u^{-1}(X)$, заключаем, что $u(A)$ — окрестность x, не пересекающаяся с X. Произвольность x позволяет сделать вывод, что множество X замкнуто. $\triangleright$

6.2.8. *Топология V^Q экстремально несвязна.*

$\triangleleft$ Пусть X — открытое подмножество V^Q. В силу хаусдорфовости топологии V^Q замыкание $\mathrm{cl}(X)$ является множеством, а не собственным классом (см. 6.2.2). При этом для всякого сечения $u \in C(Q, V^Q)$ множество $u^{-1}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(u^{-1}(X))$ открыто-замкнуто. В силу 6.2.7 множество $\mathrm{cl}(X)$ открыто. $\triangleright$

6.2.9. *Для любого подмножества $X \subset V^Q$ выполнены следующие равенства*:

$$
\begin{aligned}
X &= \bigcup_{u \in C(Q, V^Q)} u\big(u^{-1}(X)\big), \\
\mathrm{int}(X) &= \bigcup_{u \in C(Q, V^Q)} u\big(\,\mathrm{int}(u^{-1}(X))\big), \\
\mathrm{cl}(X) &= \bigcup_{u \in C(Q, V^Q)} u\big(\,\mathrm{cl}(u^{-1}(X))\big).
\end{aligned}
$$

$\triangleleft$ Очевидное следствие 6.2.5 (1) и открытости всех непрерывных сечений. $\triangleright$

6.2.10. *Подклассы $X, Y \subset V^Q$ совпадают тогда и только тогда, когда $u^{-1}(X) = u^{-1}(Y)$ для всех $u \in C(Q, V^Q)$.*

$\triangleleft$ Возьмем произвольно $q \in Q$, $x \in V^q$ и рассмотрим сечение $u \in C(Q, V^Q)$ такое, что $u(q) = x$. Если $x \in X$, то $q \in u^{-1}(X) = u^{-1}(Y)$ и, следовательно, $x = u(q) \in Y$. Обратное включение можно установить аналогично. $\triangleright$

6.2.11. *Сечение $u \in S(D, V^Q)$, определенное на открытом подмножестве $D \subset Q$, непрерывно тогда и только тогда, когда $\mathrm{im}(u)$ — открытое подмножество V^Q.*

$\triangleleft$ Предположим, что сечение u непрерывно. Для всякого $q \in D$ подберем сечение $u_q \in C(Q, V^Q)$ такое, что $u_q(q) = u(q)$. Множество $D_q = \big\{p \in D : \ u(p) = u_q(p)\big\} = u^{-1}(\mathrm{im}(u_q))$ открыто в D, а значит, и в Q. Поэтому образ $u(D_q) =$

$u_q(D_q)$ открыт в силу открытости глобальных непрерывных сечений. Очевидно, $D = \bigcup_{q\in D} D_q$, так как $q \in D_q$. Стало быть, множество

$$\operatorname{im}(u) = u(D) = u\Bigg(\bigcup_{q\in D} D_q\Bigg) = \bigcup_{q\in D} u(D_q)$$

является открытым.

Предположим теперь, что $\operatorname{im}(u)$ — открытое множество. Рассмотрим произвольную точку $q \in D$ и подберем сечение $u_q \in C(Q, V^Q)$ такое, что $u(q) = u_q(q)$. Множество $\big\{p \in D : \ u_q(p) = u(p)\big\} = u_q^{-1}(\operatorname{im}(u))$ открыто и является окрестностью точки q, откуда следует непрерывность сечения u в точке q. $\rhd$

6.2.12. *Для любого подмножества $X \subset V^Q$ выполнены следующие соотношения*:

(1) $\operatorname{pr}(\operatorname{cl}(X)) \subset \operatorname{cl}(\operatorname{pr}(X))$;

(2) $\operatorname{pr}(\operatorname{int}(X)) \subset \operatorname{int}(\operatorname{pr}(X))$.

$\lhd$ Рассмотрим произвольное сечение $u \in C(Q, V^Q)$. В силу свойств замыкания, 6.2.1 и 6.2.6 (3) мы имеем $u^{-1}(\operatorname{cl}(X)) = \operatorname{cl}(u^{-1}(X)) \subset \operatorname{cl}(\operatorname{pr}(X))$, откуда благодаря равенству $\operatorname{pr}(X) = \bigcup_{u\in C(Q,V^Q)} u^{-1}(X)$ следует включение $\operatorname{pr}(\operatorname{cl}(X)) \subset \operatorname{cl}(\operatorname{pr}(X))$.

Соотношение (2) можно установить аналогично. $\rhd$

6.3. Непрерывный поливерсум

В этом параграфе мы дадим конструкцию непрерывного поливерсума.

6.3.1. Рассмотрим непустое множество Q и расслоение $V^Q \subset Q \times \mathbb{V}$. Предположим, что для каждой точки $q \in Q$ класс V^q является алгебраической системой сигнатуры $\{\in\}$.

Для произвольной формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ и сечений $u_1, \dots, u_n$ расслоения V^Q символом $\{\varphi(u_1, \dots, u_n)\}$ мы будем обозначать множество

$$\big\{q \in \operatorname{dom} u_1 \cap \dots \cap \operatorname{dom} u_n : \ V^q \models \varphi\big(u_1(q), \dots, u_n(q)\big)\big\}.$$

Для любого элемента $x \in V^q$ положим $x{\downarrow} := \{y \in V^q : \ V^q \models y \in x\}$. Очевидно, если в системе V^q истинна аксиома экстенсиональности, то для всех $x, y \in V^q$ равенства $x{\downarrow} = y{\downarrow}$ и $x = y$ равносильны. Если X — подмножество V^Q, то символом $\sqcup X$ обозначено объединение $\bigcup_{x\in X} x{\downarrow}$.

Всюду в дальнейшем предполагается, что Q — экстремально несвязный компакт и V^Q — непрерывное расслоение над Q.

Для произвольного сечения $u \in C(Q, V^Q)$ класс $\bigcup_{q\in Q} u(q){\downarrow}$ мы будем называть *распаковкой* сечения u и обозначать символом $\llcorner u \lrcorner$.

6.3.2. Непрерывное расслоение V^Q называют *непрерывным поливерсумом* над Q, если в каждом слое V^q $(q \in Q)$ истинны аксиомы экстенсиональности и регулярности и, кроме того, выполнены следующие условия:

(1) $(\forall\, q \in Q)(\forall\, x \in V^q)(\exists\, u \in C(Q, V^Q))\ u(q) = x$;

(2) $(\forall\, u \in C(Q, V^Q))(\forall\, A \in \operatorname{Clop}(Q))\ u(A) \in \operatorname{Clop}(V^Q)$;

(3) $(\forall\, u \in C(Q, V^Q))\ \llcorner u \lrcorner \in \operatorname{Clop}(V^Q)$;

(4) $(\forall\, X \in \operatorname{Clop}(V^Q))(\exists\, u \in C(Q, V^Q))\ \llcorner u \lrcorner = X$.

6.3.3. Для произвольных сечений $u, v \in C(Q, V^Q)$ равенства $\{u = v\} = u^{-1}(\mathrm{im}(v))$ и $\{u \in v\} = u^{-1}(\llcorner v \lrcorner)$ обеспечивают открыто-замкнутость множеств $\{u = v\}$ и $\{u \in v\}$, что позволяет нам ввести в рассмотрение две класс-функции $[\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!] : C(Q, V^Q) \times C(Q, V^Q) \to \mathrm{Clop}(Q)$, полагая $[\![u = v]\!] = \{u = v\}$ и $[\![u \in v]\!] = \{u \in v\}$.

Несложно убедиться в том, что тройка

$$\big(C(Q, V^Q),\ [\![\cdot = \cdot]\!],\ [\![\cdot \in \cdot]\!]\big)$$

представляет собой отделимую $\mathrm{Clop}(Q)$-значную систему (см. 6.1.1).

Из определения непрерывного поливерсума 6.3.2 (4) следует существование непрерывного сечения $\varnothing^\wedge$, удовлетворяющего условию $\llcorner \varnothing^\wedge \lrcorner = \varnothing$. Очевидно, такое сечение единственно. Кроме того, легко заметить, что $V^q \models \varnothing^\wedge(q) = \varnothing$ для всех $q \in Q$, $[\![\varnothing^\wedge = \varnothing]\!] = Q$, а также $[\![u = \varnothing^\wedge]\!] = [\![u = \varnothing]\!]$ для всех $u \in C(Q, V^Q)$.

6.3.4. *Для любого подмножества $X \subset V^Q$ имеют место следующие соотношения*:

(1) *если* $X \sqsubset V^Q$, *то* $\mathrm{pr}(X) \sqsubset Q$;

(2) *если множество X открыто, то* $\mathrm{pr}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(\mathrm{pr}(X))$.

$\lhd$ (1): Если $X \sqsubset V^Q$, то найдется сечение $u \in C(Q, V^Q)$ такое, что $\sqcup\, \mathrm{im}(u) = \llcorner u \lrcorner = X$. Очевидно, $\mathrm{pr}(\sqcup\, \mathrm{im}(u)) = [\![u \neq \varnothing]\!]$, откуда следует открыто-замкнутость $\mathrm{pr}(X)$.

(2): Пусть X — открытое подмножество V^Q. Тогда замыкание $\mathrm{cl}(X)$ открыто-замкнуто, как и его проекция $\mathrm{pr}(\mathrm{cl}(X))$. Очевидное включение $\mathrm{pr}(X) \subset \mathrm{pr}(\mathrm{cl}(X))$ влечет $\mathrm{cl}(\mathrm{pr}(X)) \subset \mathrm{pr}(\mathrm{cl}(X))$. Обратное включение установлено в 6.2.11. $\rhd$

6.3.5. *Носителем* сечения $u \in S(D, V^Q)$, определенного на $D \subset Q$, называют множество $\mathrm{supp}\, u = \{q \in D : V^q \models u(q) \neq \varnothing\}$. Очевидно, $\mathrm{supp}\, u = \{u \neq \varnothing\} = \{u \neq \varnothing^\wedge\}$. Таким образом, если $u \in C(Q, V^Q)$, то $\mathrm{supp}\, u$ — открыто-замкнутое множество.

Пусть u — непрерывное сечение V^Q и D — подмножество $\mathrm{supp}\, u$. Символом $C(D, u)$ обозначен класс

$$\big\{v \in C(D, V^Q) : (\forall\, q \in D)\ V^q \models v(q) \in u(q)\big\}.$$

Очевидно, $C(D, u) = C(D, \llcorner u \lrcorner)$.

Спуском сечения u мы будем называть класс $C(\mathrm{supp}\, u, u)$ и обозначать его символом $u{\downarrow}$. Легко заметить, что $u{\downarrow} = C(\mathrm{supp}\, u, \llcorner u \lrcorner)$. Очевидно, в случае $\{u \neq \varnothing\} = Q$ спуск сечения u представляет собой спуск u как элемента булевозначной системы (см. 6.2.7).

6.3.6. *Для любых $X \sqsubset V^Q$ и $u \in C(Q, V^Q)$ следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $\llcorner u \lrcorner = X$;

(2) $u(q){\downarrow} = X \cap V^q$ *для всех* $q \in Q$;

(3) $\mathrm{supp}\, u = \mathrm{pr}(X)$ *и* $u{\downarrow} = C\big(\mathrm{pr}(X), X\big)$;

(4) $[\![v \in u]\!] = v^{-1}(X)$ *для всех* $v \in C(Q, V^Q)$.

$\lhd$ (1)$\to$(3): Достаточно лишь заметить, что $\mathrm{supp}\, u = [\![u \neq \varnothing]\!] = \mathrm{pr}(\llcorner u \lrcorner)$, и воспользоваться равенством $u{\downarrow} = C(\mathrm{supp}\, u, \llcorner u \lrcorner)$.

(3)$\to$(2): Положим $A := \mathrm{supp}\, u$. Легко понять, что $X \cap V^q = \varnothing = u(q){\downarrow}$ для всех $q \in Q \backslash A$.

Для произвольной точки $q \in A$ найдутся $x \in u(q)\!\downarrow$ и $v_q \in C(Q, V^Q)$ такие, что $v_q(q) = x$. Пусть $B_q = [\![v_q \in u]\!]$. Семейство $(B_q)_{q\in A}$ образует открытое покрытие компакта A и поэтому из него можно выбрать подпокрытие $(B_q)_{q\in F}$, где F — конечное подмножество A. По принципу исчерпывания найдется антицепь $(C_q)_{q\in F}$ такая, что $C_q \subset B_q$ для $q \in F$ и $\bigcup_{q\in F} C_q = \bigvee_{q\in F} C_q = \bigvee_{q\in F} B_q = A$. Построим сечение $v \in S(A, V^Q)$, для каждой точки $p \in A$ полагая $v(p) = v_q(p)$, где q такой (единственный) элемент F, что $p \in C_q$. Сечение v непрерывно, поскольку $v = v_q$ на C_q $(q \in F)$. Легко заметить, что $v \in u\!\downarrow = C(A, X)$.

Пусть q — произвольный элемент A.

Рассмотрим $x \in u(q)\!\downarrow$, подберем сечение $w \in C(Q, V^Q)$ такое, что $w(q) = x$, и построим сечение $\overline{w} \in S(A, V^Q)$ следующим образом:

$$\overline{w}(p) = \begin{cases} w(p), & \text{если } p \in [\![w \in u]\!], \\ v(p), & \text{если } p \in A \setminus [\![w \in u]\!]. \end{cases}$$

Очевидно, сечение $\overline{w}$ непрерывно, и $\overline{w} \in u\!\downarrow = C(A, X)$, откуда следует, что $x = \overline{w}(q) \in X$ в силу включения $q \in [\![w \in u]\!]$.

Пусть теперь $x \in X \cap V^q$. Как и раньше, подберем сечение $w \in C(Q, V^Q)$ такое, что $w(q) = x$. Рассмотрим сечение $\overline{w} \in S(A, V^Q)$, определенное следующим образом:

$$\overline{w}(p) = \begin{cases} w(p), & \text{если } p \in w^{-1}(X), \\ v(p), & \text{если } p \in A \setminus w^{-1}(X). \end{cases}$$

Из очевидных соотношений $\overline{w} \in C(A, X) = u\!\downarrow$ и $q \in w^{-1}(X)$ вытекает, что $x = w(q) = \overline{w}(q) \in u(q)\!\downarrow$.

(2)→(4): Рассмотрим произвольное сечение $v \in C(Q, V^Q)$. Если $q \in [\![v \in u]\!] = v^{-1}(\llcorner u \lrcorner)$, то $v(q) \in \llcorner u \lrcorner$ и, следовательно, $v(q) \in u(q)\!\downarrow = X \cap V^q$, т. е. $q \in v^{-1}(X)$.

Если же $q \in v^{-1}(X)$, то $v(q) \in X \cap V^q = u(q)\!\downarrow$, а значит, $V^q \models v(q) \in u(q)$ и $q \in [\![v \in u]\!]$.

(4)→(1): Заметим, что $v^{-1}(\llcorner u \lrcorner) = [\![v \in u]\!] = v^{-1}(X)$ для всех $v \in C(Q, V^Q)$. Поэтому согласно 6.2.10 имеет место равенство $X = \llcorner u \lrcorner$. $\triangleright$

6.3.7. Для каждого множества $X \sqsubset V^Q$ сечение u, удовлетворяющее условиям 6.3.6 (1–4), очевидно, единственно. Это сечение мы будем называть *упаковкой* множества X и обозначать символом $\ulcorner X \urcorner$.

Несложно убедиться в справедливости следующего утверждения.

(1) *Пусть X — открытое подмножество V^Q. Сечение $\overline{u} \in C(Q, V^Q)$ совпадает с $\ulcorner \mathrm{cl}(X) \urcorner$ тогда и только тогда, когда $\overline{u}$ является поточечно наименьшим среди сечений $u \in C(Q, V^Q)$, удовлетворяющих включению $X \cap V^q \subset u(q)\!\downarrow$ для всех $q \in Q$.*

(2) *Если $u \in C(Q, V^Q)$ и $A \in \mathrm{Clop}(Q)$, то $\sqcup u(A) \in \mathrm{Clop}(V^Q)$.*

$\triangleleft$ Для любого сечения $v \in C(Q, V^Q)$ множество $v^{-1}\big(\sqcup u(A)\big) = A \cap [\![v \in u]\!]$ открыто-замкнуто, откуда в силу 6.2.7 следует открыто-замкнутость множества $\sqcup u(A)$. $\triangleright$

6.3.8. *Любое непрерывное сечение V^Q, определенное на открытом или замкнутом подмножестве Q, можно продолжить до глобального непрерывного сечения.*

$\triangleleft$ Пусть $A \subset Q$ и $u \in C(A, V^Q)$. Для каждой точки $q \in A$ найдутся сечение $u_q \in C(Q, V^Q)$ и множество $B_q \sqsubset Q$ такие, что $q \in B_q$ и $u_q = u$ на $B_q \cap A$.

Предположим, что множество A открыто. Не нарушая общности, мы можем считать, что $B_q \subset A$. Рассмотрим открытое множество $X = \bigcup_{q\in A} u(q){\downarrow} = \bigcup_{q\in A} \sqcup u_q(B_q)$ и покажем, что $(\mathrm{cl}(X)) \cap V^q = u(q){\downarrow}$ для всех $q \in A$. Проверим лишь включение $(\mathrm{cl}(X)) \cap V^q \subset u(q){\downarrow}$ (обратное включение вытекает из очевидных свойств замыкания). Пусть $x \in (\mathrm{cl}(X)) \cap V^q$. Найдется сечение $v \in C(Q, V^Q)$ такое, что $v(q) = x$. Очевидно, для всякой окрестности $B \sqsubset Q$ точки q пересечение $v(B) \cap X$ непусто и, стало быть, найдется такая точка $p \in B \cap B_q$, что $v(p) \in u(p){\downarrow}$. С другой стороны, $u(p) = u_q(p)$ и, следовательно, $v(B) \cap \sqcup u_q(B_q) \neq \varnothing$. Множество $\sqcup u_q(B_q)$ замкнуто, и поэтому $x \in \sqcup u_q(B_q)$, откуда следует, что $x \in u_q(q){\downarrow} = u(q){\downarrow}$. Положим $\overline{u} := \ulcorner \mathrm{cl}(X) \urcorner$. Из установленного выше вытекает равенство $\overline{u}(q){\downarrow} = u(q){\downarrow}$ для всех $q \in A$. Таким образом, $\overline{u}$ — искомое глобальное продолжение сечения u.

Предположим теперь, что множество A замкнуто. Семейство $(B_q)_{q\in A}$ образует открытое покрытие компакта A, а значит, из этого покрытия можно выбрать подпокрытие $(B_q)_{q\in F}$, где F — конечное подмножество A. Без ограничения общности можно предполагать, что $\bigcup_{q\in F} B_q = Q$. По принципу исчерпывания найдется антицепь $(C_q)_{q\in F}$ такая, что $C_q \subset B_q$ для всех $q \in F$ и $\bigcup_{q\in F} C_q = Q$. Построим сечение $\overline{u} \in S(Q, V^Q)$, для каждой точки $p \in Q$ полагая $\overline{u}(p) = u_q(p)$, где q — такой (единственный) элемент F, что $p \in C_q$. Сечение $\overline{u}$ непрерывно, поскольку $\overline{u} = u_q$ на C_q $(q \in F)$. Очевидно, $\overline{u} = u$ на A. $\triangleright$

6.3.9. Отметим два следствия.

(1) *Если A — открытое или замкнутое подмножество Q, то $C(A, V^Q) = \{u|_A : u \in C(Q, V^Q)\}$.*

(2) Принцип продолжения. *Для любого сечения $u \in C(A, V^Q)$, определенного на открытом подмножестве $A \subset Q$, существует единственное сечение $\overline{u} \in C(\mathrm{cl}(A), V^Q)$, продолжающее u.*

$\triangleleft$ Согласно предложению 6.3.8 существует такое сечение $u_1 \in C(Q, V^Q)$, что $u_1 = u$ на A. Положим $\overline{u} := u_1|_{\mathrm{cl}(A)}$.

Единственность построенного продолжения очевидна. $\triangleright$

Сечение $\overline{u}$, фигурирующее в формулировке принципа продолжения, мы будем называть *замыканием* сечения u и обозначать символом $\mathrm{ext}(u)$.

6.3.10. (1) Теорема. *Рассмотрим семейство $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ глобальных непрерывных сечений V^Q, антицепь $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$ и положим $U := (\bigvee_{\xi\in\Xi} U_\xi)^*$. Тогда непрерывное сечение*

$$u = \mathrm{ext}\left(\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi|_{U_\xi} \cup \varnothing^\wedge|_U\right)$$

является перемешиванием $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$. В частности, для булевозначной системы $C(Q, V^Q)$ справедлив принцип перемешивания.

$\triangleleft$ Заметив, что $u_0 := \bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi\big|_{U_\xi} \cup \varnothing^\wedge\big|_U$ — непрерывное сечение, определенное на открытом множестве $A := U \cup \bigcup_{\xi\in\Xi} U_\xi$, применим принцип продолжения 6.3.9 (2). $\triangleright$

(2) *Булевозначная система $C(Q, V^Q)$ удовлетворяет принципу максимума.*

$\triangleleft$ Следует из (1) и 6.1.7. $\triangleright$

6.3.11. Теорема о поточечной истинности. *Для любой формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ и произвольных сечений $u_1, \dots, u_n \in C(Q, V^Q)$ имеет место равен-*

ство

$$[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] = \big\{q \in Q:\ V^q \models \varphi\big(u_1(q),\dots,u_n(q)\big)\big\}.$$

$\lhd$ Доказательство проводится индукцией по сложности формулы φ.

Если формула φ атомарна, т. е. имеет вид $t_1 \in t_2$ или $t_1 = t_2$, то нужное равенство вытекает из определения оценок истинности $[\![\,\cdot = \cdot\,]\!]$ и $[\![\,\cdot \in \cdot\,]\!]$.

Допустим, что для формул меньшей сложности теорема доказана. Ограничимся рассмотрением лишь того случая, когда формула φ имеет вид $(\exists\, t_0)\ \psi(t_0,\vec{t})$.

Если $V^q \models (\exists\, t_0)\ \psi\big(t_0,\vec{u}(q)\big)$, то найдется такой элемент $x \in V^q$, что $V^q \models \psi\big(x,\vec{u}(q)\big)$. Подберем сечение $u_0 \in C(Q,V^Q)$, удовлетворяющее равенству $u_0(q) = x$. По предположению индукции $q \in [\![\psi(u_0,\vec{u})]\!] \subset [\![(\exists\, t_0)\ \psi(t_0,\vec{u})]\!]$, что доказывает включение $\supset$ в требуемом равенстве.

Покажем обратное включение. Пусть $q \in [\![(\exists\, t_0)\ \psi(t_0,\vec{u})]\!]$. По принципу максимума найдется непрерывное сечение u_0 такое, что $[\![\psi(u_0,\vec{u})]\!] = [\![(\exists\, t_0)\ \psi(t_0,\vec{u})]\!]$. Тогда по предположению индукции $V^q \models \psi\big(u_0(q),\vec{u}(q)\big)$ и, значит, $V^q \models (\exists\, t_0)\ \psi\big(t_0,\vec{u}(q)\big)$. $\rhd$

6.3.12. *Для любого подмножества $X \subset V^Q$ имеют место следующие соотношения*:

(1) $\sqcup\,\mathrm{cl}(X) \subset \mathrm{cl}(\sqcup X)$;

(2) $\sqcup(\mathrm{int}(X)) \subset \mathrm{int}(\sqcup X)$;

(3) *если $X \in \mathrm{Clop}(V^Q)$, то $\sqcup X \in \mathrm{Clop}(V^Q)$*;

(4) *если множество X открыто, то $\sqcup X$ — открытое подмножество V^Q*;

(5) *если множество X открыто, то $\sqcup\,\mathrm{cl}(X) = \mathrm{cl}(\sqcup X)$.*

$\lhd$ (1): Пусть $x \in \sqcup\,\mathrm{cl}(X)$. Тогда $x \in y{\downarrow}$ для некоторого $y \in \mathrm{cl}(X)$. Рассмотрим сечения $u, v \in C(Q,V^Q)$ такие, что $u(q) = x$ и $v(q) = y$, где $q = \mathrm{pr}(x)$. Для всякого $A \in \mathrm{Clop}(q)$ выполнено $v(A) \cap X \neq \varnothing$. Положим $B := A \cap [\![u \in v]\!] \sqsubset Q$. Поскольку $q \in B$, найдется такая точка $p \in B$, что $v(p) \in X$. Очевидно, $u(p) \in v(p){\downarrow} \subset \sqcup X$ и, стало быть, $u(A) \cap \sqcup X \neq \varnothing$. Следовательно, $x \in \mathrm{cl}(\sqcup X)$.

(2): Предположим, что $x \in \sqcup\,\mathrm{int}(X)$, и рассмотрим $y \in \mathrm{int}(X)$ и $u, v \in C(Q,V^Q)$ такие, что $x \in y{\downarrow}$, $u(q) = x$ и $v(q) = y$, где $q = \mathrm{pr}(x)$. Ясно, что множество $B = v^{-1}(X) \cap [\![u \in v]\!]$ является окрестностью q, а значит, $u(B)$ — окрестность x. Кроме того, $u(p) \in v(p){\downarrow} \subset \sqcup X$ для всех $p \in B$, т. е. $u(B) \subset \sqcup X$. Стало быть, $x \in \mathrm{int}\,\sqcup X$.

(3): Согласно 6.2.7 достаточно рассмотреть произвольное сечение $v \in C(Q,V^Q)$ и показать, что множество $v^{-1}(\sqcup X)$ открыто-замкнуто. Пусть $u = \ulcorner X \urcorner$. Очевидно, $v(q) \in \sqcup X$ тогда и только тогда, когда $V^q \models \big(\exists\, t \in u(q)\big)\, v(q) \in t$. По теореме о поточечной истинности $v^{-1}(\sqcup X) = \{q \in Q : V^q \models (\exists\, t \in u(q))\, v(q) \in t\} = [\![(\exists\, t \in u)\ v \in t]\!]$ и, следовательно, $v^{-1}(\sqcup X) \sqsubset Q$.

(4): Тривиальным образом следует из (2).

(5): Пусть множество X открыто. Тогда его замыкание $\mathrm{cl}(X)$ открыто-замкнуто, и согласно (3) множество $\sqcup\,\mathrm{cl}(X)$ также является открыто-замкнутым. Очевидное соотношение $\sqcup X \subset \sqcup\,\mathrm{cl}(X)$ влечет $\mathrm{cl}(\sqcup X) \subset \sqcup\,\mathrm{cl}(X)$. Обратное включение справедливо в силу (1). $\rhd$

6.3.13. Теорема. *Булевозначная система $C(Q,V^Q)$ удовлетворяет принципу подъема.*

$\lhd$ Пусть $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство глобальных непрерывных сечений V^Q и $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство открыто-замкнутых подмножеств Q. Рассмотрим открыто-замкнутое множество $X = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(U_\xi)\right)$ и положим $u := \ulcorner X \urcorner$. Покажем, что построенное таким образом сечение $u \in C(Q, V^Q)$ является подъемом $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Действительно, для любого сечения $v \in C(Q, V^Q)$ имеют место следующие соотношения:

$$[\![v \in u]\!] = v^{-1}(\llcorner u \lrcorner) = v^{-1}\left(\mathrm{cl}\left(\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(U_\xi)\right)\right) = \mathrm{cl}\left(v^{-1}\left(\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(U_\xi)\right)\right) =$$

$$= \mathrm{cl}\left(\bigcup_{\xi\in\Xi} v^{-1}\big(u_\xi(U_\xi)\big)\right) = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{\xi\in\Xi} U_\xi \cap [\![v = u_\xi]\!]\right) = \bigvee_{\xi\in\Xi} U_\xi \wedge [\![v = u_\xi]\!].$$

Рассмотрим теперь произвольное сечение $u \in C(Q, V^Q)$ и покажем, что оно является подъемом некоторого семейства элементов $C(Q, V^Q)$ относительно подходящего семейства элементов $\mathrm{Clop}(Q)$. Пусть $X = \llcorner u \lrcorner$. Для каждого $x \in X$ подберем такое сечение $u_x \in C(Q, V^Q)$, что $x \in \mathrm{im}(u_x)$. Положим $U_x := [\![u_x \in u]\!] = u_x^{-1}(X)$. Очевидно, $x \in u_x(U_x) \subset X$ для всех $x \in X$, откуда следует, что $X = \bigcup_{x\in X} u_x(U_x) = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{x\in X} u_x(U_x)\right)$. Аналогично тому, как это сделано в первой части доказательства, можно установить равенство $[\![v \in u]\!] = \bigvee_{x\in X} U_x \wedge [\![v = u_x]\!]$ для всех $v \in C(Q, V^Q)$. Таким образом, u — подъем семейства $(u_x)_{x\in X}$ относительно $(U_x)_{x\in X}$. $\rhd$

6.3.14. Пусть $D \subset Q$ и $\mathscr{U}$ — подмножество $S(D, V^Q)$. Взяв $q \in D$, обозначим символом $\mathscr{U}(q)$ совокупность $\{u(q) :\ u \in \mathscr{U}\}$.

Пусть $\mathscr{U}$ — непустое подмножество $C(D, V^Q)$, где $D \sqsubset Q$. Следующие свойства сечения $\overline{u} \in C(Q, V^Q)$ эквивалентны:

(1) $\overline{u} = \ulcorner \mathrm{cl}\left(\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \mathrm{im}(u)\right)\urcorner$;

(2) $[\![v \in \overline{u}]\!] = \mathrm{cl}\left(\{q \in D :\ v(q) \in \mathscr{U}(q)\}\right)$ *для всех* $v \in C(Q, V^Q)$;

(3) $[\![v \in \overline{u}]\!] = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \{v = u\}\right)$ *для всех* $v \in C(Q, V^Q)$;

(4) $\overline{u}{\downarrow} = \left\{\mathrm{ext}\left(\bigcup_{u\in\mathscr{U}} u|_{D_u}\right) :\ (D_u)_{u\in\mathscr{U}}\right.$ *— разбиение единицы в* $\left.\mathrm{Clop}(D)\right\}$;

(5) $\overline{u}{\downarrow} = C(D, \mathrm{cl}(\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \mathrm{im}(u)))$;

(6) *сечение $\overline{u}$ является поточечно наименьшим среди сечений $\widetilde{u} \in C(Q, V^Q)$, удовлетворяющих включению $\mathscr{U}(q) \subset \widetilde{u}(q){\downarrow}$ для всех $q \in D$.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Положим $X := \bigcup_{u\in\mathscr{U}} \mathrm{im}(u)$. Тогда $\llcorner \overline{u} \lrcorner = \mathrm{cl}(X)$ и поэтому $[\![v \in \overline{u}]\!] = v^{-1}(\llcorner \overline{u} \lrcorner) = v^{-1}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(v^{-1}(X))$ для любого сечения $v \in C(Q, V^Q)$. Несложно убедиться в том, что $X = \bigcup_{q\in D} \mathscr{U}(q)$, а также установить эквивалентность включений $v(q) \in \mathscr{U}(q)$ и $q \in v^{-1}\left(\bigcup_{q\in D} \mathscr{U}(q)\right)$.

(2) $\to$ (3): Достаточно показать, что множества $\{q \in D :\ v(q) \in \mathscr{U}(q)\}$ и $\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \{v = u\}$ совпадают для всех $v \in C(Q, V^Q)$. Возьмем произвольную точку $q \in D$.

Если $v(q) \in \mathscr{U}(q)$, то для некоторого элемента $u \in \mathscr{U}$ выполнено $v(q) = u(q)$ и, следовательно, $q \in \{v = u\}$.

Если же $q \in \bigcup_{u\in\mathscr{U}} \{v = u\}$, то для подходящего $u \in \mathscr{U}$ имеет место включение $q \in \{v = u\}$, а значит, $v(q) = u(q) \in \mathscr{U}(q)$.

(3) $\to$ (4): Рассмотрим произвольный элемент $v \in C(D, V^Q)$ и определим сечение $\overline{v} \in C(Q, V^Q)$ следующим образом:

$$\overline{v}(q) = \begin{cases} v(q), & \text{если } q \in D, \\ \varnothing^\wedge(q), & \text{если } q \notin D. \end{cases}$$

Пусть $v \in \overline{u}{\downarrow}$. Тогда $D = \{v \in \overline{u}\} \subset [\![\overline{v} \in \overline{u}]\!] = \mathrm{cl} \bigcup_{u \in \mathscr{U}} \{\overline{v} = u\} \subset D$. Для всех $u \in \mathscr{U}$ множество $\{\overline{v} = u\} = u^{-1}(\mathrm{im}\, \overline{v})$ открыто-замкнуто. Согласно принципу исчерпывания найдется антицепь $(D_u)_{u \in \mathscr{U}}$ в алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$ такая, что $D_u \subset \{\overline{v} = u\}$ и

$$\bigvee_{u \in \mathscr{U}} D_u = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{u \in \mathscr{U}} \{\overline{v} = u\}\right) = D.$$

Очевидно, сечение $w = \bigcup_{u \in \mathscr{U}} u|_{D_u}$ непрерывно, множество $\mathrm{dom}(w)$ открыто, $D = \mathrm{cl}(\mathrm{dom}(w))$ и $\{w = v\} = \{w = \overline{v}\} = \mathrm{dom}(w)$. Ясно, что $\mathrm{ext}(w) \in C(D, V^Q)$ и $\{\mathrm{ext}(w) = v\} = D$. Поэтому $\mathrm{ext}(w) = v$ и, значит, справедливо включение $\subset$.

Установим обратное включение. Пусть $(D_u)_{u \in \mathscr{U}}$ — разбиение единицы в алгебре $\mathrm{Clop}(D)$ и $v = \mathrm{ext}(\bigcup_{u \in \mathscr{U}} u|_{D_u})$. Покажем, что $v \in \overline{u}{\downarrow}$. Поскольку $\mathrm{dom}(v) = D$, достаточно установить включение $\mathrm{im}(v) \subset \llcorner \overline{u} \lrcorner$. Очевидно, $u(D_u) \subset \llcorner \overline{u} \lrcorner$ для всех $u \in \mathscr{U}$ и, следовательно, $\bigcup_{u \in \mathscr{U}} u(D_u) \subset \llcorner \overline{u} \lrcorner$. Заметим, что $\mathrm{im}(v) = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{u \in \mathscr{U}} u(D_u)\right)$, а значит, $\mathrm{im}(v) \subset \llcorner \overline{u} \lrcorner$.

(4) $\to$ (5): Положим $X := \mathrm{cl}\left(\bigcup_{u \in \mathscr{U}} \mathrm{im}(u)\right)$. Пусть $(D_u)_{u \in \mathscr{U}}$ — разбиение единицы в алгебре $\mathrm{Clop}(D)$ и $v = \mathrm{ext}(\bigcup_{u \in \mathscr{U}} u|_{D_u})$. Очевидно, $\mathrm{dom}(v) = D$. Покажем, что $\mathrm{im}(v) \subset X$. Из включения $u(D_u) \subset X$ следует $\bigcup_{u \in \mathscr{U}} u(D_u) \subset X$, откуда с учетом равенства $\mathrm{im}(v) = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{u \in \mathscr{U}} u(D_u)\right)$ вытекает требуемое соотношение $\mathrm{im}(v) \subset X$. Таким образом, $\overline{u}{\downarrow} \subset C(D, X)$.

Для доказательства обратного включения рассмотрим произвольное сечение $v \in C(D, X)$ и покажем, что $v = \mathrm{ext}\left(\bigcup_{u \in \mathscr{U}} u|_{D_u}\right)$ для некоторого разбиения единицы $(D_u)_{u \in \mathscr{U}}$ в алгебре $\mathrm{Clop}(D)$. Очевидно, $v^{-1}(X) = D$. Поскольку сечение v открыто, справедливо равенство $D = \mathrm{cl}\left(v^{-1}(\bigcup_{u \in \mathscr{U}} \mathrm{im}(u))\right)$. Множество $A := v^{-1}(\bigcup_{u \in \mathscr{U}} \mathrm{im}(u))$ открыто и плотно в D.

С каждым элементом $u \in \mathscr{U}$ свяжем открыто-замкнутое множество $C_u = \{v = u\} = v^{-1}(\mathrm{im}(u))$. Из очевидного равенства $A = \bigcup_{u \in \mathscr{U}} C_u$ следует, что $\bigvee_{u \in \mathscr{U}} C_u = D$. Согласно принципу исчерпывания найдется разбиение единицы $(D_u)_{u \in \mathscr{U}}$ в алгебре $\mathrm{Clop}(D)$ такое, что $D_u \subset C_u$ для всех $u \in \mathscr{U}$. Положим $w := \bigcup_{u \in \mathscr{U}} u|_{D_u}$. Ясно, что для каждого $u \in \mathscr{U}$ имеют место равенства $w|_{D_u} = u|_{D_u} = v|_{D_u}$, так как $D_u \subset \{v = u\}$. Следовательно, по принципу продолжения $\mathrm{ext}(w) = v$, что доказывает требуемое включение.

(5) $\to$ (1): Достаточно заметить, что $D = \mathrm{pr}(\mathrm{cl}\left(\bigcup_{u \in \mathscr{U}} \mathrm{im}(u)\right))$, и воспользоваться предложением 6.3.6 (3).

Эквивалентность (1) и (6) очевидна. $\triangleright$

Сечение $\overline{u}$, фигурирующее в условии предложения, очевидно, единственно. Мы будем называть это сечение *подъемом* множества $\mathscr{U}$ и обозначать символом $\mathscr{U}{\uparrow}$.

Заметим, что в случае $\mathscr{U} \subset C(Q, V^Q)$ условие (3) можно записать в следующем виде:

$$[\![v \in \overline{u}]\!] = \bigvee_{u \in \mathscr{U}} [\![v = u]\!] \ \text{ для всех } \ v \in C(Q, V^Q).$$

Таким образом, если $\mathscr{U}$ — непустое подмножество $C(Q, V^Q)$, то понятие подъема $\mathscr{U}$ совпадает с одноименным понятием, введенным в 6.1.5.

6.4. Поливерсум и универсум

На протяжении этого параграфа мы предполагаем, что Q — экстремально несвязный компакт и $\mathfrak{U}$ — булевозначный универсум над $\mathrm{Clop}(Q)$.

6.4.1. Напомним, что если X — (собственный) класс, а $\sim$ — отношение эквивалентности на X, то можно образовать фактор-класс $X/{\sim}$, используя теорему Фреге — Рассела — Скотта (1.5.8). Каноническая проекция $F : X \to X/{\sim}$ удовлетворяет соотношению

$$F(x) = F(y) \leftrightarrow x \sim y \quad (x, y \in X),$$

что позволяет рассматривать $F(x)$ как аналог класса эквивалентности, содержащего элемент $x \in X$. В связи с этим мы будем обозначать $F(x)$ символом ${\sim}(x)$.

Для каждой точки $q \in Q$ введем отношение эквивалентности $\sim_q$ на классе $\mathfrak{U}$ следующим образом:

$$u \sim_q v \;\leftrightarrow\; q \in [\![u = v]\!].$$

Рассмотрим расслоение $V^Q = \big\{\big(q, {\sim_q}(u)\big) : q \in Q,\, u \in \mathfrak{U}\big\}$ и условимся обозначать пару $\big(q, {\sim_q}(u)\big)$ символом $\widehat{u}(q)$. Очевидно, для каждого элемента $u \in \mathfrak{U}$ отображение $\widehat{u} : q \mapsto \widehat{u}(q)$ представляет собой сечение расслоения V^Q. Заметим, что для всякого $x \in V^Q$ существуют $u \in \mathfrak{U}$ и $q \in Q$ такие, что $\widehat{u}(q) = x$. Кроме того, равенство $\widehat{u}(q) = \widehat{v}(q)$ выполнено тогда и только тогда, когда $q \in [\![u = v]\!]$.

Превратим каждый слой V^q расслоения V^Q в алгебраическую систему сигнатуры $\{\in\}$, полагая

$$V^q \models x \in y \;\leftrightarrow\; q \in [\![u \in v]\!],$$

где элементы $u, v \in \mathfrak{U}$ таковы, что $\widehat{u}(q) = x$ и $\widehat{v}(q) = y$. Легко убедиться в том, что приведенное определение корректно. Действительно, если $\widehat{u}_1(q) = x$ и $\widehat{v}_1(q) = y$ для какой-либо другой пары элементов u_1, v_1, то включения $q \in [\![u \in v]\!]$ и $q \in [\![u_1 \in v_1]\!]$ эквивалентны.

Несложно убедиться в том, что класс $\{\widehat{u}(A) : \; u \in \mathfrak{U},\; A \sqsubset Q\}$ является базой некоторой открытой топологии на V^Q, что позволяет нам рассматривать V^Q как непрерывное расслоение.

6.4.2. Теорема. *Имеют место утверждения*:

(1) *Расслоение V^Q является непрерывным поливерсумом.*

(2) *Отображение $u \mapsto \widehat{u}$ осуществляет изоморфизм между булевозначными универсумами $\mathfrak{U}$ и $C(Q, V^Q)$.*

$\lhd$ Доказательство последней содержится в 6.4.3–6.4.9. $\rhd$

6.4.3. *Если $u \in \mathfrak{U}$ и $A \sqsubset Q$, то $\widehat{u}(A) \sqsubset V^Q$.*

$\lhd$ Для каждого элемента $x \in V^Q \backslash \widehat{u}(A)$ найдутся $v \in \mathfrak{U}$ и $q \in Q$ такие, что $x = \widehat{v}(q)$.

Если $q \in A$, то $\widehat{u}(q) \neq x = \widehat{v}(q)$, $q \in [\![u \neq v]\!]$, и поэтому множество $\widehat{v}([\![u \neq v]\!])$ является окрестностью точки x, не пересекающейся с $\widehat{u}(A)$. Если же $q \notin A$, то окрестность $\widehat{v}(Q \backslash A)$ точки x не пересекается с $\widehat{u}(A)$. $\rhd$

6.4.4. *Классы $\{\widehat{u} : \; u \in \mathfrak{U}\}$ и $C(Q, V^Q)$ совпадают.*

$\lhd$ Рассмотрим произвольный элемент $u \in \mathfrak{U}$ и покажем, что сечение $\widehat{u}$ непрерывно. Если $v \in \mathfrak{U}$ и $A \sqsubset Q$, то множество $\widehat{u}^{-1}\big(\widehat{v}(A)\big) = A \cap [\![u = v]\!]$ открыто. Произвольность v и A позволяет заключить, что $\widehat{u} \in C(Q, V^Q)$.

Установим обратное включение. Пусть $f \in C(Q, V^Q)$. Для каждой точки $q \in Q$ подберем такой элемент $u_q \in \mathfrak{U}$, что $\widehat{u}_q(q) = f(q)$, и положим

$$A_q := \{p \in Q : \widehat{u}_q(p) = f(p)\} = f^{-1}\big(\widehat{u}_q(Q)\big) \sqsubset Q.$$

Таким образом, $(A_q)_{q\in Q}$ — открытое покрытие компакта Q, а значит, из него можно выбрать подпокрытие $(A_q)_{q\in F}$, где F — конечное подмножество Q. По принципу исчерпывания найдется антицепь $(U_q)_{q\in F}$ в $\operatorname{Clop}(Q)$ такая, что $U_q \subset A_q$ для всех $q \in F$ и $\bigcup_{q\in F} U_q = Q$. Поскольку булевозначная система $\mathfrak{U}$ удовлетворяет принципу перемешивания, у нас есть возможность рассмотреть элемент $u = \operatorname{mix}_{q\in F}(U_q u_q) \in \mathfrak{U}$. Несложно убедиться в том, что $\widehat{u} = f$. $\rhd$

6.4.5. *Топология V^Q экстремально несвязна.*

$\lhd$ Вытекает из предложений 6.4.3, 6.4.4 и 6.2.8. $\rhd$

6.4.6. *Отображение $(u \mapsto \widehat{u}) : \mathfrak{U} \to C(Q, V^Q)$ является биекцией, причем для всех $u, v \in \mathfrak{U}$ выполнены равенства*

$$\begin{aligned} [\![u = v]\!]_{\mathfrak{U}} &= [\![\widehat{u} = \widehat{v}]\!]_{C(Q,V^Q)}, \\ [\![u \in v]\!]_{\mathfrak{U}} &= [\![\widehat{u} \in \widehat{v}]\!]_{C(Q,V^Q)}. \end{aligned}$$

$\lhd$ Легко заметить, что для всех $u, v \in \mathfrak{U}$ и $q \in Q$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} V^q &\models \widehat{u}(q) \in \widehat{v}(q) \ \leftrightarrow \ q \in [\![u \in v]\!], \\ V^q &\models \widehat{u}(q) = \widehat{v}(q) \ \leftrightarrow \ q \in [\![u = v]\!]. \end{aligned}$$

Тем самым требуемые равенства установлены. В 6.4.4 показана сюръективность отображения $u \mapsto \widehat{u}$. Нам осталось обосновать его инъективность. Пусть элементы $u, v \in \mathfrak{U}$ таковы, что $\widehat{u} = \widehat{v}$. Тогда $[\![u = v]\!] = [\![\widehat{u} = \widehat{v}]\!] = Q$, откуда в силу отделимости системы $\mathfrak{U}$ следует равенство $u = v$. $\rhd$

Таким образом, тройка $\big(C(Q, V^Q), [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!]\big)$ представляет собой булевозначную систему над $\operatorname{Clop}(Q)$, изоморфную $\mathfrak{U}$, а значит, $C(Q, V^Q)$ является булевозначным универсумом над $\operatorname{Clop}(Q)$.

6.4.7. *Если $u \in C(Q, V^Q)$, то $\llcorner u \lrcorner$ — открыто-замкнутое подмножество V^Q.*

$\lhd$ Пусть $u \in C(Q, V^Q)$. Поскольку $C(Q, V^Q)$ удовлетворяет принципу подъема, мы имеем $u = \operatorname{asc}_{\xi\in\Xi} U_\xi u_\xi$ для некоторого семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ непрерывных сечений V^Q и семейства $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ открыто-замкнутых подмножеств Q. Для всякого $v \in C(Q, V^Q)$ имеют место соотношения

$$v^{-1}\Bigg(\operatorname{cl}\bigg(\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(U_\xi)\bigg)\Bigg) = \operatorname{cl}\bigg(\bigcup_{\xi\in\Xi} v^{-1}\big(u_\xi(U_\xi)\big)\bigg) = \operatorname{cl}\bigg(\bigcup_{\xi\in\Xi} U_\xi \cap [\![v = u_\xi]\!]\bigg) =$$

$$= \bigvee_{\xi\in\Xi} U_\xi \wedge [\![v = u_\xi]\!] = [\![v \in u]\!] = v^{-1}(\llcorner u \lrcorner).$$

Таким образом, согласно 6.2.10 установлено равенство

$$\llcorner u \lrcorner = \operatorname{cl}\bigg(\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(U_\xi)\bigg).$$

Множество $\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(U_\xi)$ открыто и поэтому в силу 6.4.5 класс $\llcorner u \lrcorner$ является открыто-замкнутым множеством. $\rhd$

6.4.8. *Для любого подмножества $X \sqsubset V^Q$ существует такое сечение $u \in C(Q, V^Q)$, что $\llcorner u \lrcorner = X$.*

$\lhd$ С каждым элементом $x \in X$ свяжем сечение $u_x \in C(Q, V^Q)$ такое, что $x \in \operatorname{im}(u_x)$. Очевидно, множество $U_x = u_x^{-1}(X)$ открыто-замкнуто. Рассмотрим подъем $u = \operatorname{asc}_{x \in X} U_x u_x$ и установим равенство $\llcorner u \lrcorner = X$. Поскольку $x \in u_x(U_x) \subset X$ для всех $x \in X$, мы имеем $X = \bigcup_{x \in X} u_x(U_x) = \operatorname{cl}\big(\bigcup_{x \in X} u_x(U_x)\big)$. Для произвольного сечения $v \in C(Q, V^Q)$ справедливы соотношения

$$v^{-1}(X) = \bigcup_{x \in X} v^{-1}\big(u_x(U_x)\big) = \bigvee_{x \in X} U_x \wedge [\![v = u_x]\!] = [\![v \in u]\!] = v^{-1}(\llcorner u \lrcorner).$$

Согласно 6.2.9 требуемое равенство установлено. $\rhd$

6.4.9. *Для любой формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ и произвольных сечений $u_1, \dots, u_n \in C(Q, V^Q)$ имеет место равенство*

$$[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] = \big\{q \in Q : \ V^q \models \varphi\big(u_1(q), \dots, u_n(q)\big)\big\}.$$

$\lhd$ Доказательство в точности повторяет доказательство теоремы 6.3.11 о поточечной истинности. $\rhd$

Из последнего предложения следует, что в каждом слое истинны аксиомы экстенсиональности и регулярности. Таким образом, теорема 6.4.2 полностью доказана.

В заключение сформулируем теорему, объединяющую основные результаты параграфов 6.3 и 6.4.

6.4.10. Теорема. *Пусть Q — стоунов компакт полной булевой алгебры B.*

(1) *Класс $C(Q, V^Q)$ непрерывных сечений поливерсума V^Q над Q является булевозначным универсумом.*

(2) *Для любого булевозначного универсума $\mathfrak{U}$ над B существует непрерывный поливерсум V^Q над Q, класс $C(Q,V^Q)$ непрерывных сечений которого изоморфен $\mathfrak{U}$.*

6.5. Комментарии

6.5.1. Взаимосвязи между принципом перемешивания, принципом максимума и принципом подъема изучали А. Е. Гутман и Г. А. Лосенков [50, 51]. Ими же получены утверждения 6.1.7–6.1.9. Аксиоматическая характеризация булевозначного универсума 6.1.11 взята из работы Р. Соловея и С. Тенненбаума [379].

6.5.2. (1) Понятие расслоения представляет собой традиционный реализационный инструмент и используется в разнообразных математических исследованиях. Идею использования в аналитических задачах семейства пространств, непрерывно меняющихся от точки к точке, относят к 1937–1938 гг. и связывают с именем Дж. фон Неймана, см. [325]. Представление о приложениях непрерывных расслоений к разделам, близким к тематике настоящей книги, можно получить по сборнику обзоров [225] (изданному М. Фурманом, К. Малвеем и Д. Скоттом), а также по цитируемой там литературе.

(2) Весьма часто для представления различных функционально-аналитических структур используется непрерывное банахово расслоение. Это понятие оформилось в 1950-х годах в работах И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [149], Р. Годемана [236], И. Капланского [267]. В настоящее время теория непрерывных банаховых расслоений представляет собой весьма обширную область исследований, различные аспекты которой отражены, например, в упомянутом выше сборнике [225], а также в монографии Г. Гирца [233] и работах К. Гофмана и К. Кеймела [247], А. Е. Гутмана [49].

6.5.3. (1) Представление булевозначного универсума в виде класса непрерывных сечений поливерсума — непрерывного расслоения, слоями которого служат классические модели теории множеств, получено А. Е. Гутманом и Г. А. Лосенковым [50, 51]. Основная идея непрерывного поливерсума и технические средства для ее осуществления вызрели в рамках теории просторных банаховых расслоений, разработанной А. Е. Гутманом [49] (см. также монографию А. Г. Кусраева [107]).

(2) В изложении теории непрерывного поливерсума, представленной в текущей главе, следуем написанной А. Е. Гутманом и Г. А. Лосенковым второй главе из коллективной монографии [51].

6.5.4. (1) Теорема 6.4.10 — основной результат текущей главы. Она утверждает, что понятие непрерывного поливерсума дает эквивалентный функциональный подход к булевозначному моделированию. Можно ожидать, что функциональный подход даст преимущества интуитивной ясности в ряде задач, так как элементы рассматриваемого универсума превращаются в непрерывные функции на экстремально несвязном компакте, а булевы оценки вычисляются поточечно.

(2) Непрерывный поливерсум оказывается адекватным инструментом при комбинировании нестандартных методов. Известно, что инфинитезимальное моделирование в булевозначном универсуме наталкивается на определенные препятствия, см. у С. С. Кутателадзе [125, 126], А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [114]. Подход, основанный на понятии непрерывного поливерсума, позволяет рассматривать послойные инфинитезимальные конструкции и устанавливать их связи со спусками инфинитезимальных конструкций внутри булевозначного универсума. Некоторые результаты в этом направлении получены в статье А. Е. Гутмана и Д. Б. Рябко [53] и в кандидатской диссертации Д. Б. Рябко [158].

Часть II

ПРИМЕНЕНИЯ

Глава 7
Анализ алгебраических систем

В каждом булевозначном универсуме имеется полный набор математических объектов, включающий в частности множества с дополнительными структурами: группы, кольца, алгебры и т. п. Применение спуска к алгебраическим системам в булевозначной модели выделяет образования с новыми свойствами и ведет к выявлению фактов об их строении и взаимосвязях. Такой прием исследования называют *прямой булевозначной интерпретацией*. При этом возникают новые теоремы или, точнее говоря, путем непосредственного перевода мы расширяем содержательный объем ранее доказанных теорем. Возникающие на этом пути сведения далеко не всегда оказываются по-настоящему полезными или интересными, и неосмысленная булевозначная интерпретация может легко стать бесцельной забавой.

В связи с этим естественно попытаться найти ответы на следующие вопросы: Какие практически важные математические структуры можно получить при булевозначной интерпретации наиболее употребительных структур? Какие при этом справедливы принципы переноса? Ясно, что здесь речь должна идти о специальных объектах, особенности строения которых позволяют говорить об их булевозначной реализации, каковая, при ее должном понимании, невозможна для произвольных объектов.

В главе 5 показано, что абстрактное B-множество можно погрузить в булевозначный универсум так, что булево расстояние между элементами становится булевой оценкой истинности их несовпадения. Соответствующий элемент универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ является по определению булевозначной реализацией рассматриваемого B-множества. Если B-множество обладает дополнительной структурой, то можно попытаться наделить подходящей структурой и его булевозначную реализацию с тем, чтобы использовать для изучения исходного объекта технику спусков и подъемов. Таким образом, сформулированные выше вопросы можно трактовать как единую проблему поиска квалифицированных булевозначных реализаций структурированных B-множеств.

В текущей главе мы займемся названной проблемой для объектов общей алгебры. Центральным для нас при этом будет понятие алгебраической B-системы. Последняя представляет собой непустое B-множество с нерастягивающими операциями и некоторым количеством B-предикатов, т. е. B-значных нерастягивающих отображений. Оказывается, что булевозначной реализацией алгебраической B-системы служит обычная — двузначная — алгебраическая система того же типа. Точнее говоря, оказывается, что подходящее расширение любой алгебраической B-системы совпадает со спуском двузначной алгебраической системы внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. С другой стороны, двузначную алгебраическую систему можно превратить в алгебраическую B-систему при условии, что в ней выделена полная булева алгебра конгруэнции. При этом важно проследить за тем, какие формулы остаются истинными при переходе из B-системы к ее двузначному подъему и наоборот. Иными словами, здесь возникают разнообразные варианты принципа переноса или принципа сохранения соотношений, давно известные в тех или иных формах в некоторых разделах математики.

7.1. Булевозначные интерпретации

Введем класс алгебраических систем, подходящий для булевозначной интерпретации языков первого порядка. Такие системы возникают как B-множества, снабженные нерастягивающими операциями и предикатами.

7.1.1. Напомним, что (абстрактная) *сигнатура* — это тройка $\sigma := (F, P, \mathfrak{a})$, где F и P — некоторые (возможно, пустые) множества, а $\mathfrak{a}$ — отображение из $F \cup P$ в ω.

Под *n-местной операцией* и *n-местным предикатом* на B-множестве A мы будем понимать нерастягивающие отображения $f : A^n \to A$ и $p : A^n \to B$ соответственно. По определению отображения f и p *нерастягивающие*, если

$$d\big(f(a_0, \dots, a_{n-1}), f(a'_0, \dots, a'_{n-1})\big) \leqslant \bigvee_{k=0}^{n-1} d(a_k, a'_k),$$

$$d_s\big(p(a_0, \dots, a_{n-1}), p(a'_0, \dots, a'_{n-1})\big) \leqslant \bigvee_{k=0}^{n-1} d(a_k, a'_k)$$

для любых $a_0,\ a'_0, \dots, a_{n-1},\ a'_{n-1} \in A$, где d — это B-метрика множеств A и d_s — *симметрическая разность* на B, т. е. $d_s(b_1, b_2) := b_1 \vartriangle b_2$ (см. 2.1.5).

7.1.2. *Алгебраической B-системой сигнатуры* σ называют пару (A, ν), где A — непустое B-множество, называемое *основным*, а ν — такое отображение, что $\operatorname{dom}(\nu) = F \cup P$, причем $\nu(f)$ есть $\mathfrak{a}(f)$-местная операция на A при всех $f \in F$, а $\nu(p)$ есть $\mathfrak{a}(p)$-местный предикат на A для каждого $p \in P$. Нерастягивающее отображение из A^n в B именуют также *B-предикатом* или *B-значным предикатом.* Отображение ν называют *интерпретирующим* и для удобства иногда пишут f^ν и p^ν вместо $\nu(f)$ и $\nu(p)$. Сигнатуру алгебраической B-системы $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ мы часто будем обозначать через $\sigma(\mathfrak{A})$, а основное множество A — через $|\mathfrak{A}|$. Поскольку $A^0 = \{\varnothing\}$, то нульместные операции и предикаты на A — это отображения из $\{\varnothing\}$ в множество A и в алгебру B соответственно. Будем отождествлять отображение $g : \{\varnothing\} \to A \cup B$ с элементом $g(\varnothing)$. Таким образом, нульместные операции на A — суть выделенные элементы A, а множество всех нульместных предикатов на A есть булева алгебра B. Если $F := \{f_1, \dots, f_n\}$ и $P := \{p_1, \dots, p_m\}$, то алгебраическую B-систему сигнатуры σ часто записывают в виде $(A, \nu(f_1), \dots, \nu(f_n), \nu(p_1), \dots, \nu(p_m))$ и даже $(A, f_1, \dots, f_n,\ p_1, \dots, p_m)$, а вместо $\sigma = (F, P, \mathfrak{a})$ используют обозначение $\sigma = (f_1, \dots, f_n,\ p_1, \dots, p_m)$.

7.1.3. Рассмотрим два важных частных случая.

(1) Если B — двухэлементная булева алгебра $\{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$, то вместо алгебраической B-системы говорят о *двузначной системе* или просто об *алгебраической системе.* В этом случае в качестве B-множества получаются произвольные множества, а n-местные операция и предикат на B-множестве A специализируются как произвольное отображение из A^n в A и любая характеристическая функция

$p : A^n \to \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$, отождествляемая с множеством $\{x \in A^n : p(x) = \mathbb{1}\}$. Значит, алгебраическая система сигнатуры σ — это пара (A, ν), где A — непустое множество, а ν — функция из $\operatorname{dom}(\nu) = F \cup P$ в $\mathbb{V}$ такая, что $\nu(f) : A^{\mathfrak{a}(f)} \to A$, $\nu(p) \subset A^{\mathfrak{a}(p)}$ $(f \in F,\ p \in P)$.

(2) С другой стороны, если (A, ν) — алгебраическая система сигнатуры σ и $A \subset \mathbb{V}^{(B)}$, то, рассматривая A как B-множество (с B-метрикой $d(a, a') := [\![a = a']\!]^* = [\![a \neq a']\!]$ $(a, a' \in A)$), для каждого $p \in P$ можно определить n-местный B-предикат $\nu'(p)$ на A, $n := \mathfrak{a}(p)$, по формуле (см. 5.6.5)

$$\nu'(p) := (a_0, \dots, a_{n-1}) \mapsto \operatorname{dist}((a_0, \dots, a_{n-1}), \nu(p)).$$

Нерастягиваемость отображения $\nu'(p) : A^n \to B$ очевидна. Пусть, кроме того, $\nu(f)$ — нерастягивающее отображение для всех $f \in F$. Положим $\nu'(f) := \nu(f)$, $f \in F$. Тогда (A, ν') — алгебраическая B-система.

Разумеется, что рассмотрение конкретных алгебраических систем проходит достаточно свободно и без лишнего и тягостного педантизма. Вместо торжественного выписывания формальных деталей сигнатуры, обычно указывают лишь наиболее важные символы и даже отождествляют всю алгебраическую систему с ее основным множеством. Такая практика представляет собой еще одну неотъемлемую привилегию свободно работающего математика.

7.1.4. Алгебраическую B-систему $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ именуют *расширенной* (*разложимой*), если A есть расширенное (разложимое) B-множество (5.6.3). Назовем B-значный предикат p на множестве A *достоверным*, если существует такой элемент $x \in A$, что $p(x) = \mathbb{1}$.

Нерастягивающее отображение p из расширенного B-множества A в B является достоверным B-значным предикатом в том и только в том случае, если $\mathbb{1} = \bigvee\{p(x) : x \in A\}$.

$\triangleleft$ Действительно, если выполнено указанное условие, то найдутся семейство $(x_\xi) \subset A$ и разбиение единицы $(b_\xi) \subset B$ такие, что $p(x_\xi) \geqslant b_\xi$. Если $x := \operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, то $p(x) = \mathbb{1}$. $\triangleright$

7.1.5. С каждой алгебраической B-системой $\mathfrak{A}$ можно связать алгебраическую систему $\overline{\mathfrak{A}}$ с тем же основным множеством $|\overline{\mathfrak{A}}| := |\mathfrak{A}|$, интерпретирующее отображение которого $\overline{\nu}$ определено следующим образом. Если f — функциональный символ, то $\overline{\nu}(f) := \nu(f)$; если же p — предикатный символ и $n = \mathfrak{a}(p)$, то $\overline{\nu}(p) := \{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in A^n : p(x_0, \dots, x_{n-1}) = \mathbb{1}\}$. Ясно, что предикат $\overline{\nu}(p)$ может оказаться пустым для некоторого p. Говорят, что алгебраическая система $\overline{\mathfrak{A}}$ есть *очистка* $\mathfrak{A}$ или что $\overline{\mathfrak{A}}$ получается из $\mathfrak{A}$ *процедурой очистки.*

Если (A, ν) — алгебраическая B-система и $(A, \overline{\nu})$ — ее очистка, то для каждого достоверного предиката p^ν имеем

$$p^\nu : x \mapsto \operatorname{dist}(x, \overline{\nu}(p))^* \quad (x \in A^{\mathfrak{a}(p)}).$$

$\triangleleft$ В силу теоремы о реализации B-множеств (см. 5.7.6) B-множество A допускает расширение $A' \subset \mathbb{V}^{(B)}$, а p^ν допускает единственное продолжение $\nu'(p)$ до B-значного предиката на A'. При этом $\nu'(p)(x) = \operatorname{dist}(x, \operatorname{mix}(\overline{\nu}(p)))^* = \operatorname{dist}(x, \overline{\nu}(p))^* = [\![x \in p^\nu{\uparrow}]\!]$ $\ (x \in A^{\mathfrak{a}(p)})$. Отсюда и вытекает требуемое, ибо допущение $A \subset A'$ не ограничивает общности. $\triangleright$

Сформулированное предложение позволяет отождествить алгебраическую B-систему с достоверными предикатами с некоторой алгебраической системой, а именно с ее очисткой. Естественно спросить: а какие алгебраические системы получаются описанной процедурой очистки из разложимых (расширенных) алгебраических B-систем? Ответ на этот вопрос будет дан в следующем параграфе в терминах конгруэнций алгебраической системы (см. 7.2.6).

7.1.6. Рассмотрим конкретные примеры алгебраических B-систем. Напомним, что ассоциативное кольцо R называют *булевым кольцом*, если всякий его элемент *идемпотентен*, т. е. если $(\forall\, x \in R)\,(x^2 = x)$. Булево кольцо с единицей является булевой алгеброй, и наоборот, всякая булева алгебра B является булевым кольцом с единицей. При этом кольцевые нуль и единица совпадают с булевыми нулем и единицей соответственно (см. 2.4.1).

(1) Пусть B_0 — некоторая булева алгебра и X — унитарный модуль над булевым кольцом B_0. Пусть B — пополнение алгебры B_0, а $\jmath$ — изоморфизм B_0 на плотную подалгебру B. Положим по определению

$$d_\jmath(x,y) := \bigwedge\{\jmath(b) : b^* x = b^* y, b \in B_0\} \quad (x, y \in X).$$

Нетрудно видеть, что $d_\jmath$ есть B-полуметрика на X. Проверим, например, неравенство треугольника. Если $b^*x = b^*z$ и $c^*z = c^*y$, то для $e := b^* \cdot c^* = b^* \wedge c^* = (b \vee c)^*$ будет $ex = ez$ и $ey = ez$. Следовательно, $ex = ey$ и $d_\jmath(x,y) \leqslant e \leqslant \jmath(b \vee c) = \jmath(b) \vee \jmath(c)$ и, в силу произвольности b и c, получим $d_\jmath(x,y) \leqslant d_\jmath(x,z) \vee d_\jmath(z,y)$. Назовем модуль X *латерально точным*, если для любого разбиения единицы (b_ξ) в B_0 из $(\forall\, \xi)\,(b_\xi x = 0)$ следует $x = 0$, каков бы ни был элемент $x \in X$. Понятно, что для латерально точного унитарного B_0-модуля X полуметрика $d_\jmath$ является метрикой. Аналогично неравенству треугольника для $d_\jmath$ можно установить и нерастягиваемость модульных операций:

$$d_\jmath(x+u, y+v) \leqslant d_\jmath(x,y) \vee d_\jmath(u,v) \quad (x,y,u,v \in X),$$
$$d_\jmath(bx, cy) \leqslant d_\jmath(x,y) \vee d_s(b,c) \quad (x,y \in X;\ b,c \in B).$$

Из последнего неравенства следует, в частности,

$$d_\jmath(bx, by) \leqslant d_\jmath(x,y) \quad (b \in B;\ x,y \in X).$$

Кроме того, очевидно, что $d_\jmath(-x,-y) = d_\jmath(x,y)$. Таким образом, множество X с операциями $+$, $-$ и с унарными операциями умножения на всевозможные $b \in B_0$ есть алгебраическая B-система.

(2) Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Рассмотрим множество всех его идемпотентных элементов $B_0 := \{e \in R : e \cdot e = e\}$. Тогда B_0 — булево кольцо с единицей и R — модуль над B_0. Если B и $\jmath$ те же, что и в (1), то на R возникает B-полуметрика $d_\jmath$. Естественно определена *латеральная точность* R над B_0. В силу (1) мы получаем, что коммутативное кольцо R с единицей, латерально точное над подкольцом своих идемпотентов B_0, является алгебраической B-системой сигнатуры $(+, -, \cdot, \mathbb{1})$.

(3) Пусть C — некоторая булева алгебра, а $\imath$ — гомоморфизм булевой алгебры B_0 в C. Поскольку $\imath(B_0)$ — подкольцо булева кольца C, то на C естественно определена структура унитарного модуля над B_0. Если B и $\jmath$ те же, что и в (1), то B-полуметрика $d_\jmath$ имеет вид

$$d_\jmath(x,y) := \bigwedge\{\jmath(b) : \imath(b^*)x = \imath(b^*)y\}.$$

Модуль C будет латерально точным, если $\imath$ — полный мономорфизм.

Ввиду указанной выше связи между булевыми и кольцевыми операциями булева алгебра C является алгебраической B-системой сигнатуры $(\vee, \wedge, *, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ в случае полного мономорфизма $\imath$. Эта система будет расширенной, если, например, B_0 и C — полные булевы алгебры.

7.1.7. Обратимся к B-значной интерпретации языков первого порядка. Пусть $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ — алгебраическая B-система сигнатуры $\sigma := \sigma(\mathfrak{A}) := (F, P, \mathfrak{a})$.

Пусть $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ — формула сигнатуры σ с n свободными переменными и $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$. Значение истинности $|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \in B$ формулы φ в системе $\mathfrak{A}$ при фиксированных значениях $a_0, \dots, a_{n-1}$ переменных $x_0, \dots, x_{n-1}$ мы определим естественным образом индукцией по длине формулы φ. Именно, рассматривая пропозициональные связки и кванторы, положим:

$$|\varphi \wedge \psi|^{\mathfrak{A}} (a_0, \dots, a_{n-1}) := |\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \wedge |\psi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1});$$

$$|\varphi \vee \psi|^{\mathfrak{A}} (a_0, \dots, a_{n-1}) := |\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \vee |\psi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1});$$

$$|\varphi \to \psi|^{\mathfrak{A}} (a_0, \dots, a_{n-1}) := |\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \Rightarrow |\psi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1});$$

$$|\neg\varphi|^{\mathfrak{A}} (a_0, \dots, a_{n-1}) := |\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1})^*;$$

$$|(\forall\, x_0)\varphi|^{\mathfrak{A}} (a_1, \dots, a_{n-1}) := \bigwedge_{a_0 \in A} |\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1});$$

$$|(\exists\, x_0)\varphi|^{\mathfrak{A}} (a_1, \dots, a_{n-1}) := \bigvee_{a_0 \in A} |\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}).$$

Необходимо, конечно, рассмотреть и случай атомарных формул. Пусть $p \in P$ — некоторый m-местный предикатный символ, $q \in P$ — нульместный предикатный символ, а $t_0, \dots, t_{m-1}$ — термы сигнатуры σ, принимающие значения $b_0, \dots, b_{m-1}$ при заданных значениях $a_0, \dots, a_{n-1}$ переменных $x_0, \dots, x_{n-1}$. Положим по определению

$$\begin{aligned} &|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) := \nu(q), && \text{если } \varphi := q^{\nu}; \\ &|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) := d(b_0, b_1)^*, && \text{если } \varphi := (t_0 = t_1); \\ &|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) := p^{\nu}(b_0, \dots, b_{m-1}), && \text{если } \varphi := p^{\nu}(t_0, \dots, t_{m-1}), \end{aligned}$$

где d — это B-метрика на множестве A.

Говорят, что формула $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ *истинна в системе* $\mathfrak{A}$ *при заданных значениях* $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ *переменных* $x_0, \dots, x_{n-1}$ (или, короче, $\varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ *истинна в* $\mathfrak{A}$) и пишут $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$, если $|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = \mathbb{1}_B$. При $B := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ мы получаем обычное определение истинности формулы в алгебраической системе (см. книги Ю. Л. Ершова и Е. А. Палютина [60], А. И. Мальцева [144]).

Напомним, что замкнутую формулу φ сигнатуры σ называют *тождественно истинной*, если она выполнена на любой алгебраической 2-системе сигнатуры σ.

7.1.8. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— произвольная алгебраическая* B*-система. Тогда имеют место следующие утверждения*:

(1) *всякая теорема исчисления предикатов истинна в* $\mathfrak{A}$;

(2) *каждая тождественно истинная замкнутая формула сигнатуры* $\sigma(\mathfrak{A})$ *истинна в* $\mathfrak{A}$.

$\lhd$ (1): Здесь следует убедиться, что аксиомы исчисления предикатов истинны в $\mathfrak{A}$, а правила вывода не нарушают истинности в $\mathfrak{A}$ (ср. 4.1.8). Для этого нужно лишь проследить за вычислениями булевых значений истинности (см. 1.1.10).

(2): Если замкнутая формула φ не выполнена на $\mathfrak{A}$, то $b := |\varphi|^{\mathfrak{A}} < \mathbb{1}_B$. Пусть $h : B \to \mathbb{2} := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ — булев гомоморфизм, причем $h(b) = \mathbb{0}$. Существование такого h следует из того, что идеал $[\mathbb{0}, b]$ можно продолжить до максимального идеала, который и берут в качестве $h^{-1}(\mathbb{0})$, см. теорему Крулля и ее следствие 2.4.4 (1, 3). Если ν — интерпретирующее отображение $\mathfrak{A}$, то положим $\nu'(f) := f^\nu$ для функциональных символов и $\nu'(p) := h \circ p^\nu$ для предикатных символов. Тогда $\mathfrak{A}' := (|\mathfrak{A}|, \nu')$ — алгебраическая $\mathbb{2}$-система и $|\varphi|^{\mathfrak{A}'} = h(b) = \mathbb{0}$, т. е. формула φ не выполнена на $\mathfrak{A}'$ и не может быть тождественно истинной. $\rhd$

7.1.9. Рассмотрим алгебраические B-системы $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ и $\mathfrak{C} := (C, \mu)$ одной и той же сигнатуры σ. Отображение $h : A \to C$ называют *гомоморфизмом алгебраической B-системы $\mathfrak{A}$ в алгебраическую B-систему $\mathfrak{C}$*, если для любых $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ верно

(1) $d_C(h(a_1), h(a_2)) \leqslant d_A(a_1, a_2)$;

(2) $h(f^\nu) = f^\mu$, если $\mathfrak{a}(f) = 0$;

(3) $h(f^\nu(a_0, \dots, a_{n-1})) = f^\mu(h(a_0), \dots, h(a_{n-1}))$, если $0 \neq n := \mathfrak{a}(f)$;

(4) $p^\nu(a_0, \dots, a_{n-1}) \leqslant p^\mu(h(a_0), \dots, h(a_{n-1}))$, где $n := \mathfrak{a}(p)$.

Гомоморфизм h называют *сильным*, если

(5) для произвольного $p \in P$, $\mathfrak{a}(p) := n \neq 0$, и для любых $c_0, \dots, c_{n-1} \in C$ справедливо неравенство

$$p^\mu(c_0, \dots, c_{n-1}) \geqslant \bigvee_{a_0, \dots, a_{n-1} \in A} \big\{p^\nu(a_0, \dots, a_{n-1}) \wedge$$
$$\wedge d_C(c_0, h(a_0)) \wedge \dots \wedge d_C(c_{n-1}, h(a_{n-1}))\big\}.$$

Если гомоморфизм h инъективен, а условия (1) и (4) выполнены с равенством, то говорят, что h — *изоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{C}$*. Ясно, что любой сюръективный изоморфизм h и, в частности, отображение $I_A : A \to A$ являются сильными гомоморфизмами. Суперпозиция (сильных) гомоморфизмов есть (сильный) гомоморфизм. Если h — гомоморфизм и существует отображение h^{-1}, также являющееся гомоморфизмом, то h — изоморфизм. Отметим вновь, что в случае двухэлементной булевой алгебры $B := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ возникают обычные понятия гомоморфизма, сильного гомоморфизма, изоморфизма (см. книги Ю. Л. Ершова и Е. А. Палютина [60], А. И. Мальцева [144]).

7.1.10. Рассмотрим некоторое множество Φ формул одной и той же фиксированной сигнатуры σ. Определим категорию B-AS(Φ) следующим образом. Класс $\operatorname{Ob} B$-AS(Φ) состоит из всех алгебраических B-систем сигнатуры σ, на каждой из которых истинны все формулы из Φ. Класс $\operatorname{Mor} B$-AS(Φ) — класс всех гомоморфизмов алгебраических B-систем из $\operatorname{Ob} B$-AS(Φ) с обычной суперпозицией в качестве композиции морфизмов. Ясно, что изоморфизм в категории B-AS(Φ) — это B-изометрический сильный гомоморфизм. Обозначим символом B-CAS(Φ) полную подкатегорию категории B-AS(Φ), в которой объекты — расширенные алгебраические B-системы.

7.2. Булевы алгебры конгруэнций

В алгебраической системе B-структура связана с выделением полной булевой алгебры конгруэнций. Последняя же часто порождена отношением дизъюнктности. Соответствующие взаимосвязи составляют содержание текущего параграфа.

7.2.1. Рассмотрим произвольную алгебраическую систему $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ сигнатуры $\sigma := (F, P, \mathfrak{a})$. Отношение эквивалентности ρ на множестве A называют *конгруэнцией* системы $\mathfrak{A}$, если для каждого $f \in F$ и для любых $x_0, \ldots, x_{n-1}$, $y_0, \ldots, y_{n-1} \in A$, $n = \mathfrak{a}(f)$, из соотношений $(x_0, y_0) \in \rho, \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}) \in \rho$ вытекает $(f^\nu(x_0, \ldots, x_{n-1}),\ f^\nu(y_0, \ldots, y_{n-1})) \in \rho$. Множество всех конгруэнций на алгебраической системе $\mathfrak{A}$ будет обозначено символом $\mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$. Введем отношение порядка в $\mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$ посредством формулы

$$\rho_1 \leqslant \rho_2 \leftrightarrow \rho_1 \subset \rho_2 \quad (\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{Cong}(\mathfrak{A})).$$

Ясно, что *тождественная конгруэнция* $I_A := \{(x, x) : x \in A\}$ и *тривиальная, «неразборчивая» конгруэнция* $A \times A$ являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами $\mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$.

Теорема. *Упорядоченная система* $\mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$ *является полной решеткой. Точная нижняя граница множества* $\mathscr{P} \subset \mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$ *совпадает с пересечением* $\bigcap\{\rho : \rho \in \mathscr{P}\}$. *Точная верхняя граница множества* $\mathscr{P} \subset \mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$ *представляет собой объединение всевозможных композиций* $\rho_1 \circ \ldots \circ \rho_n$, *где* $\{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$ — *произвольное конечное подмножество* $\mathscr{P}$.

Из этой теоремы видно, что для $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$ конгруэнция $\rho_1 \vee \rho_2$ совпадает с объединением всевозможных отношений вида $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_1 \circ \ldots \circ \rho_1 \circ \rho_2$. Следовательно, если ρ_1 и ρ_2 перестановочны, т. е. $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$, то $\rho_1 \vee \rho_2 = \rho_1 \circ \rho_2$. Наоборот, если $\rho_1 \vee \rho_2 = \rho_1 \circ \rho_2$, то конгруэнции ρ_1 и ρ_2 перестановочны.

7.2.2. Множество конгруэнций Λ на алгебраической системе $\mathfrak{A}$ называют *независимым* (*конечно независимым*), если для любых семейств (конечных семейств) $(\lambda_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в Λ и $(a_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в A существует такой элемент $a \in A$, что $(a, a_\xi) \in \lambda_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$.

Множество Λ называют *полным*, если (a) $\inf(\Lambda) := \bigcap(\Lambda) = I_A$ и (b) для любого $p \in P$ и для произвольной n-ки $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in A^n$, $n = \mathfrak{a}(p)$, из соотношения $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \notin \nu(p)$ вытекает существование такой конгруэнции $\lambda \in \Lambda$, что $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \notin \nu(p)$, как только $(x_0, y_0) \in \lambda, \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}) \in \lambda$ (см. книгу А. И. Мальцева [144]).

Условие (b) в определении полного множества конгруэнций удобно формулировать в терминах перемешивания. Рассмотрим семейство $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ в множестве A. Если для некоторого $a \in A$ выполняется $(a, a_\lambda) \in \lambda$ при всех $\lambda \in \Lambda$, то естественно сказать, что a есть *перемешивание семейства* (a_λ) *относительно* Λ.

Множество $U \subset A^n$ называют *устойчивым относительно* Λ*-перемешивания*, если для любого семейства $((a_\lambda^0, \ldots, a_\lambda^{n-1}))$ в U выполняется $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in U$, где a_k есть перемешивание (a_λ^k) относительно Λ.

7.2.3. *Независимое множество конгруэнций* Λ *алгебраической системы* $\mathfrak{A}$ *является полным в том и только в том случае, если* $\inf(\Lambda) = I_A$ *и любой предикат* $\nu(p)$, $p \in P$, *устойчив относительно* Λ*-перемешиваний.*

$\lhd$ В самом деле, допустим, что все предикаты устойчивы относительно Λ-перемешиваний. Пусть $p \in P$, $n = \mathfrak{a}(p)$, $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \notin \nu(p)$, и тем не менее для всякого $\lambda \in \Lambda$ существуют такие $(y_\lambda^0, \dots, y_\lambda^{n-1}) \in \nu(p)$, что $(x_k, y_\lambda^k) \in \lambda$ $(k = 0, \dots, n-1)$. Пусть y_k — перемешивание семейства $(y_{\lambda,k})_{\lambda\in\Lambda}$ относительно Λ. Тогда $(y_0, \dots, y_{n-1}) \in \nu(p)$. В то же время $(x_k, y_k) \in \lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Поэтому $x_k = y_k$ $(k = 0, \dots, n-1)$, ибо $\bigcap \Lambda = I_A$. Тем самым мы приходим к противоречию.

Наоборот, предположим, что Λ — полное множество. Возьмем $p \in P$ и семейство n-ок $(a_{\lambda,0}, \dots, a_{\lambda,n-1})$, содержащееся в $\nu(p)$. Пусть a_k — перемешивание семейства $(a_{\lambda,k})_{\lambda\in\Lambda}$ относительно Λ. Если $(a_0, \dots, a_{n-1}) \notin \nu(p)$, то ввиду полноты Λ найдется конгруэнция $\lambda \in \Lambda$, для которой $(a_{\lambda,0}, \dots, a_{\lambda,n-1}) \notin \nu(p)$. Это противоречит выбору $(a_{\lambda,0}, \dots, a_{\lambda,n-1})$. Значит, $\nu(p)$ устойчив относительно перемешиваний. Как видно, необходимость верна без предположения о независимости Λ. $\rhd$

7.2.4. Условимся называть *булевой алгеброй конгруэнций* каждую из таких булевых алгебр $\mathscr{B} \subset \mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$, что в $\mathscr{B}$ точные нижние границы произвольных множеств наследуются из решетки $\mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$ и наименьшая конгруэнция I_A служит нулем $\mathscr{B}$. Следует подчеркнуть, что булево дополнение ρ^* элемента $\rho \in \mathscr{B}$ может не быть дополнением ρ в решетке $\mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$, т. е. точная верхняя граница конгруэнций ρ и ρ^* в $\mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$ может оказаться меньше $A \times A$.

Базой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ мы назовем всякую полную булеву алгебру конгруэнций $\mathscr{B} \subset \mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$ такую, что любой предикат $\nu(p)$ $(p \in P)$ устойчив относительно Λ^*-перемешиваний для любого разбиения единицы $\Lambda \subset \mathscr{B}$, где $\Lambda^* := \{b^* : b \in \Lambda\}$. Алгебраическую систему с базой $\mathscr{B}$ называют *расширенной* (*разложимой*), если для любого (соответственно любого конечного) разбиения единицы $\Lambda \subset \mathscr{B}$ множество конгруэнций Λ^* является независимым.

Алгебраическую B-систему $\mathfrak{A}$ называют *наполненной*, если для любого $\mathbb{0} \neq b \in B$ существуют элементы x, $y \in A$, $x \neq y$, такие, что $d(x, y) \leqslant b$. Понятно, что разложимая B-система наполнена, хотя обратное, вообще говоря, не имеет места.

7.2.5. *Алгебраическая система* $\mathfrak{A}$ *имеет базу* $\mathscr{B}$, *изоморфную полной булевой алгебре* B, *в том и только в том случае, если существует инъективное отображение* $h : B \to \mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$, *удовлетворяющее условиям*:

(1) h *сохраняет точные нижние границы любых множеств и* $h(\mathbb{0}) = I_A$;

(2) *любой предикат* $\nu(p)$ $(p \in P)$ *устойчив относительно* $h(\Lambda^*)$*-перемешиваний для всякого разбиения единицы* $\Lambda \subset B$.

При этом $\mathfrak{A}$ *расширена* (*разложима*) *тогда и только тогда, когда множество* $h(\Lambda^*)$ *независимо для каждого* (*для любого конечного*) *разбиения единицы* $\Lambda \subset B$.

$\lhd$ Следует непосредственно из определений 7.2.2 и 7.2.4. $\rhd$

7.2.6. Теорема. *Алгебраическая система* $\mathfrak{A}$ *в том и только в том случае получается процедурой очистки из некоторой наполненной алгебраической* B*-системы* $\mathfrak{A}'$, *если* $\mathfrak{A}$ *имеет базу, изоморфную* B. *При этом* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{A}'$ *расширены* (*разложимы*) *или нет одновременно.*

$\lhd$ Пусть $\mathfrak{A}'$ — наполненная алгебраическая B-система. Каждому $b \in B$ поставим в соответствие отношение $h(b) := \{(x, y) \in A^2 : d(x, y) \leqslant b\}$. Так как $\nu(f)$ — нерастягивающее отображение для каждого $f \in F$, то $h(b)$ будет конгруэнцией на A. Очевидно, что $h(\mathbb{0}) = I_A$ и h сохраняет точные нижние границы. Инъективность h вытекает из наполненности $\mathfrak{A}$. Допустим, что алгебраическая система $\mathfrak{A}$ получается из $\mathfrak{A}'$ процедурой очистки. Заметим, что множество вида $\{z \in A : p(z) = \mathbb{1}\}$ устойчиво относительно любых перемешиваний в B-множестве A. Теперь из 7.2.5 видно, что у $\mathfrak{A}$ есть база, изоморфная B.

Наоборот, пусть алгебраическая система $\mathfrak{A}$ имеет базу $\mathscr{B}$ и существует булев изоморфизм h из B на $\mathscr{B}$. Положим по определению

$$d(x,y) := \bigwedge\{b \in B : (x,y) \in h(b)\} \quad (x,y \in A).$$

Если b_1, $b_2 \in B$ таковы, что $(x,z) \in h(b_1)$ и $(z,y) \in h(b_2)$, то $(x,y) \in h(b_2) \circ h(b_1)$. Но $h(b_2) \circ h(b_1) \subset h(b_1 \vee b_2)$ и поэтому $d(x,y) \leqslant b_1 \vee b_2$. Переходя к инфимуму по указанным b_1 и b_2 и пользуясь дистрибутивным законом 2.1.6 (1), получим $d(x,y) \leqslant d(x,z) \vee d(z,y)$. Теперь ясно, что d — булева полуметрика на A. Так как h сохраняет точные нижние границы, то

$$h(d(x,y)) = \bigcap\{h(b) : b \in B \wedge (x,y) \in h(b)\}.$$

Отсюда мы заключаем, что $d(x,y) \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $(x,y) \in h(b)$. В частности, $d(x,y) = \mathbb{0}$ влечет $x = y$, а для $\mathbb{0} \neq b \in B$ можно подыскать такие $x, y \in A$, что $x \neq y$ и $d(x,y) \leqslant b$.

Осталось показать, что если Λ — разбиение единицы в B, то для семейства $(a_b)_{b\in\Lambda} \subset A$ перемешивание относительно $h(\Lambda^*)$ совпадает с перемешиванием в смысле B-метрики d, т. е. с $\mathrm{mix}_{b\in\Lambda}(ba_b)$. Но это тривиально вытекает из уже доказанного: $(a, a_b) \in h(b^*) \leftrightarrow d(a, a_b) \leqslant b^* \leftrightarrow b \wedge d(a, a_b) = \mathbb{0}$. Определим теперь $\mathfrak{A}' := (A', \nu')$, полагая $A' := A$, $\nu'(f) = \nu(f)$, $f \in F$ и

$$\nu'(p) : x \mapsto \mathrm{dist}(x, \nu(p)) \quad (p \in P,\ x \in A^{\mathfrak{a}(p)}).$$

Если $f \in F$ и $n = \mathfrak{a}(f)$, то для любого $b \in B$ и элементов x_0, $y_0, \dots, x_{n-1}$, $y_{n-1} \in A$ из соотношений $(x_k, y_k) \in h(b)$, $k < n$, следует, что $(f^\nu(x_0, \dots, x_{n-1}),$ $f^\nu(y_0, \dots, y_{n-1})) \in h(b)$. Это означает, что

$$d(f^\nu(x_0, \dots, x_{n-1}),\ f^\nu(y_0, \dots, y_{n-1})) \leqslant b.$$

Переходя к точной нижней границе по b и замечая, что

$$\bigwedge\{b : (x_k, y_k) \in h(b),\, k < n\} = \bigvee_{k=0}^{n-1} d(x_k, y_k),$$

мы заключаем, что $f^\nu = \nu(f)$ — нерастягивающее отображение. Возьмем $p \in P$, $\mathfrak{a}(p) = m$ и элементы $x := (x_0, \dots, x_{m-1})$ и $y := (y_0, \dots, y_{m-1})$ из A^m. Тогда

$$d(x,y) \wedge \mathrm{dist}(x, \nu(p)) \leqslant \mathrm{dist}(y, \nu(p)),$$

откуда и видна нерастягиваемость $\nu'(p)$. Кроме того, в силу свойства устойчивости $\nu(p)$ (см. 7.1.5) будет $\nu(p) = \{x \in A^m : \nu'(p)(x) = \mathbb{1}\}$. Итак, $\mathfrak{A}$ есть очистка наполненной алгебраической B-системы $\mathfrak{A}'$. Расширенность систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ означает, что Λ^*, где Λ — разбиения единицы в $\mathscr{B}$, есть независимое множество и что в (A, d) существуют любые перемешивания. Однако последние два утверждения эквивалентны. По аналогичным соображениям эквивалентны также утверждения о разложимости этих двух систем. $\rhd$

7.2.7. Согласно 7.2.5 и 7.2.6 структура алгебраической B-системы восстанавливается по полной булевой алгебре конгруэнций. С другой стороны, один из общих способов порождения полных булевых алгебр связан с отношением дизъюнктности. Рассмотрим некоторые простейшие взаимосвязи этих понятий. Начнем с некоторых напоминаний.

Возьмем множества X и Y. Пусть Φ — соответствие из X в Y. *Поляра* $\pi_\Phi(A)$ множества $A \subset X$ и *обратная поляра* $\pi_\Phi^{-1}(C)$ множества $C \subset Y$ относительно соответствия Φ вводятся формулами (см. 1.2.7):

$$\pi_\Phi(A) := \bigcap_{x \in A} \Phi(x), \quad \pi_\Phi^{-1}(C) := \bigcap_{y \in C} \Phi^{-1}(y).$$

Множество $K \subset Y$ называют Φ-*компонентой* (или просто *компонентой*, когда ясно, о каком Φ идет речь), если $K = \pi_\Phi(\pi_\Phi^{-1}(K))$, или, что то же, $K = \pi_\Phi(A)$ для некоторого $A \subset X$. Совокупность всех Φ-компонент обозначают символом $\mathfrak{K}_\Phi(Y)$. Наименьшую компоненту, содержащую данное множество $C \subset Y$, обозначают символом $[C]$. При этом $[C] = \pi_\Phi(\pi_\Phi^{-1}(C))$.

7.2.8. Теорема. *Множество $\mathfrak{K}_\Phi(Y)$ при упорядочении по включению становится полной решеткой. Точные границы произвольного семейства $(K_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов в $\mathfrak{K}_\Phi(Y)$ вычисляются по формулам*

$$\bigwedge_{\xi\in\Xi} K_\xi = \bigcap_{\xi\in\Xi} K_\xi, \quad \bigvee_{\xi\in\Xi} K_\xi = \left[\bigcup_{\xi\in\Xi} K_\xi\right].$$

Взятие обратной поляры $K \mapsto \pi_\Phi^{-1}(K)$ является антитонной биекцией $\mathfrak{K}_\Phi(Y)$ на $\mathfrak{K}_{\Phi^{-1}}(X)$.

7.2.9. Соответствие Δ из X в X называют *отношением дизъюнктности* или *дизъюнктностью* (в множестве X), если выполнены условия:

(1) $\Delta = \Delta^{-1}$, т. е. Δ симметричное отношение;

(2) $\Delta \cap I_X \subset \Theta \times \Theta$, где $\Theta := \pi_\Delta(X)$ — наименьшая Δ-компонента;

(3) $[x] \cap [y] \subset \Theta \to (x, y) \in \Delta$, где $[u] := \pi_\Delta(\pi_\Delta(\{u\}))$ — наименьшая Δ-компонента, содержащая u.

Дизъюнктность Δ называют *простой*, если она подчинена дополнительному требованию

(4) $(x, y) \in \Delta \to x \in \Theta \vee y \in \Theta$.

Ввиду симметричности Δ, решетки $\mathfrak{K}_\Delta(X)$ и $\mathfrak{K}_{\Delta^{-1}}(X)$ совпадают. Если $A \subset X$, то поляру $\pi_\Delta(A)$ называют *дизъюнктным дополнением* A и обозначают также $A^\perp$. Соотношения $x \in \pi_\Delta(A)$ и $C \subset \pi_\Delta(A)$ записывают в виде $x \perp A$ и $C \perp A$. Заметим также, что $A^{\perp\perp} := (A^\perp)^\perp = [A]$.

7.2.10. Теорема. *Множество $\mathfrak{K}_\Delta(X)$ всех Δ-компонент относительно дизъюнктности Δ, упорядоченное по включению, является полной булевой алгеброй. Булево дополнение компоненты совпадает с ее дизъюнктным дополнением.*

$\lhd$ Доказательство см. в книге Г. П. Акилова и С. С. Кутателадзе [7, 0.2.8, предложение I]. $\rhd$

7.2.11. Рассмотрим множество X с фиксированной дизъюнктностью Δ. Пусть $\jmath$ — изоморфизм $\mathfrak{K}_\Delta(X)$ на полную булеву алгебру B. Введем отображение $s : X \to B$ по формуле $s(x) := \jmath([x])$ $(x \in X)$. Допустим, что наименьшая компонента одноточечна, т. е. $\Theta := \{\theta\} = [\theta]$ для некоторого $\theta \in X$. Будем говорить, что B-метрика d и дизъюнктность Δ на множестве X *согласованы*, если

$$d(x, \theta) = s(x) \quad (x \in X).$$

Рассмотрим отображение $\delta : (x, y) \mapsto (s(x) \wedge s(y))^*$, где элементы x, y взяты из множества X.

7.2.12. Теорема. *Пусть на множестве X заданы дизъюнктность и согласованная с ней B-метрика d. Тогда тройка $\mathfrak{X} := (X, \delta, \theta)$ является алгебраической B-системой, на которой выполнены аксиомы простой дизъюнктности* 7.2.9 (1–4).

$\vartriangleleft$ Прежде всего заметим, что

$$d(x, y)^* \wedge s(x) = d(x, y)^* \wedge d(x, \theta) \leqslant$$
$$\leqslant d(x, y)^* \wedge (d(x, y) \vee d(y, \theta)) \leqslant d(y, \theta) = s(y).$$

Отсюда видно, что s — нерастягивающее отображение. Следовательно, нерастягивающим будет и отображение δ. Итак, $\mathfrak{X}$ — алгебраическая B-система с двуместным предикатом δ и выделенным элементом θ. По определению 7.1.9 будет

$$|x \delta y|^{\mathfrak{X}} = \delta(x, y), \quad |x \neq \theta|^{\mathfrak{X}} = s(x) \quad (x, y \in X).$$

Проверим аксиомы дизъюнктности для δ. Симметричность δ очевидна. То, что $\{\theta\}$ — наименьшая компонента, видно из выкладок:

$$|x \in \pi_\delta(X) \to x = \theta|^{\mathfrak{X}} = \left(\bigwedge_{y \in X} \delta(x, y) \right) \Rightarrow s(x^*) =$$
$$= \bigvee_{y \in X} (s(x) \wedge s(y)) \vee s(x)^* = s(x)^* \vee \bigvee_{y \in X} s(y) = \mathbb{1}.$$

Ясно также, что для $x, y \in X$ верно

$$\delta(x, x) = |x \delta x|^{\mathfrak{X}} = s(x)^* = |x = \theta|^{\mathfrak{X}}.$$

Значит, выполнено условие (2) из определения дизъюнктности. Заметим далее, что

$$|u \in [x]|^{\mathfrak{X}} = s(u) \Rightarrow s(x) \quad (x, u \in X).$$

Исходя из этого, вычисляем:

$$|[x] \cap [y] = \{\theta\}|^{\mathfrak{X}} = \left(\bigwedge_{u \in X} (s(u) \Rightarrow s(x)) \wedge (s(u) \Rightarrow s(y)) \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s(u)^* = \bigwedge_{u \in X} s(u)^* \vee (s(x) \bigwedge s(y))^* = \delta(x, y).$$

Значит, $|[x] \cap [y] = \{\theta\} \to x \delta y|^{\mathfrak{X}} = \mathbb{1}$ и δ — отношение дизъюнктности. Простота δ означает, что при любых $x, y \in X$ справедливо

$$|x \delta y \to x = \theta \vee y = \theta|^{\mathfrak{X}} = \mathbb{1}$$

или, что то же самое,

$$\delta(x, y) \Rightarrow s(x)^* \vee s(y)^* = \mathbb{1}.$$

Последнее вытекает из определения δ. $\vartriangleright$

7.2.13. Пусть $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ — алгебраическая B-система, а Δ — отношение дизъюнктности на A. Предположим, что все операции системы $\mathfrak{A}$ *сохраняют дизъюнктность*, т. е. для любого функционального символа f и для любых элементов $a \in A$, $x_0, \dots, x_{n-1} \in A$ $(n := \mathfrak{a}(f))$ из соотношений $x_k \perp a$ $(k := 0, 1, \dots, n-1)$ вытекает $f^\nu(x_0, \dots, x_{n-1}) \perp a$. Если, кроме того, B-метрика и дизъюнктность Δ согласованы, то тройку (A, ν, Δ) называют *алгебраической B-системой с дизъюнктностью*.

7.3. Спуски алгебраических систем

В настоящем параграфе мы распространим операцию спуска на общие алгебраические системы и приведем несколько конкретных примеров.

7.3.1. Пусть $\sigma := (F, P, \mathfrak{a})$ — некоторая сигнатура. Из общих свойств канонического вложения класса множеств $\mathbb{V}$ в универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. 5.1.6 и 5.1.7 (1)) следует, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathfrak{a}^\wedge$ — отображение из $F^\wedge \cup P^\wedge$ в множество положительных целых чисел $\omega^\wedge$». Кроме того, $\mathbb{V}^{(B)} \models \sigma^\wedge = (F^\wedge, P^\wedge, \mathfrak{a}^\wedge)$ и, следовательно, $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\sigma^\wedge$ есть сигнатура».

Если σ — некоторая сигнатура внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то $\sigma{\downarrow}$ не будет, вообще говоря, сигнатурой в обычном смысле. В самом деле, пусть $\sigma = (F, P, \mathfrak{a})^B \in \mathbb{V}^{(B)}$ для некоторых F, P, $\mathfrak{a} \in \mathbb{V}^{(B)}$, причем $[\![\mathfrak{a} : F \cup P \to \omega^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Тогда для каждого $u \in F{\downarrow} \cup P{\downarrow}$ найдется такое счетное разбиение единицы $(b_n)_{n\in\omega} \subset B$, что $\mathfrak{a}{\downarrow}(u) = \operatorname{mix}(b_n n^\wedge)$.

Таким образом, при спуске произвольной сигнатуры возникают функциональные и предикатные символы «смешанной арности». Разумеется, можно было бы изучать более общий случай операций и предикатов смешанной арности, причем принципиальных трудностей при этом не возникло бы. Другое направление обобщения связано с рассмотрением алгебраических систем с бесконечноместными операциями и предикатами. Настоящее изложение не затрагивает подобные вопросы.

7.3.2. Прежде чем дать общие определения, рассмотрим спуск весьма простой, но очень важной алгебраической системы — двухэлементной булевой алгебры. Возьмем два произвольных элемента $0,\ 1 \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которых $[\![0 \neq 1]\!] = \mathbb{1}_B$. Можно считать, например, что $0 := \mathbb{0}_B^\wedge$ и $1 := \mathbb{1}_B^\wedge$.

Спуск C двухэлементной булевой алгебры $\{0,1\}^B \in \mathbb{V}^{(B)}$ представляет собой полную булеву алгебру, изоморфную B. Изоморфизм $\chi : B \to C$ можно выбрать так, чтобы

$$[\![\chi(b) = 1]\!] = b, \quad [\![\chi(b) = 0]\!] = b^* \quad (b \in B).$$

$\lhd$ Поскольку $0, 1 \in C$, то для каждого $b \in B$ перемешивание $c := \operatorname{mix}(b1, b^*0)$ также входит в C, причем $[\![c = 1]\!] \geqslant b$ и $[\![c = 0]\!] \geqslant b^*$. С другой стороны,

$$[\![c = 1]\!] \wedge [\![c = 0]\!] = [\![c = 1 \wedge c = 0]\!] \leqslant [\![0 = 1]\!] = \mathbb{0}.$$

Значит, $[\![c = 1]\!] = b$ и $[\![c = 0]\!] = b^*$. Полагая $\chi(b) := c$, получим отображение $\chi : B \to C$. Инъективность χ очевидна. Проверим, что χ сюръективно. Действительно, если $c \in C$, то для $b := [\![c = 1]\!]$ имеем

$$[\![\chi(b) = 0]\!] = b^* = [\![c = 0]\!], \quad [\![\chi(b) = 1]\!] = b.$$

Поэтому

$$[\![\chi(b) = c]\!] \geqslant [\![\chi(b) = 1]\!] \wedge [\![c = 1]\!] = b.$$

Аналогично $[\![\chi(b) = c]\!] \geqslant b^*$. Стало быть, $\chi(b) = c$.

Осуществим теперь спуск булевых операций из $\{0,1\}^{(B)}$. Тогда для любых x, y, $z \in C$ справедливы эквивалентности

$$z = x \wedge y \leftrightarrow [\![z = 1 \leftrightarrow x = 1 \wedge y = 1]\!] = \mathbb{1},$$
$$z = x \vee y \leftrightarrow [\![z = 0 \leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0]\!] = \mathbb{1},$$
$$x = y^* \leftrightarrow [\![x = 1 \leftrightarrow y = 0]\!] = \mathbb{1}.$$

Исходя из этих соотношений, легко проверить, что C — булева алгебра, а χ — булев изоморфизм. Покажем, к примеру, что χ сохраняет точные верхние границы любых двух элементов.

Пусть b_1, $b_2 \in B$, $b_0 := b_1 \vee b_2$ и $c_l := \chi(b_l)$ при $l := 0, 1, 2$. Тогда по определению

$$[\![c_l = 1]\!] = b_l, \quad [\![c_l = 0]\!] = b_l^* \quad (l := 0, 1, 2).$$

Следовательно,

$$[\![c_0 = 0]\!] = b_0^* = b_1^* \wedge b_2^* = [\![c_1 = 0]\!] \wedge [\![c_2 = 0]\!],$$

или, что то же самое, $[\![c_0 = 0 \leftrightarrow c_1 = 0 \wedge c_2 = 0]\!] = \mathbb{1}$. Таким образом, $c_0 = c_1 \vee c_2$ или $\chi(b_0) = \chi(b_1) \vee \chi(b_2)$. Аналогично можно установить сохранение точных нижних границ и дополнений. $\triangleright$

7.3.3. Рассмотрим теперь алгебраическую систему $\mathfrak{A}$ сигнатуры $\sigma^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, и пусть $[\![\mathfrak{A} = (A, \nu)^B]\!] = \mathbb{1}$ для некоторых A, $\nu \in \mathbb{V}^{(B)}$. Под *спуском алгебраической системы* $\mathfrak{A}$ принято понимать пару $\mathfrak{A}{\downarrow} := (A{\downarrow}, \mu)$, где μ — функция, определяемая соотношениями:

$$\mu : f \mapsto (\nu{\downarrow\!\!\uparrow}(f)){\downarrow} \quad (f \in F),$$
$$\mu : p \mapsto \chi^{-1} \circ (\nu{\downarrow\!\!\uparrow}(p)){\downarrow} \quad (p \in P).$$

Здесь χ — канонический изоморфизм булевых алгебр B и $\{0, 1\}^B$, определенный в 7.3.2.

Говоря более подробно, модифицированный спуск $\nu{\downarrow\!\!\uparrow}$ есть отображение с областью определения $\mathrm{dom}(\nu{\downarrow\!\!\uparrow}) = F \cup P$. Для каждого $p \in P$ будет $[\![\mathfrak{a}(p)^\wedge = \mathfrak{a}^\wedge(p^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$, $[\![\nu{\downarrow\!\!\uparrow}(p) = \nu(p^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$ и, следовательно,

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \nu{\downarrow\!\!\uparrow}(p) : A^{\mathfrak{a}(f)^\wedge} \to \{0, 1\}^B.$$

Теперь ясно, что $(\nu{\downarrow\!\!\uparrow}(p)){\downarrow} : (A{\downarrow})^{\mathfrak{a}(f)} \to C := \{0, 1\}^B{\downarrow}$ и можно положить $\mu(p) := \chi^{-1} \circ (\nu{\downarrow\!\!\uparrow}(p)){\downarrow}$.

7.3.4. Пусть символ $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ обозначает фиксированную формулу сигнатуры σ с n свободными переменными. Выпишем формулу $\Phi(x_0, \dots, x_{n-1}, \mathfrak{A})$ языка теории множеств, выражающую тот факт, что $\mathfrak{A} \models \varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$. Напомним, что соотношение $\mathfrak{A} \models \varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ определяет n-местный предикат в A, или, что то же самое, отображение из A^n в $\{0, 1\}$. В силу принципов максимума и переноса существует единственный элемент $|\varphi|^{\mathfrak{A}} \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что

$$[\![|\varphi|^{\mathfrak{A}} : A^{n^\wedge} \to \{0, 1\}^B]\!] = \mathbb{1},$$
$$[\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a{\uparrow}) = 1]\!] = [\![\Phi(a(0), \dots, a(n-1), \mathfrak{A})]\!] = \mathbb{1}$$

для каждого $a : n \to A{\downarrow}$. В дальнейшем вместо $|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a{\uparrow})$ мы будем писать $|\varphi|^{\mathfrak{A}}$ $(a_0, \dots, a_{n-1})$, где $a_l := a(l)$. Итак, соотношение

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \text{«}\varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \text{ истинна в модели } \mathfrak{A}\text{»}$$

равносильно следующему: $[\![\Phi(a_0, \dots, a_{n-1}, \mathfrak{A})]\!] = \mathbb{1}$.

7.3.5. Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда $\mathfrak{A}{\downarrow}$ — расширенная алгебраическая B-система сигнатуры σ. При этом для любой формулы φ сигнатуры σ выполняется*

$$\chi \circ |\varphi|^{\mathfrak{A}\downarrow} = |\varphi|^{\mathfrak{A}}{\downarrow}.$$

$\lhd$ Нам уже известно, что $A{\downarrow}$ — расширенное B-множество. Далее, модифицированный спуск ν' элемента $\nu \in \mathbb{V}^{(B)}$ есть отображение, причем $\operatorname{dom}(\nu') = F \cup P$ (см. 5.7.7 (3)). Кроме того,

$$[\![\nu'(f) : A^{\mathfrak{a}(f)^\wedge} \to A]\!] = \mathbb{1} \quad (f \in F),$$
$$[\![\nu'(p) : A^{\mathfrak{a}(p)^\wedge} \to \{0,1\}]\!] = \mathbb{1} \quad (p \in P).$$

Отсюда с учетом 5.3.3 (8) и 5.3.4 следует, что $\nu'(f){\downarrow}$ и $\nu'(p){\downarrow}$ являются нерастягивающими отображениями из $(A{\downarrow})^{\mathfrak{a}(f)}$ в $A{\downarrow}$ и из $(A{\downarrow})^{\mathfrak{a}(p)}$ в $C := \{0,1\}^B{\downarrow}$ соответственно. Значит, $(A{\downarrow}, \mu)$ — расширенная алгебраическая B-система.

Пусть теперь φ — формула сигнатуры σ и покажем, что

$$[\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = |\varphi|^{\mathfrak{A}\downarrow}(a_0,\dots,a_{n-1})$$

для любых $a_0,\dots,a_{n-1} \in A{\downarrow}$.

Тогда в силу 5.3.4 и определения χ из 7.3.2 имеют место равенства

$$|\varphi|^{\mathfrak{A}\downarrow}(a_0,\dots,a_{n-1}) = [\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}{\downarrow}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] =$$
$$= \chi^{-1}(|\varphi|^{\mathfrak{A}}{\downarrow}(a_0,\dots,a_{n-1})),$$

откуда вытекает требуемое соотношение.

Проведем индукцию по длине формулы φ. Пусть сначала φ — атомарная формула. Если $q \in P$ и $\mathfrak{a}(q) = 0$, то $[\![\nu(q^\wedge) = 0 \vee \nu(q^\wedge) = 1]\!] = \mathbb{1}$, так что $\nu'(q) \in C$ и $\mu(q) = \chi^{-1}(\nu'(q)) \in B$. По 7.3.2 $\mu(q) = [\![\chi \circ \mu(q) = 1]\!] = [\![1 = \nu(q^\wedge)]\!]$. Далее, рассмотрим термы $t_0,\dots,t_{m-1}$ сигнатуры σ, принимающие значения $b_0,\dots,b_{m-1}$ при значениях $a_0,\dots,a_{n-1}$ переменных $x_0,\dots,x_{n-1}$. Пусть $p \in P$ и $\mathfrak{a}(p) = m$. Если $\varphi(x_0,\dots,x_{n-1}) := p(t_0,\dots,t_{m-1})$, то

$$[\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = [\![\nu{\downarrow\!\!\uparrow}(p)(b_0,\dots,b_{m-1}) = 1]\!] =$$
$$= [\![\chi \circ p^{\mu}(b_0,\dots,b_{m-1}) = 1]\!] = p^{\mu}(b_0,\dots,b_{m-1}).$$

Если же $\varphi(x_0,\dots,x_{n-1}) := (t_0(x_0,\dots,x_{n-1}) = t_1(x_0,\dots,x_{n-1}))$, то

$$[\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = [\![b_0 = b_1]\!] = d(b_0,b_1)^*.$$

Предположим теперь, что φ_1 и φ_2 имеют вид $\varphi \wedge \psi$ и $(\forall\, x_0)\varphi$ соответственно, причем для φ и ψ требуемое утверждение уже доказано. Тогда

$$[\![|\varphi_1|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = [\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1 \,\wedge\, |\psi|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] =$$
$$= [\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] \,\wedge\, [\![|\psi|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = |\varphi_1|^{\mathfrak{A}\downarrow}(a_0,\dots,a_{n-1});$$

$$[\![|\varphi_2|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = [\![(\forall\, x_0 \in A)|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] =$$
$$= \bigwedge_{a_0 \in A\downarrow} [\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = |\varphi_2|^{\mathfrak{A}\downarrow}(a_0,\dots,a_{n-1}).$$

Аналогично разбираются случаи квантора общности и остальных пропозициональных связок. $\triangleright$

7.3.6. Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебраические системы одной и той же сигнатуры $\sigma^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Положим $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}{\downarrow}$ и $\mathfrak{B}' := \mathfrak{B}{\downarrow}$. Тогда если h — гомоморфизм (сильный гомоморфизм) внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ системы $\mathfrak{A}$ в систему $\mathfrak{B}$, то $h' := h{\downarrow}$ — гомоморфизм (сильный гомоморфизм) B-систем $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$. Наоборот, если $h' : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{B}'$ — гомоморфизм (сильный гомоморфизм) алгебраических B-систем, то $h := h'{\uparrow}$ — гомоморфизм (сильный гомоморфизм) внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ из системы $\mathfrak{A}$ в систему $\mathfrak{B}$.*

$\triangleleft$ Ограничимся обоснованием п. 7.1.9 (3) из определения гомоморфизма, т. е. рассмотрим лишь случай ненульместного функционального символа. Для других символов сигнатуры σ рассуждения аналогичны. Пусть $\mathfrak{A} := (A, \nu)^B$ для некоторых A, $\nu \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathfrak{A}' = (A', \nu')$. Предположим, что $\mu \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $\mu' \in \mathbb{V}$ — интерпретирующие отображения систем $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ соответственно. Рассмотрим функциональный символ f арности $n = \mathfrak{a}(f)$ и элементы $a_0, \dots, a_{n-1} \in A'$. Как и раньше, запись $t = g(a_0, \dots, a_{n-1})$ для $g \in \mathbb{V}^{(B)}$ будет служить обозначением для формулы $t = g(a)$, где $a \in \mathbb{V}^{(B)}$ — такой элемент из $\mathbb{V}^{(B)}$, что $[\![a : n^\wedge \to A]\!] = \mathbb{1}$ и $a{\downarrow\!\!\uparrow}(l) = a_l$ $(l < n)$. Если $h \in \mathbb{V}^{(B)}$ — гомоморфизм внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, то

$$[\![h(\nu(f^\wedge)(a_0, \dots, a_{n-1})) = \mu(f^\wedge)(h(a_0), \dots, h(a_{n-1}))]\!] = \mathbb{1}.$$

Кроме того, по определению спусков (см. 5.7.7 (3))

$$\begin{gathered}[\![\nu(f^\wedge) = \nu{\downarrow\!\!\uparrow}(f)]\!] = [\![\mu(f^\wedge) = \mu{\downarrow\!\!\uparrow}(f)]\!] = \mathbb{1};\\ [\![\nu{\downarrow\!\!\uparrow}(f)(a_0, \dots, a_{n-1}) = \nu'(f)(a_0, \dots, a_{n-1})]\!] = \mathbb{1};\\ [\![\mu{\downarrow\!\!\uparrow}(f)(b_0, \dots, b_{n-1}) = \mu'(f)(b_0, \dots, b_{n-1})]\!] = \mathbb{1};\\ [\![h(t) = h'(t)]\!] = \mathbb{1} \quad (t \in A').\end{gathered}$$

Суммируя все эти соотношения, ввиду отделимости $\mathbb{V}^{(B)}$ получим

$$h'(\nu'(f)(a_0, \dots, a_{n-1})) = \mu'(f)(h(a_0), \dots, h(a_{n-1})).$$

Наоборот, предположим, что выполнено последнее равенство. Заменив в этом равенстве h' на $h := h'{\uparrow}$, получим формулу, истинную внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Последовательно заменяя в ней $\nu'(f)$ на $\nu{\downarrow\!\!\uparrow}(f)$ и $\nu{\downarrow\!\!\uparrow}(f)$ на $\nu(f^\wedge)$, а затем $\mu'(f)$ на $\mu{\downarrow\!\!\uparrow}(f)$ и $\mu{\downarrow\!\!\uparrow}(f)$ на $\mu(f^\wedge)$, мы приходим к новой формуле, истинной внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Эта новая формула и есть требуемое свойство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. $\triangleright$

7.3.7. *В обозначениях теоремы* 7.3.5 $[\![h$ *— изоморфизм алгебраических систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$*$]\!] = \mathbb{1}$ *в том и только в том случае, если h' — изоморфизм алгебраических B-систем $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$.*

7.3.8. Теорема. *Пусть $\mathscr{D}$ — полная булева алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $D := \mathscr{D}{\downarrow}$. Тогда D — полная булева алгебра и существует полный мономорфизм $\imath : B \to D$ такой, что*

$$b \leqslant [\![x \leqslant y]\!] \leftrightarrow \imath(b) \wedge x \leqslant \imath(b) \wedge y$$

для всех $x, y \in D$ и $b \in B$.

$\triangleleft$ В силу 7.3.5 D — расширенная алгебраическая B-система сигнатуры $(\vee, \wedge, *, 0, 1)$. То, что D — булева алгебра, также следует из 7.3.5. Временно обозначив булевы операции в D через $\widetilde{\vee}$, $\widetilde{\wedge}$, проверим, например, дистрибутивность.

Рассмотрим термы $t_1(x,y,z) := (x \wedge y) \vee z$, $t_2(x,y,z) := (x \vee z) \wedge (x \vee y)$ и формулу $\psi := (\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)\varphi(x,y,z)$, где $\varphi(x,y,z) := (t_1(x,y,z) = t_2(x,y,z))$. Тогда согласно 7.3.5 будет

$$\mathbb{1} = [\![|\psi|^{\mathscr{D}} = 1]\!] = |\psi|^D = \bigwedge_{a,b,c \in D} |\varphi|^D(a,b,c),$$

значит, $|\varphi|^D(a,b,c) = \mathbb{1}$ для всех $a,b,c \in D$. Далее,

$$\mathbb{1} = |\varphi|^D(a,b,c) = d(t_1(a,b,c), t_2(a,b,c))^* =$$
$$= [\![t_1(a,b,c) = t_2(a,b,c)]\!] = [\![(a \widetilde{\wedge} b) \widetilde{\vee} c = (a \widetilde{\vee} c) \widetilde{\wedge} (b \widetilde{\vee} c)]\!].$$

Отсюда ввиду отделимости $\mathbb{V}^{(B)}$ мы получаем $(a \widetilde{\wedge} b) \widetilde{\vee} c = (a \widetilde{\vee} c) \widetilde{\wedge} (b \widetilde{\vee} c)$. Точно так же можно убедиться в справедливости остальных аксиом булевой алгебры. Итак, D — булева алгебра.

Полнота D не является свойством первого порядка и не может быть выведена по указанной схеме. Пусть $\leqslant\, \in \mathbb{V}^{(B)}$ — обычное отношение порядка в $\mathscr{D}$, т. е.

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x \in \mathscr{D})(\forall\, y \in \mathscr{D})(x \leqslant y \leftrightarrow x \wedge y = x).$$

Положим $\widetilde{\leqslant} := (\leqslant){\downarrow}$. Тогда для $x, y \in D$ будет $x \,\widetilde{\leqslant}\, y$ в том и только в том случае, если $x \,\widetilde{\wedge}\, y = x$. Рассмотрим соответствие $\Phi := (\widetilde{\leqslant}, D, D)$. Ясно, что Φ — вполне нерастягивающее соответствие. Далее, если $A \subset D$, то $\pi_\Phi(A)$ $(\pi_\Phi^{-1}(A))$ — множество всех верхних (соответственно нижних) границ множества A (относительно порядка $\widetilde{\leqslant}$). Таким образом,

$$\{\sup(A)\} = \pi_\Phi(A) \cap \pi_\Phi^{-1}(\pi_\Phi(A)),$$

если $\sup(A)$ существует. Если $\Psi := (\leqslant, \mathscr{D}, \mathscr{D})^B$, то Ψ — соответствие внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $\Phi = \Psi{\downarrow}$. В силу полноты $\mathscr{D}$ существует такой элемент $a \in D$, что $[\![a = \sup(A)]\!] = \mathbb{1}$ или $[\![\pi_\Psi(A) \cap \pi_\Psi^{-1}(\pi_\Psi(A)) = \{a\}]\!] = \mathbb{1}$. Привлекая правило спуска поляр (см. 5.3.5 (2)), выполним простые вычисления:

$$\{a\} = (\pi_\Psi^{-1}(\pi_\Psi(A{\uparrow})) \cap \pi_\Psi(A{\uparrow})){\downarrow} =$$
$$= \pi_\Phi^{-1}(\pi_\Phi(A{\uparrow}{\downarrow})) \cap \pi_\Phi(A{\uparrow}{\downarrow}) = \{\sup(\mathrm{mix}(A))\} = \{\sup(A)\}.$$

Следовательно, $a = \sup(A)$ и полнота D обоснована. Пусть $\lambda \in \mathbb{V}^{(B)}$ — тождественное вложение алгебры $\{\mathbb{0}_{\mathscr{D}}, \mathbb{1}_{\mathscr{D}}\}^B$ в $\mathscr{D}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Положим $\imath_1 := \lambda{\downarrow}$ и $\imath := \imath_1 \circ \imath_2$, где $\imath_2$ — изоморфизм B на $\{\mathbb{0}_{\mathscr{D}}, \mathbb{1}_{\mathscr{D}}\}^B{\downarrow}$. Тогда $\imath$ — мономорфизм. Полнота мономорфизма $\imath$ следует из того, что для $A \subset B$ верно $\imath(\pi_{\Phi'}(A)) = \pi_\Phi(\imath(A))$, где $\Phi' := \imath^{-1} \circ \Phi \circ \imath = (\leqslant, B, B)$:

$$\sup \imath(A) = \inf \pi_\Phi(\imath(A)) = \inf \imath(\pi_{\Phi'}(A)) \geqslant \imath(\inf \pi_{\Phi'}(A)) = \imath(\sup A) \geqslant \sup \imath(A).$$

Далее, ввиду очевидного соотношения

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x, y \in \mathscr{D})(\forall\, c \in \{\mathbb{0}_{\mathscr{D}}, \mathbb{1}_{\mathscr{D}}\})$$
$$(\lambda(c) \wedge x = \lambda(c) \wedge y \leftrightarrow (c = \mathbb{0}_{\mathscr{D}}) \vee (c = \mathbb{1}_{\mathscr{D}} \wedge x = y)),$$

для любых $x, y \in D$ и $b \in B$ будет

$$[\![\imath(b) \wedge x = \imath(b) \wedge y]\!] = b^* \vee (b \wedge [\![x = y]\!]).$$

Отсюда

$$\imath(b) \wedge x = \imath(b) \wedge y \leftrightarrow b \leqslant \llbracket x = y \rrbracket$$

и, следовательно,

$$d(x, y)^* = \llbracket x = y \rrbracket = \bigvee \{b \in B : \, \imath(b) \wedge x = \imath(b) \wedge y\}.$$

Теперь ясно, что если $\varphi(x, y) := x \leqslant y$, то

$$|\varphi|^D(x, y) = \bigvee \{b \in B : \, \imath(b) \wedge x \leqslant \imath(b) \wedge y\}, \quad \llbracket |\varphi|^{\mathscr{D}}(x, y) = 1 \rrbracket = \llbracket x \leqslant y \rrbracket,$$

откуда и вытекает требуемая эквивалентность. $\triangleright$

7.3.9. Теорема. *Пусть $\mathscr{D}_1$ и $\mathscr{D}_2$ — полные булевы алгебры внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Положим $D_k := \mathscr{D}_k{\downarrow}$, и пусть $\imath_k : B \to D_k$ — канонический мономорфизм при $k := 1, 2$ (см. 7.3.8). Если $h \in \mathbb{V}^{(B)}$ есть изоморфизм $\mathscr{D}_1$ на $\mathscr{D}_2$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то существует изоморфизм H алгебры D_1 на D_2, для которого коммутативна диаграмма:*

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "\imath_1"'] \arrow[dr, "\imath_2"] & \\
D_1 \arrow[rr, "H"'] & & D_2
\end{tikzcd}$$

Наоборот, если $H : D_1 \to D_2$ — такой изоморфизм булевых алгебр, что указанная диаграмма коммутативна, то алгебры $\mathscr{D}_1$ и $\mathscr{D}_2$ изоморфны внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

$\triangleleft$ Без труда выводится из 7.3.6 и 7.3.8. $\triangleright$

7.4. Погружение алгебраических B-систем

В текущем параграфе операция погружения, изученная в 5.7, будет распространена на категории алгебраических B-систем.

7.4.1. Пусть $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ — алгебраическая B-система сигнатуры $\sigma := (F, P, \mathfrak{a})$. Рассмотрим отображение $\nu' : F \cup P \to \mathbb{V}^{(B)}$, действующее по правилу

$$\nu' : s \mapsto \nu(s)^{\sim} := \mathscr{F}^{\sim}(\nu(s)) \quad (s \in F \cup P),$$

где $\mathscr{F}^{\sim}$ — функтор погружения (см. 5.7.2–5.7.6). В соответствии с общим определением погружения соответствий 5.7.4 для каждого $f \in F$, $\mathfrak{a}(f) = n$, отображение $\lambda'(f) : (A^{\sim})^{n^{\wedge}} \to A^{\sim}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ определено соотношением

$$\llbracket \nu'(f)(\imath_A(x_0), \dots, \imath_A(x_{n-1})) = \imath_A \circ \nu(f)(x_0, \dots, x_{n-1}) \rrbracket = \mathbb{1},$$

где $\imath_A$ — каноническое вложение A в $A' := A^{\sim}{\downarrow}$ (см. 5.7.6). Аналогично для $p \in P$, $\mathfrak{a}(p) = m$, элемент $\nu'(p) \in \mathbb{V}^{(B)}$ — это такое отображение из $(A^{\sim})^{m^{\wedge}}$ в $\{0, 1\}^B \in \mathbb{V}^{(B)}$, что

$$\llbracket \nu'(p)(\imath_A(x_0), \dots, \imath_A(x_{m-1})) = \imath_B \circ \nu(p)(x_0, \dots, x_{m-1}) \rrbracket = \mathbb{1}.$$

Как видно, модифицированный подъем $\mu := (\nu')\Uparrow$ отображения $\nu' : F \cup P \to \operatorname{im}(\nu')$ представляет собой интерпретирующее отображение внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Пару $(A^{\sim}, \mu)$

или элемент $(A^\sim, \mu)^B \in \mathbb{V}^{(B)}$ называют *булевозначной реализацией алгебраической B-системы* $\mathfrak{A}$ и обозначают символом $\mathfrak{A}^\sim$.

7.4.2. Теорема. *Для любой алгебраической B-системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ ее булевозначная реализация $\mathfrak{A}^\sim$ является алгебраической системой сигнатуры $\sigma^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. При этом для всякой формулы φ сигнатуры σ с n свободными переменными и для произвольных $a_0, \dots, a_{n-1} \in A := |\mathfrak{A}|$ выполняется*

$$|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = [\![|\varphi|^{\mathfrak{A}^\sim}(\imath_A(a_0), \dots, \imath_A(a_{n-1})) = 1]\!].$$

$\lhd$ Напомним, что, рассматривая произвольное множество как B-множество, мы имеем в виду дискретную B-метрику. В силу этого $\sigma^\sim = \sigma^\wedge$ (см. 5.7.2). Благодаря 5.7.7, выполнено

$$\mathbb{V}^{(B)} \models «\mu \text{ — функция и } \operatorname{dom}(\mu) = F^\wedge \cup P^\wedge».$$

По теореме 5.7.5 $\mathbb{V}^{(B)} \models «\mu(f^\wedge)$ — отображение из $(A^\sim)^{\mathfrak{a}(f)^\wedge}$ в $A^\sim»$ при всех $f \in F$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models «\mu(p)$ — отображение из $(A^\sim)^{\mathfrak{a}(p)^\wedge}$ в $\{0, 1\}»$ для каждого $p \in P$. Отсюда немедленно вытекает, что $\mathbb{V}^{(B)} \models «\mathfrak{A}^\sim$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma^\wedge»$.

Рассмотрим теперь формулу φ сигнатуры σ. В силу теоремы 5.7.7 (3) для $f \in F$ и $p \in P$ будет

$$\imath_A \circ f^\nu(a_0, \dots, a_{n-1}) = \mu(f^\wedge){\downarrow}(\imath_A(a_0), \dots, \imath_A(a_{n-1})) \quad (a_l \in A),$$
$$\imath_B \circ p^\nu(a_0, \dots, a_{n-1}) = \mu(p^\wedge){\downarrow}(\imath_A(a_0), \dots, \imath_A(a_{n-1})) \quad (a_l \in A).$$

Используя эти равенства, индукцией по длине формулы φ можно заключить:

$$|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = |\varphi|^{\mathfrak{A}'}(\imath_A(a_0), \dots, \imath_A(a_{n-1})) \quad (a_0, \dots, a_{n-1} \in A),$$

где $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}^\sim{\downarrow}$. Осталось привлечь теорему 7.3.5. $\rhd$

7.4.3. Теорема. *Пусть $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ — алгебраическая B-система сигнатуры σ. Тогда существуют такие $\mathscr{A}$ и $\mu \in \mathbb{V}^{(B)}$, что выполнены условия*:

(1) $\mathbb{V}^{(B)} \models «(\mathscr{A}, \mu)$ *— алгебраическая система сигнатуры* $\sigma^\wedge»$;

(2) *если $\mathfrak{A}' := (A', \nu')$ — спуск системы $(\mathscr{A}, \mu)$, то $\mathfrak{A}'$ — расширенная алгебраическая B-система сигнатуры σ*;

(3) *существует изоморфизм $\imath$ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$ такой, что $A' = \operatorname{mix}(\imath(A))$*;

(4) *для любой формулы φ сигнатуры σ с n свободными переменными выполняется*

$$|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = |\varphi|^{\mathfrak{A}'}(\imath(a_0), \dots, \imath(a_{n-1})) =$$
$$= \chi^{-1} \circ (|\varphi|^{\mathfrak{A}^\sim}){\downarrow}(\imath(a_0), \dots, \imath(a_{n-1}))$$

при всех $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ и χ из 7.3.2.

$\lhd$ Положим $\mathscr{A} := A^\sim$, $\imath := \imath_A$, а μ определим как в 7.4.1. Тогда требуемые утверждения вытекают из 5.7.7 (3), 7.3.5 и 7.4.2. $\rhd$

7.4.4. Теорема. *Рассмотрим алгебраические B-системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ одной и той же сигнатуры.*

(1) *Пусть h — нерастягивающее отображение из $|\mathfrak{A}|$ в $|\mathfrak{B}|$. Тогда h будет гомоморфизмом (сильным гомоморфизмом, изоморфизмом) в том и только в том случае, если $\mathbb{V}^{(B)} \models «h^\sim$ — гомоморфизм (сильный гомоморфизм, изоморфизм)* *из $\mathfrak{A}^{\sim}$ в $\mathfrak{B}^{\sim}$». Гомоморфизм $h^{\sim}$ сюръективен внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ тогда и только тогда, когда $|\mathfrak{B}| = \mathrm{mix}(h(|\mathfrak{A}|))$.*

(2) *Пусть $g \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$g : \mathfrak{A}^{\sim} \to \mathfrak{B}^{\sim}$ — гомоморфизм алгебраических B-систем». Если при этом $\mathfrak{B}$ — расширенная алгебраическая B-система, то существует единственный гомоморфизм $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ такой, что $g = h^{\sim}$.*

$\lhd$ (1): Если $h' := h^{\sim}{\downarrow}$, $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}^{\sim}{\downarrow}$, $\mathfrak{B}' := \mathfrak{B}^{\sim}{\downarrow}$, $\imath := \imath_{|\mathfrak{A}|}$ и $\jmath := \imath_{|\mathfrak{B}|}$, то $h' \circ \imath = \jmath \circ h$ (см. 5.7.6 (3)). Покажем, что h — гомоморфизм в том и только в том случае, если h' — гомоморфизм. Ограничимся обоснованием 7.1.9 (3) с $n = 1$. Иными словами, нам нужно показать, что h и h' одновременно сохраняют или нет одноместные операции. Пусть ν, λ, $\mu(\nu)$ и $\mu(\lambda)$ — интерпретирующие отображения систем $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}^{\sim}$ и $\mathfrak{B}^{\sim}$ соответственно. Если h — гомоморфизм, то $h \circ f^{\nu} = f^{\lambda} \circ h$. Кроме того, $\imath \circ f^{\nu} = (f^{\mu(\nu)}{\downarrow}) \circ \imath$ и $\jmath \circ f^{\lambda} = (f^{\mu(\lambda)}{\downarrow}) \circ \jmath$. Следовательно,

$$h' \circ (f^{\mu(\nu)}{\downarrow}) \circ \imath = \jmath \circ h \circ f^{\nu} = \jmath \circ f^{\lambda} \circ h = (f^{\mu(\lambda)}{\downarrow}) \circ h' \circ \imath.$$

Учитывая также соотношение $|\mathfrak{A}^{\sim}{\downarrow}| = \mathrm{mix}(\imath(|\mathfrak{A}|))$, получим $h' \circ (f^{\mu(\nu)}{\downarrow}) = (f^{\mu(\lambda)}{\downarrow}) \circ h'$. Наоборот, если верно последнее равенство, то, рассуждая в противоположном направлении, найдем $h \circ f^{\nu} = f^{\lambda} \circ h$. Случай произвольных операций или произвольных предикатов несколько более громоздок, но не вызывает принципиальных трудностей. Итак, h — гомоморфизм, сильный гомоморфизм или изоморфизм алгебраических B-систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладает отображение h' из $\mathfrak{A}'$ в $\mathfrak{B}'$. Ввиду этого требуемое вытекает из 7.3.6 и 7.4.3.

(2): Если $\mathfrak{A}$ — расширенная алгебраическая система, то требуемое вытекает из 5.9.5 (3). В общем случае нужно вначале привлечь 5.9.6. Искомый гомоморфизм имеет вид $h := \jmath^{-1} \circ (g{\downarrow}) \circ \imath$. $\rhd$

Отметим некоторые следствия теорем 7.4.3 и 7.4.4.

7.4.5. Теорема. *Если $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система конечной сигнатуры σ, то $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathfrak{A}^{\wedge}$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma^{\wedge}$». При этом для всякой формулы сигнатуры φ с n свободными переменными будет*

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \leftrightarrow [\![\mathfrak{A}^{\wedge} \models \varphi(a_0^{\wedge}, \dots, a_{n-1}^{\wedge})]\!] = \mathbb{1},$$

каковы бы ни были $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$.

$\lhd$ Для доказательства нужно лишь заметить, что если $\mathfrak{A} := (A, f_0, \dots, f_{k-1}, p_0, \dots, p_{m-1})$, то предложение $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ можно записать ограниченной формулой теории множеств $\psi(A^{\wedge}, f_0^{\wedge}, \dots, f_n^{\wedge}, p_0^{\wedge}, \dots, p_{m-1}^{\wedge}, a_0^{\wedge}, \dots, a_{n-1}^{\wedge})$, и сослаться на 4.2.9. $\rhd$

7.4.6. Теорема. *Для всякой алгебраической B-системы $\mathfrak{A}$ существуют расширенная алгебраическая B-система $\mathfrak{A}'$ сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A})$ и изоморфизм $\imath$ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$ такие, что*

(1) *$|\mathfrak{A}'| = \mathrm{mix}(\imath(|\mathfrak{A}|))$;*

(2) *если h — гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в расширенную алгебраическую B-систему $\mathfrak{B}$, то существует единственный гомоморфизм $h' : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{B}$ такой, что $h' \circ \imath = h$;*

(3) *если $\mathfrak{A}''$ — расширенная алгебраическая B-система, а изоморфизм $\imath' : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}''$ удовлетворяет условию (1) (с заменой $\mathfrak{A}'$ на $\mathfrak{A}''$), то существует единственный изоморфизм h из $\mathfrak{A}'$ на $\mathfrak{A}''$ такой, что $h \circ \imath = \imath'$.*

$\lhd$ Пусть $(\mathscr{A}, \mu)$ — булевозначная реализация алгебраической B-системы $\mathfrak{A}$. Тогда спуск $\mathfrak{A}' := (\mathscr{A}, \mu){\downarrow}$ удовлетворяет всем требуемым условиям. Действительно, в силу 7.4.3 (3, 4) каноническое вложение $\imath := \imath_{|\mathfrak{A}|}$ является изоморфизмом, причем выполнено (1). Если h и $\mathfrak{B}$ — те, что указаны в (2), то по теореме 7.4.4 $g := h^{\sim}{\downarrow}$ — гомоморфизм из $\mathfrak{A}'$ в $\mathfrak{B}' := \mathfrak{B}^{\sim}{\downarrow}$. В силу расширенности $\mathfrak{B}$ каноническое отображение $\jmath := \imath_{|\mathfrak{B}|}$ является изоморфизмом «на». Ясно, что $h' := \jmath^{-1} \circ g$ и есть искомый гомоморфизм. Полезно отметить, что если $a \in |\mathfrak{A}'|$ и $a = \operatorname{mix}(b_\xi \imath(a_\xi))$, то $h'(a) = \operatorname{mix}(b_\xi h \circ \imath(a_\xi))$. Утверждение (3) вытекает из (1) и из теоремы 7.4.4. $\rhd$

7.4.7. Любую пару $(\mathfrak{A}', \imath)$, где $\mathfrak{A}'$ — расширенная алгебраическая B-система, а $\imath$ — изоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$, удовлетворяющую условию (1) теоремы 7.4.6, естественно назвать *максимальным расширением* $\mathfrak{A}$. Тогда из теоремы 7.4.6 можно извлечь следующее утверждение.

Всякая алгебраическая B-система обладает единственным с точностью до изоморфизма максимальным расширением.

Возьмем полный гомоморфизм π из B в полную булеву алгебру C. Пусть $\mathfrak{A} := (A, f_0, \dots, f_{k-1}, p_0, \dots, p_{m-1})$ — алгебраическая система конечной сигнатуры внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Обозначим

$$\pi^*(\mathfrak{A}) := (\pi^*(A), \pi^*(f_0), \dots, \pi^*(p_{m-1}))^C, \quad \pi^*(\mathfrak{A}) \in \mathbb{V}^{(C)},$$

где $\pi^* : \mathbb{V}^{(B)} \to \mathbb{V}^{(C)}$ — ассоциированное с π отображение (см. 4.2.1 и 4.6.4).

7.4.8. Теорема. *Элемент $\pi^*(\mathfrak{A})$ представляет собой алгебраическую систему конечной сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A})$ внутри $\mathbb{V}^{(C)}$. Отображение $a \mapsto \pi^*(a)$ $(a \in A{\downarrow})$ является гомоморфизмом из $\mathfrak{A}{\downarrow}$ в $\pi^*(\mathfrak{A}){\downarrow}$. Для любой формулы φ сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A})$ с n свободными переменными и для произвольных $a_0, \dots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}{\downarrow}|$ выполняется формула*

$$\mathfrak{A}{\downarrow} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \to \pi^*(\mathfrak{A}){\downarrow} \models \varphi(\pi^*(a_0), \dots, \pi^*(a_{n-1})).$$

В частности, если $\mathfrak{B}$ — алгебраическая B-система конечной сигнатуры и $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^{\sim}$, то для $a_0, \dots, a_{n-1} \in |\mathfrak{B}|$ будет

$$\mathfrak{B} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \to \pi^*(\mathfrak{A}){\downarrow} \models \varphi(\pi^* \circ \imath(a_0), \dots, \pi^* \circ \imath(a_{n-1})),$$

где $\imath := \imath_{|\mathfrak{B}|}$. Если π — мономорфизм, то π^* — изоморфизм из $\mathfrak{A}{\downarrow}$ в $\pi^*(\mathfrak{A}){\downarrow}$ и в указанных формулах верна также и обратная импликация. Если π — изоморфизм, то π^* — изоморфизм алгебраических B-систем.

$\lhd$ Для доказательства этого факта нужно собрать воедино 4.2.4, 4.2.5, 7.1.9, 7.3.6 и воспользоваться рассуждениями из 7.4.5. $\rhd$

7.4.9. *Для всякой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ выполняется $[\![\mathfrak{A}{\downarrow}^{\sim}$ изоморфна $\mathfrak{A}]\!] = \mathbb{1}$.*

7.4.10. Теорема. *Булевозначная реализация $(\mathscr{A}, \nu, \delta)$ алгебраической B-системы с дизъюнктностью (A, ν, Δ) является алгебраической системой с простой дизъюнктностью внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Если $(A', \nu') := (\mathscr{A}, \mu){\downarrow}$ и $\Delta' := \{(x, y) \in A' \times A' : \delta{\downarrow}(x, y) = \mathbb{1}\}$, то (A', ν', Δ') — расширенная алгебраическая B-система с дизъюнктностью и для любых $x, y \in A$ справедливы эквивалентности*

$$x \perp y \leftrightarrow \imath x \perp \imath y \leftrightarrow [\![\imath x = \theta \vee \imath y = \theta]\!] = \mathbb{1},$$

где $\imath = \imath_A : A \to A'$ — каноническая инъекция.

$\lhd$ Достаточно привлечь 7.2.12 и 7.4.3. $\rhd$

7.4.11. Теорема. *Пусть D — полная булева алгебра и $\jmath : B \to D$ — полный мономорфизм. Тогда существуют полная булева алгебра $\mathscr{D}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и изоморфизм H из D на $D' := \mathscr{D}{\downarrow}$ такие, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\jmath"'] \arrow[dr, "\imath'"] & \\ D \arrow[rr, "H"'] & & D' \end{tikzcd}$$

где $\imath' : B \to D'$ — канонический мономорфизм из 7.3.8.

$\lhd$ В силу 7.1.6 (3) D представляет собой расширенную алгебраическую B-систему сигнатуры $\sigma := \{\vee, \wedge, *, \mathbb{0}, \mathbb{1}\}$. Согласно 7.4.3 можно считать без ограничения общности, что D совпадает с $\mathscr{D}{\downarrow}$ и $\jmath = \imath$ для некоторой алгебраической системы $\mathscr{D}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ сигнатуры $\sigma^{\wedge}$. Если формула φ формализует аксиомы полной булевой алгебры, то можно проверить непосредственным подсчетом булевых оценок, что $|\varphi|^D = \mathbb{1}$. Привлекая 7.4.2, выводим отсюда, что $[\![|\varphi|^{\mathscr{D}} = 1]\!] = \mathbb{1}$. Значит, $\mathscr{D}$ — полная булева алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. $\rhd$

7.5. Теорема Йеха

Если $\mathfrak{A}$ служит B-моделью формулы φ сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A})$, то это отнюдь не означает, что $\mathfrak{A}'$ будет $\{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$-значной моделью, т. е. моделью в обычном смысле для той же формулы φ. Вместе с тем для некоторых формул дело обстоит именно так. Рассмотрим подробнее этот вопрос.

7.5.1. Возьмем алгебраическую B-систему $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ. Для формулы φ той же сигнатуры и элементов $a_0, \dots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$ мы временно будем использовать более информативную запись $\mathfrak{A} \models_B \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ вместо $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$.

Применяя к B-системе $\mathfrak{A}$ процедуру очистки, описанную в 7.1.5, мы получим двузначную алгебраическую систему $\overline{\mathfrak{A}}$. Можно говорить об истинности $\varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ как в $\mathfrak{A}$, так и в $\overline{\mathfrak{A}}$, ибо $|\mathfrak{A}| = |\overline{\mathfrak{A}}|$ и $\sigma(\overline{\mathfrak{A}}) = \sigma$. Возникает естественный вопрос: как связаны утверждения $\mathfrak{A} \models_B \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ и $\overline{\mathfrak{A}} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$? Теоремы 8.1.3 и 8.1.4 ниже дают примеры таких формул φ, для которых из $\mathfrak{A} \models_B \varphi$ вытекает $\overline{\mathfrak{A}} \models \varphi$. С другой стороны, нетрудно построить пример, нарушающий эту импликацию.

Действительно, пусть $B := \mathscr{P}([0,1])$ и $A := \mathbb{R}^{[0,1]}$ — множество всех вещественных функций на отрезке $[0,1]$ с B-метрикой

$$d(f,g) := \{t \in [0,1] : f(t) \neq g(t)\} \quad (f, g \in A).$$

Введем B-значный бинарный предикат $[\![\,\cdot \leqslant \cdot\,]\!]$ на A формулой

$$[\![f \leqslant g]\!] := \{t \in [0,1] : f(t) \leqslant g(t)\} \quad (f, g \in A).$$

Тогда $\mathfrak{A} := (A, [\![\,\cdot \leqslant \cdot\,]\!])$ — алгебраическая B-система и $\mathfrak{A} \models_B \varphi$, где $\varphi := (\forall\, x)(\forall\, y)(x \leqslant y \vee y \leqslant x)$. Кроме того, очевидно, что $\overline{\mathfrak{A}} := (A, \leqslant)$ — очистка $\mathfrak{A}$, если положить

$$f \leqslant g \leftrightarrow (\forall\, t \in [0,1]) f(t) \leqslant g(t).$$

Очевидно, что $\overline{\mathfrak{A}} \models \neg\varphi$. Итак, если $\mathscr{T}^B(\mathfrak{A})$ и $\mathscr{T}(\overline{\mathfrak{A}})$ — множества всех формул (с константами из $|\mathfrak{A}|$), истинных в системах $\mathfrak{A}$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ соответственно, то никакое из этих двух множеств не будет, вообще говоря, подмножеством другого. Можно ожидать поэтому, что имеют место лишь соотношения вида $\mathscr{T}^B(\mathfrak{A}) \cap \Phi (?) \mathscr{T}(\overline{\mathfrak{A}}) \cap \Phi$ для некоторого класса Φ формул сигнатуры σ. Для точных формулировок необходим определенный синтаксический анализ текстов. Выделим необходимые для этого типы формул.

7.5.2. Классы *генерических* и *строго генерических формул* определяют рекурсией по длине формулы. Вот соответствующие правила формирования:

(1) Всякая атомарная формула является строго генерической.

(2) Если φ и ψ — строго генерические формулы, то строго генерическими будут также $\varphi \wedge \psi$, $(\exists\, x)\varphi$, $(\forall\, x)\varphi$.

(3) Каждая строго генерическая формула является генерической.

(4) Если φ и ψ — генерические формулы, то генерическими будут также $\varphi \wedge \psi$, $(\exists\, x)\varphi$, $(\forall\, x)\varphi$.

(5) Если φ — строго генерическая формула, то $\neg\varphi$ — генерическая формула.

(6) Если φ — строго генерическая формула, а ψ — генерическая формула, то $\varphi \to \psi$ — генерическая формула.

7.5.3. *Базисной хорновской формулой* называют дизъюнкцию $\theta_1 \vee \ldots \vee \theta_n$, где самое большее одна из формул θ_k атомарна, а остальные — отрицания атомарных формул. Формулу называют *хорновской*, если она строится из базисных хорновских формул посредством $\wedge$, $\exists$ и $\forall$. Таким образом, формула будет хорновской лишь в том случае, если она имеет вид $(Q_1 x_1) \ldots (Q_n x_n) \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$, где Q_k — один из кванторов $\forall$ или $\exists$ при $k := 1, \ldots, n$, а каждая из формул $\varphi_\jmath$ ($\jmath := 1, \ldots, m$) устроена из атомарных формул $\theta_1, \ldots, \theta_l$ ($l \geqslant 1$) по одному из следующих трех правил: 1) $\varphi_\jmath := \theta_1$; 2) $\varphi_\jmath := (\neg\,\theta_1) \vee \ldots \vee (\neg\,\theta_l)$; 3) $\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_{l-1} \to \theta_l$.

Всякая генерическая формула исчисления предикатов логически эквивалентна хорновской формуле и наоборот.

Рассмотрим примеры генерических и строго генерических формул.

7.5.4. Пусть φ — формула сигнатуры $\{\leqslant\}$ с единственным предикатным символом. Если φ — аксиомы решеточно упорядоченного множества (= решетки; см. 2.1.2), то φ — генерическая формула. Дистрибутивность в указанной сигнатуре нельзя записать генерической формулой. Однако если возьмем сигнатуру $\sigma := \{\wedge, \vee\}$, где $\wedge$ и $\vee$ — двуместные функциональные символы, то формула $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ атомарная и, значит, строго генерическая. Более того, дистрибутивная решетка — строго генерическая формула сигнатуры $\{\wedge, \vee\}$.

7.5.5. Возьмем формулы φ и ψ сигнатуры $\{\wedge, \vee, *, 0, 1\}$. Пусть φ — аксиомы булевой алгебры (см. 2.1.4), а $\psi :=$ «существует по крайней мере один атом», т. е.

$$\psi := (\exists\, x)(\forall\, y)(x \neq 0 \wedge y = y \to x = y \vee y = 0).$$

Тогда φ — строго генерическая формула, но ψ не является генерической.

7.5.6. Пусть $\sigma := \{+, 0\}$, где $+$ — двуместный функциональный символ, 0 — символ константы. Если φ — аксиомы группы (ассоциативность групповой операции, аксиома нуля, существование обратного элемента), то φ — строго генерическая формула сигнатуры σ.

7.5.7. Пусть $\sigma := \{+, \cdot, 0, 1\}$, где $+$, $\cdot$ — двуместные функциональные символы, 0 и 1 — символы констант. Пусть φ — аксиомы кольца, а ψ — аксиомы области целостности, т. е. $\psi := \varphi \wedge \theta$, где

$$\theta := (\forall\, x)(\forall\, y)(x \cdot y = 0 \to x = 0 \vee y = 0).$$

Тогда φ — строго генерическая формула, а ψ — генерическая формула.

7.5.8. Теорема Йеха. *Пусть $\mathfrak{A}$ — расширенная алгебраическая B-система, а φ — формула сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A})$ и $a_0, \dots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$. Если φ строго генерическая, то*

(1) $\mathfrak{A} \models_B \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \leftrightarrow \overline{\mathfrak{A}} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$.

Если φ генерическая, то

(2) $\mathfrak{A} \models_B \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \to \overline{\mathfrak{A}} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$.

$\lhd$ Доказательство мы проведем индукцией по длине формулы φ. В соответствии с теоремой 7.4.3 можно считать, что $\mathfrak{A} = \mathscr{A}{\downarrow}$, где $\mathscr{A}$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma^{\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Если φ — атомарная формула, то утверждение непосредственно следует из определения очистки, ибо для предикатного символа $p \in \sigma(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{a}(p) = n$, верно

$$p^{\nu}(a_0, \dots, a_{n-1}) = 1 \leftrightarrow (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \overline{\nu}(p)$$

для всех $a_0, \dots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$. Для конъюнкции $\varphi := \psi \wedge \theta$, учитывая определение 7.1.7 и индукционное предположение, имеем

$$[\![\psi \wedge \theta]\!]^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1} \leftrightarrow |\psi|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1} \wedge |\theta|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1} \leftrightarrow \overline{\mathfrak{A}} \models \psi \wedge \overline{\mathfrak{A}} \models \theta \leftrightarrow \overline{\mathfrak{A}} \models \psi \wedge \theta.$$

Аналогично обстоит дело с квантором общности $\varphi := (\forall\, x)\psi$:

$$|(\forall\, x)\varphi|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1} \leftrightarrow (\forall\, a \in |\mathfrak{A}|)\psi(a)|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, a \in |\mathfrak{A}|)\overline{\mathfrak{A}} \models \psi(a) \leftrightarrow \overline{\mathfrak{A}} \models (\forall\, x)\psi.$$

Рассмотрим случай квантора существования $\varphi := (\exists\, x)\psi$. В силу принципа максимума существует элемент $z \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что

$$[\![\mathscr{A} \models (\exists\, x)\psi]\!] = [\![z \in |\mathscr{A}| \wedge \mathscr{A} \models \psi(z)]\!].$$

По теореме 7.4.3 эту формулу можно переписать так:

$$[\![z \in |\mathscr{A}|]\!] \wedge |\psi(z)|^{\mathfrak{A}} = |(\exists\, x)\psi|^{\mathfrak{A}}.$$

Отсюда и из индукционного предположения видно, что верны эквивалентности

$$|(\exists\, x)\psi|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1} \leftrightarrow (\exists\, z \in |\mathfrak{A}|)|\psi(z)|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\, z \in |\overline{\mathfrak{A}}|)(\overline{\mathfrak{A}} \models \psi(z) \leftrightarrow \overline{\mathfrak{A}} \models (\exists\, x)\psi),$$

ибо по определению 7.3.3 $|\mathfrak{A}| = |\mathscr{A}|{\downarrow}$. Итак, в каждом из рассмотренных случаев индукционный шаг осуществим для строго генерической формулы φ, что доказывает (1).

Переходя к (2), заметим, что случаи $\wedge$, $\exists$ и $\forall$ рассматриваются так же, как выше. Пусть $\varphi := \neg\psi$, где ψ — строго генерическая формула. Осталось проанализировать случаи формирования φ с помощью отрицания и импликации (см. 7.5.2 (5, 6)). Если $|\varphi|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1}$, то $|\psi|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{0}$ и в силу установленного в (1) ψ не может быть истинной в $\overline{\mathfrak{A}}$. Но тогда $\overline{\mathfrak{A}} \models \varphi$. Наконец, рассмотрим формулу вида $\varphi := \theta \to \psi$, где θ — строго генерическая формула, а ψ — генерическая формула. Предположим, что $|\theta \to \psi|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1}$. Если $\overline{\mathfrak{A}} \models \theta$, то из (1) следует $|\theta|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1}$ и поэтому $|\psi|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1}$. По индукционному предположению будет $\overline{\mathfrak{A}} \models \psi$. Значит, $\overline{\mathfrak{A}} \models \theta \to \psi$. $\triangleright$

Отметим, что теорема Йеха позволяет заменить доказательство некоторых рассуждений (например, фрагментов теорем 7.3.8, 8.1.3 и 8.1.4 ниже) синтаксическим разбором соответствующих предложений. Разумеется, можно сформулировать и общий факт такого рода.

7.5.9. *Пусть $\mathscr{A}$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ — булевозначная реализация и очистка расширенной алгебраической B-системы. Для любого хорновского предложения φ верно $[\![\mathscr{A} \models \varphi]\!] = \mathbb{1} \to \overline{\mathfrak{A}} \models \varphi$.*

7.6. Комментарии

7.6.1. (1) При доказательстве теоремы Стоуна 2.4.5 было установлено, что булева алгебра B изоморфна алгебре непрерывных функций $C(\mathrm{St}(B), \mathbb{2})$, где $\mathrm{St}(B)$ — вполне несвязный компакт. Можно попытаться в этом утверждении двухэлементное поле $\mathbb{2}$ заменить на произвольную универсальную алгебру. На этом пути возникает важный пример алгебраической B-системы — *булева степень* универсальной алгебры, введенная Р. Ф. Аренсом и И. Капланским [187] (см. также работы А. Г. Пинуса [354], А. Л. Фостера [223, 224], К. Эда [218, 219]).

(2) В параграфе 7.1 и ниже в этой главе рассматриваются лишь вопросы, связанные с булевозначной реализацией алгебраических B-систем и со спецификой соответствующей техники спусков и подъемов. Логико-алгебраические аспекты алгебраических B-систем более подробно обсуждаются, например, в работах К. И. Бейдара и А. В. Михалева [14], Р. Голдблатта [40], М. П. Фурмана и Д. Скотта [226].

(3) Булевозначные интерпретации имеют давнюю историю. По-видимому, первую булевозначную модель (для теории типов) предложил А. Чёрч в 1951 году. Впоследствии булевозначные модели для предложений (теорий) первого порядка рассматривали многие авторы, как, например, П. Халмош, А. Мостовский, А. Тарский, но наиболее полно и последовательно — Е. Расёва и Р. Сикорский, см. [155].

7.6.2. (1) Роль конгруэнций, независимых и полных множеств конгруэнций в теории алгебраических систем видна из классической монографии А. И. Мальцева [144]. В частности, если (σ_α) — независимая и полная система конгруэнций в алгебраической системе $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ изоморфна декартову произведению фактор-систем $\mathfrak{A}/\sigma_\alpha$ (см. [144, теорема I.2.5]).

(2) Понятие базы алгебраической системы из 7.2.4 ввел С. С. Кутателадзе. Им же получен критерий существования базы 7.2.5, см. [124]. Теорема об очистке 7.2.6 получена А. Г. Кусраевым [100].

(3) Определение дизъюнктности 7.2.9 и теорема 7.2.10 принадлежат Г. П. Акилову, см. [7]. Алгебраические системы с дизъюнктностью рассмотрел А. Г. Кусраев; определение 7.2.11 и теорема 7.2.12 (а также теорема 7.4.10) взяты из работы [100], см. также [111].

7.6.3. (1) Спуски общих алгебраических систем (определение 7.3.3, теоремы 7.3.5 и 7.3.6) рассмотрели А. Г. Кусраев и С. С. Кутателадзе в [95, 110, 124]. Спуски различных конкретных алгебраических систем изучались разными авторами. Часть из них представлена в настоящей книге.

(2) Пусть $\mathscr{H}$ — гейтингова алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $H := \mathscr{H}{\downarrow}$. Тогда H — гейтингова алгебра и существует полный решеточный мономорфизм $\iota : B \to H$ такой, что выполнены условия:

(a) $\iota(B)$ служит подалгеброй булевой алгебры $\mathfrak{R}(H)$, а ι сохраняет булево дополнение;

(b) $b \leqslant [\![x \leqslant y]\!] \leftrightarrow \iota(b) \wedge x = \iota(b) \wedge y$ $(x, y \in H;\ b \in B)$;

(c) для любого семейства (x_ξ) в H и для любого разбиения единицы (b_ξ) в B существует точная верхняя граница семейства $(\iota(b_\xi) \wedge x_\xi)$.

(3) Имеет место утверждение, обратное к (2). Пусть H — гейтингова алгебра и существует полный булев мономорфизм $\iota : B \to H$. Положим по определению

$$d(x, y) := \bigwedge\{b \in B :\ \iota(b^*) \wedge x = \iota(b^*) \wedge y\} \quad (x, y \in H).$$

Тогда d — это B-полуметрика, которая будет B-метрикой, если для любого семейства (x_ξ) в H и для любого разбиения единицы (b_ξ) в B существует $\bigvee \iota(b_\xi) \wedge x_\xi$.

Теорема. *Пусть гейтингова алгебра H и мономорфизм $\iota : B \to H$ удовлетворяют указанным условиям. Тогда внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ существуют единственная с точностью до изоморфизма гейтингова алгебра $\mathscr{H}$ и мономорфизм $h : H \to H' := \mathscr{H}{\downarrow}$ такие, что $h \circ \iota = \iota'$, где $\iota' : B \to H'$ — мономорфизм из* (2).

7.6.4. (1) Погружение алгебраических B-систем в булевозначную модель (теоремы 7.4.2 и 7.4.3) осуществлено в работах А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе в [95, 110, 124]. При этом использован метод Р. Соловея и С. Тенненбаума [379], примененный ими при доказательстве теоремы 7.4.11.

(2) Пусть C и D — булевы алгебры, и рассмотрим их тензорное произведение $C \otimes D$ (см. 2.2.7 и 2.5.5). Пусть $C \widehat{\otimes} D$ — пополнение булевой алгебры $C \otimes D$ (см. 2.2.8 и 2.5.6). Если D — булева алгебра, а элемент $\mathscr{D} \in \mathbb{V}^{(B)}$ таков, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{D}$ — пополнение булевой алгебры $D^\wedge$», то алгебры $\mathscr{D}{\downarrow}$ и $B \widehat{\otimes} D$ изоморфны (см. [379]).

(3) Теоремы Соловея — Тенненбаума (см. 7.3.8, 7.3.9 и 7.4.11) могут быть положены в основу итерирования конструкции булевозначной модели. Пусть $\mathscr{D} \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{D}$ — полная булева алгебра». По схеме 4.1 внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ можно построить $\mathbb{V}^{(B)}$-классы — булевозначный универсум $(\mathbb{V}^{(B)})^{(\mathscr{D})}$, соответствующие булевы оценки истинности $[\![\cdot = \cdot]\!]^{\mathscr{D}}$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]^{\mathscr{D}}$, а также каноническое вложение $(\,\cdot\,)^\wedge$ универсального класса $\mathbb{U}_B$ в $(\mathbb{V}^{(B)})^{\mathscr{D}}$. Положим $D := \mathscr{D}{\downarrow}$, $\mathbb{W}^{(D)} := (\mathbb{V}^{(B)})^{(\mathscr{D})}{\downarrow}$, $[\![\cdot = \cdot]\!]^D := ([\![\cdot = \cdot]\!]^{\mathscr{D}}){\downarrow}, [\![\cdot \in \cdot]\!]^D := ([\![\cdot \in \cdot]\!]^{\mathscr{D}}){\downarrow}$, $\jmath := (\,\cdot\,)^\wedge{\downarrow}$. Пусть $\imath : B \to D$ — канонический мономорфизм, а $\imath^* : \mathbb{V}^{(B)} \to \mathbb{V}^{(D)}$ — соответствующая инъекция (см. 4.2).

Тогда существует единственная биекция $h : \mathbb{V}^{(D)} \to \mathbb{W}^{(D)}$ такая, что

$$[\![x = y]\!]^D = [\![h(x) = h(y)]\!]^{\mathscr{D}}, \quad [\![x \in y]\!]^D = [\![h(x) \in h(y)]\!]^{\mathscr{D}},$$

каковы бы ни были x и $y \in \mathbb{V}^{(B)}$. При этом диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{V}^{(B)} \arrow[dl, "\imath^*"'] \arrow[dr, "\jmath"] & \\ \mathbb{V}^{(D)} \arrow[rr, "h"'] & & \mathbb{W}^{(D)} \end{tikzcd}$$

коммутативна. Детали см. в [379]. О родственных булевозначных конструкциях в теории универсальных алгебр см. у А. Г. Пинуса [354].

(4) Дальнейшие итерации описанной выше конструкции приводят к трансфинитной последовательности булевозначных расширений. На этом пути возникает метод итерированного форсинга, который использован, например, в доказательстве относительной совместимости гипотезы Суслина с ZFC, данном Р. Соловеем и С. Тенненбаумом (см. [379]).

(5) Пусть Φ — некоторое множество формул одной и той же сигнатуры σ. Введем категорию $\mathrm{AS}^{(B)}(\Phi)$ следующим образом:

$$\begin{gathered} \mathrm{Ob}\,\mathrm{AS}^{(B)}(\Phi) := \{\mathfrak{A} \in \mathbb{V}^{(B)} : [\![\mathfrak{A} \text{ — алгебраическая система} \\ \text{сигнатуры } \sigma^{\wedge} \text{ и } \mathfrak{A} \models \Phi]\!] = \mathbb{1}\}; \\ \mathrm{AS}^{(B)}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) := \{h \in \mathbb{V}^{(B)} : [\![h \text{ — гомоморфизм из } \mathfrak{A} \text{ в } \mathfrak{B}]\!] = \mathbb{1}\}; \\ \mathrm{Com}(f, g) = h \leftrightarrow [\![h = g \circ f]\!] = \mathbb{1}. \end{gathered}$$

То, что этими условиями действительно определяют категорию, следует из принципов переноса и максимума, теоремы 7.4.2, а также из свойств функтора погружения.

(6) Как и прежде, обозначим символами $\mathscr{F}^{\sim}$ и $\mathscr{F}^{\downarrow}$ отображения погружения и спуска соответственно, действующие в категориях алгебраических систем: $\mathscr{F}^{\sim}$: $B\text{-AS}(\Phi) \to \mathrm{AS}^{(B)}(\Phi)$, $\mathscr{F}^{\downarrow} : \mathrm{AS}^{(B)}(\Phi) \to B\text{-AS}(\Phi)$.

Теорема. *Справедливы следующие утверждения*:

(a) *отображение* $\mathscr{F}^{\downarrow}$ *— ковариантный функтор из категории* $\mathrm{AS}^{(B)}(\Phi)$ *в категорию* $B\text{-CAS}^{(B)}(\Phi)$;

(b) *отображение* $\mathscr{F}^{\sim}$ *— ковариантный функтор из категории* $B\text{-AS}(\Phi)$ *(а также из* $B\text{-CAS}(\Phi)$*) в категорию* $\mathrm{AS}^{(B)}(\Phi)$;

(c) *функторы* $\mathscr{F}^{\downarrow}$ *и* $\mathscr{F}^{\sim}$ *осуществляют эквивалентность категорий* $\mathrm{AS}^{(B)}(\Phi)$ *и* $B\text{-CAS}(\Phi)$.

7.6.5. Теорема 7.5.8 установлена Т. Йехом в [256]. Независимо, но несколько позже, аналогичное утверждение получил Е. И. Гордон [45].

Глава 8
Анализ групп, колец и полей

Настоящая глава служит прямым продолжением предыдущей. В ней основные принципы булевозначного анализа общих алгебраических систем специализируются для изучения некоторых общих свойств групп, полей и колец. Мы ограничиваемся, в основном, спусками соответствующих систем и иллюстрируем возникающие аппаратные возможности.

8.1. Группы и кольца с проекциями

В этом параграфе покажем, что спуск групп и колец из булевозначного универсума приводит к классу групп и колец с выделенными булевыми алгебрами проекторов.

8.1.1. Если формула φ представляет собой аксиомы группы, кольца, модуля и т. п. и алгебраическая система $\mathfrak{A}$ является двузначной моделью для φ, то мы говорим, как обычно, что $\mathfrak{A}$ — группа, кольцо, модуль и т. п. Если же $\mathfrak{A}$ есть B-модель для φ, то мы будем говорить, что $\mathfrak{A}$ — это B-группа, B-кольцо, B-модуль и т. д.

(1) Рассмотрим произвольную группу G. Идемпотентный эндоморфизм группы называют *проектором.* Точнее, проектор — это групповой гомоморфизм $\pi : G \to G$, для которого $\pi \circ \pi = \pi$. Скажем, что $\mathscr{B}$ — *булева алгебра проекторов* в группе G, если $\mathscr{B}$ состоит из попарно коммутирующих проекторов в G и образует булеву алгебру с нулевым гомоморфизмом $\mathbb{0} := \mathbb{0}_{\mathscr{B}} := 0$ в качестве нуля, тождественным гомоморфизмом $\mathbb{1} := \mathbb{1}_{\mathscr{B}} := I_G$ в качестве единицы и следующими булевыми операциями:

$$\pi_1 \vee \pi_2 := \pi_1 + \pi_2 - \pi_1 \circ \pi_2, \quad \pi_1 \wedge \pi_2 := \pi_1 \circ \pi_2,$$
$$\pi^* := \mathbb{1} - \pi \quad (\pi_1, \pi_2, \pi \in \mathscr{B}).$$

Порядок в $\mathscr{B}$ таков, что $\pi_1 \leqslant \pi_2$ в том и только в том случае, если $\pi_1(G) \subset \pi_2(G)$.

(2) Алгебраическую систему $(G, \mathscr{B})$ и самое группу G называют BAP-*группой* или *группой с выделенными проекциями* или, короче, *группой с проекциями.* При этом мы говорим, что $\mathscr{B}$ — *выделенная булева алгебра* проекций BAP-группы $(G, \mathscr{B})$. Назовем BAP-группу $(G, \mathscr{B})$ *расширенной*, если булева алгебра $\mathscr{B}$ порядково полна и для любого семейства $(x_\xi) \subset G$ и любого разбиения единицы $(\pi_\xi) \subset \mathscr{B}$ существует единственный элемент $x \in G$ такой, что $\pi_\xi x_\xi = \pi_\xi x$ для всех ξ. Этот элемент x называют перемешиванием (x_ξ) относительно (b_ξ), ср. 7.2.4. Пусть $(G, \mathscr{B})$ и $(G', \mathscr{B}')$ — две BAP-группы. Групповой гомоморфизм $h : G \to G'$ называют BAP-*гомоморфизмом*, если существует булев изоморфизм $\jmath : \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$, такой, что $h \circ \pi = \jmath(\pi) \circ h$ для всех $\pi \in \mathscr{B}$.

(3) *Носителем* элемента $x \in G$ назовем проектор $[x] := \bigwedge\{\pi \in \mathscr{B} : \pi x = x\}$. Если $\pi(x) = x$ и $\rho(y) = y$ для некоторых $\pi, \rho \in \mathscr{B}$ и $x, y \in G$, то нетрудно видеть, что $\pi \vee \rho(x+y) = x+y$, следовательно, справедливо неравенство $[x+y] \leqslant [x] \vee [y]$.

Ясно, что носитель нулевого элемента равен нулю булевой алгебры $\mathscr{B}$. Обратное верно лишь при выполнении требования *латеральной точности* группы G (ср. 7.1.6 (1)): для произвольного разбиения единицы $(\pi_\xi) \subset \mathscr{B}$ и любого элемента $x \in G$ условие $(\forall\, \xi)\pi_\xi x = 0$ влечет $x = 0$. Действительно, из определения носителя видно, что $[x]^* = \bigvee\{\pi \in \mathscr{B} : \pi x = 0\}$, поэтом, в случае справедливости равенства $[x]^* = \mathbb{1}$, из принципа исчерпывания 2.1.9 вытекает существование разбиения единицы (π_ξ) в $\mathscr{B}$, для которого $\pi_\xi x = 0$ при всех ξ. Итак, латеральная точность BAP-группы равносильна тому, что равенства $[x] = 0$ и $x = 0$ выполняются или нет одновременно.

Максимальным расширением BAP-группы $(G, \mathscr{B})$ назовем расширенную BAP-группу $(G', \mathscr{B}')$ вместе с изоморфным вложением $\iota : G \to G'$, если $\mathscr{B} = \iota^{-1} \circ \mathscr{B}' \circ \iota := \{\iota^{-1} \circ \pi \circ \iota : \pi \in \mathscr{B}'\}$ и каждый элемент из G' представляет собой перемешивание некоторого семейства элементов из $\iota(G)$.

8.1.2. Пусть теперь K — кольцо и аддитивная группа этого кольца имеет булеву алгебру проекторов $\mathscr{B}$. Если, сверх того, каждый проектор $\pi \in \mathscr{B}$ является кольцевым гомоморфизмом (т. е. $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ для любых $x, y \in K$), то говорят, что $(K, \mathscr{B})$ — это BAP-*кольцо* или *кольцо с проекциями.*

(1) Заметим, что проектор $\pi \in \mathscr{B}$ будет кольцевым гомоморфизмом (или, как еще говорят, *мультипликативным*) в том и только в том случае, когда

$$\pi(xy) = \pi(x)y = x\pi(y) \quad (x, y \in K).$$

В самом деле, из очевидных соотношений

$$x\pi(y) = \pi(x)\pi(y) + \pi^*(x)\pi(y), \quad \pi(x)y = \pi(x)\pi(y) + \pi(x)\pi^*(y)$$

видно, что мультипликативность проектора π равносильна условию $\pi(xy) = x\pi(y)$ $(x, y \in K)$ или $\pi(xy) = \pi(x)y$ $(x, y \in K)$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство $\pi^*(x)\pi(y) = 0$ $(x, y \in K)$ или $\pi(x)\pi^*(y) = 0$ $(x, y \in K)$ соответственно. Последние же два равенства очевидным образом вытекают как из мультипликативности π, так и из условия $\pi(xy) = \pi(x)y = x\pi(y)$ $(x, y \in K)$. Действительно, если $x_0 := \pi(x)$ и $y_0 := \pi^*(y)$, то в каждом из двух указанных случаев $\pi(x_0 y_0) = \pi(x)\pi \circ \pi^*(y) = 0$ и $\pi^*(x_0 y_0) = \pi^* \circ \pi(x)\pi^*(y) = 0$, стало быть, $x_0 y_0 = 0$.

(2) Носитель элемента BAP-кольца определяется так же, как и в 8.1.1. При этом выполняется неравенство $[x \cdot y] \leqslant [x] \circ [y]$. В самом деле, если $x = \pi x$, $y = \rho y$ и $\sigma := \pi \circ \rho$, то в силу (1) $\sigma(xy) = xy$, следовательно, $[x \cdot y] \leqslant \sigma = \pi \wedge \rho$. Переход к точной нижней границе по π, а затем по ρ приводит к требуемому.

Если $x \cdot y = 0$, то говорят, что x и y *ортогональны.* Элемент называется *регулярным*, если он ортогонален только к нулевому элементу. *Делителем нуля* именуют всякий элемент, ортогональный к какому-нибудь ненулевому элементу. Нетрудно понять, что если носители $[x]$ и $[y]$ элементов x и y латерально точного BAP-кольца дизъюнктны (как элементы булевой алгебры $\mathscr{B}$), то x и y ортогональны. Обратное, вообще говоря, неверно.

(3) Кольцо называют *полупервичным*, если оно не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. *Нильпотентность идеала* $J \subset K$ означает, что

$$J^{(n)} := \underbrace{J \cdot \ldots \cdot J}_{n \text{ раз}} = \{0\}$$

для некоторого натурального n.

(4) Пусть S — *мультипликативное подмножество* кольца K с единицей 1, т. е. $1 \in S$ и $xy \in S$ для любых $x, y \in S$. Введем отношение эквивалентности в множестве $K \times S$, полагая по определению

$$(x, s) \sim (x', s') \leftrightarrow (\exists\, t \in S)(t(sx' - s'x) = 0).$$

Пусть $S^{-1}K := K \times S/\sim$, а $(x, s) \mapsto x/s$ — каноническое фактор-отображение из $K \times S$ на $S^{-1}K$. Множество $S^{-1}K$ можно снабдить структурой кольца с помощью равенств

$$(x/s) + (y/t) := (tx + sy)/st, \quad (x/s)(y/t) := (xy)/(st).$$

Корректность этих определений можно проверить непосредственным подсчетом. Отображение $x \mapsto x/1$ $(x \in K)$ есть гомоморфизм из K в $S^{-1}K$, называемый *каноническим*. Кольцо $S^{-1}K$ называют *кольцом частных кольца* K *по подмножеству* S.

8.1.3. Теорема. *Пусть $\mathscr{G}$ — группа внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $G := \mathscr{G}{\downarrow}$. Тогда G — группа, причем существуют выделенная полная булева алгебра проекторов $\mathscr{B}$ в G и изоморфизм $\jmath : B \xrightarrow{\text{на}} \mathscr{B}$ такие, что*

$$b \leqslant [\![x = 0]\!] \leftrightarrow \jmath(b)x = 0 \quad (x \in G,\ b \in B).$$

Более того, $(G, \mathscr{B})$ — расширенная BAP*-группа и имеют место эквивалентности*:

(1) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$\mathscr{G}$ коммутативна» $\leftrightarrow$ «G коммутативна»*;

(2) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$\mathscr{G}$ — группа без кручения» $\leftrightarrow$ «G — группа без кручения»*.

$\lhd$ По теореме 7.3.5 $\mathscr{G}{\downarrow}$ — расширенная алгебраическая B-система и притом B-группа. Спуск операции суммы $+$ мы обозначим тем же символом $+$. Покажем, что G — группа. Ограничимся существованием обратных элементов.

Пусть $\varphi := (\forall\, x)(\exists!\, y)(x + y = 0)$. Тогда вычисляем по 7.1.7:

$$|\varphi|^G := \bigwedge_{x \in G} \bigvee_{y \in G} |x + y = 0|^G = \mathbb{1}.$$

В силу расширенности B-множества G для каждого $x \in G$ существует $y \in G$ такой, что

$$\mathbb{1} = |x + y = 0|^G = d(x + y, 0)^* = [\![x + y = 0]\!].$$

Стало быть, $x + y = 0$. Если $x + z = 0$ для некоторого $z \in G$, то $|x + z = 0|^G = \mathbb{1}$. Поскольку G есть B-группа, то

$$\mathbb{1} = |x + y = 0 \wedge x + z = 0|^G \Rightarrow |y = z|^G.$$

Значит, $|y = z|^G = [\![z = y]\!] = \mathbb{1}$ и $z = y$.

Конгруэнциями группы G являются в точности эквивалентности, определяемые различными ее нормальными подгруппами. Поэтому в силу теоремы 7.2.5

существует изоморфизм $\jmath$ из B на некоторую полную булеву алгебру $\mathscr{B}'$ нормальных подгрупп группы G такой, что

$$b \leqslant [\![x = 0]\!] \leftrightarrow x \in \jmath(b^*) \quad (b \in B,\ x \in G).$$

Если $b \in B$, то $\jmath(b) \cap \jmath(b^*) = \{0\}$. С другой стороны, для каждого $x \in G$ существуют $x_1 := \mathrm{mix}\{bx, b^*0\}$, $x_2 := \mathrm{mix}\{b^*x, b0\}$ и поскольку $b^* \leqslant [\![x_1 = 0]\!]$, $b \leqslant [\![x_2 = 0]\!]$, то $x_1 \in \jmath(b)$, $x_2 \in \jmath(b^*)$. Кроме того,

$$[\![x = x_1 + x_2]\!] \geqslant [\![x_1 = x]\!] \wedge [\![x_2 = 0]\!] \geqslant b,$$
$$[\![x = x_1 + x_2]\!] \geqslant [\![x_1 = 0]\!] \wedge [\![x_2 = x]\!] \geqslant b^*,$$

значит, $x = x_1 + x_2$. Итак, всякая подгруппа вида $\jmath(b)$ служит прямым слагаемым и ей соответствует оператор проектирования π_b на $\jmath(b)$ параллельно дополнительной подгруппе $\jmath(b^*)$. Точнее, оператор π_b задан условиями: $\pi_b x := x$ для всех $x \in \jmath(b)$ и $\pi_b x := 0$ при $x \in \jmath(b^*)$. Обозначим той же буквой $\jmath$ изоморфизм $b \mapsto \pi_b$, $b \in B$, и положим $\mathscr{B} := \jmath(B)$. Ясно, что $\mathscr{B}$ и $\jmath$ удовлетворяют требуемым условиям. Расширенность группы G равносильна расширенности соответствующего B-множества, ибо $x = \mathrm{mix}(b_\xi x_\xi)$ в том и только в том случае, если $\jmath(b_\xi)x = \jmath(b_\xi)x_\xi$ при всех ξ.

Допустим, что $\mathscr{G}$ — группа с кручением. Тогда

$$[\![(\exists\, x \in \mathscr{G})(\exists\, n \in \omega^{\wedge})(nx = 0) \wedge (0 \neq x) \wedge (0 < n)]\!] = \mathbb{1}.$$

Значит, существуют элемент $0 \neq x \in G$ и разбиение единицы $(b_n)_{n\in\omega}$ в B такие, что $b_n \leqslant [\![n^{\wedge}x = 0]\!] \wedge [\![x \neq 0]\!]$ для всех $0 < n \in \omega$. Заметим, что $[\![n^{\wedge}x = nx]\!] = \mathbb{1}$. Стало быть, $b_n \leqslant [\![x \neq 0]\!]$, $b_n \leqslant [\![nx = 0]\!]$ и $\jmath(b_n)(nx) = n\jmath(b_n)x = 0$. Хотя бы для одного $0 \neq n \in \omega$ проектор $\jmath(b_n)$ ненулевой. Если $\jmath(b_n)x = 0$, то $b_n \leqslant [\![x = 0]\!] = [\![x \neq 0]\!]^* \leqslant b_n$, что противоречит условию $b_n \neq 0$. Итак, $\jmath(b_n) \neq 0$, $n\jmath(b_n)x = 0$ и $n \neq 0$, но это означает, что G — группа с кручением. Наоборот, если $nx = 0$ для некоторых $x \in G$ и $0 \neq n \in \omega$, то $[\![n^{\wedge}x = 0]\!] = [\![nx = 0]\!] = \mathbb{1}$. Поэтому $[\![(\exists\, n \in \omega^{\wedge})(nx = 0) \wedge (n > 0)]\!] = \mathbb{1}$. Предположив, что $[\![\mathscr{G}$ — группа без кручения$]\!] = \mathbb{1}$, мы получим $[\![x = 0]\!] = \mathbb{1}$, т. е. G — группа без кручения. Утверждение, касающееся коммутативности, очевидно. $\triangleright$

8.1.4. Теорема. *Пусть $\mathscr{K}$ — кольцо внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $K := \mathscr{K}{\downarrow}$. Тогда K — расширенное* BAP*-кольцо с выделенной булевой алгеброй проекторов $\mathscr{B}$ и существует изоморфизм $\jmath : B \xrightarrow{\text{на}} \mathscr{B}$ такой, что*

$$b \leqslant [\![x = 0]\!] \leftrightarrow \jmath(b)x = 0 \quad (x \in K,\ b \in B).$$

При этом справедливы следующие эквивалентности:

(1) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «*$\mathscr{K}$ коммутативно (полупервично)*» $\leftrightarrow$ «*K коммутативно (полупервично)*»;

(2) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «*$\mathscr{K}$ не имеет делителей нуля*» $\leftrightarrow$ «*любые два элемента из K ортогональны лишь в том случае, когда дизъюнктны их носители*»;

(3) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «*$\mathscr{S}$ служит мультипликативным подмножеством кольца $\mathscr{K}$*» $\leftrightarrow$ «*$S := \mathscr{S}{\downarrow}$ — мультипликативное подмножество K*», *при этом $(\mathscr{S}^{-1}\mathscr{K}){\downarrow} \simeq S^{-1}K$ (здесь $\simeq$ означает кольцевой изоморфизм)*;

(4) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «*$\mathscr{K}$ — поле*» $\leftrightarrow$ «*K полупервично, ортогональность элементов K равносильна дизъюнктности их носителей и всякий регулярный элемент в нем обратим*»;

(5) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathfrak{R}$ — *радикал кольца с единицей* $\mathscr{K}$» $\leftrightarrow$ «$\mathfrak{R}{\downarrow}$ — *радикал кольца с единицей* K»; *иными словами, если* $\mathscr{K}$ *имеет единицу, то* $\mathfrak{R}(\mathscr{K}){\downarrow} = \mathfrak{R}(K)$;

(6) $\mathbb{V}^{(B)} \models$«$(\mathscr{K}, \mathscr{D})$ — это BAP-*кольцо*» $\leftrightarrow$ «*отображение* $\pi \mapsto \pi{\downarrow}$ $(\pi \in \mathscr{D}{\downarrow})$ *есть изоморфизм* $\mathscr{D}{\downarrow}$ *на некоторую булеву алгебру проекторов* D *в* K, *причем* $\mathscr{B}$ *есть правильная подалгебра* D *и* (K, D) — *это* BAP-*кольцо*».

$\lhd$ По теореме 8.1.3 K — расширенная BAP-группа и существует изоморфизм $\jmath$ из B на полную булеву алгебру $\mathscr{B}$ аддитивных проекторов, удовлетворяющий нужному условию. Снабдим K операцией умножения в соответствии с общим определением 7.3.3. Более подробно для элементов $x, y \in K$ будет $[\![x, y \in \mathscr{K}]\!] = \mathbb{1}$. Поэтому в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ существует произведение z этих элементов: $[\![z \in \mathscr{K}]\!] = [\![z = x \cdot y]\!] = \mathbb{1}$. Примем z за произведение x и y в K. Итак,

$$z = x \cdot y \leftrightarrow [\![z = x \cdot y]\!] = \mathbb{1} \quad (x, y, z \in K).$$

То, что при этом получается кольцо, без труда выводится с использованием теоремы 7.3.5. Возьмем произвольный элемент $b \in B$ и покажем, что проектор $\jmath(b)$ есть кольцевой гомоморфизм. Действительно, операция умножения в K является спуском соответствующей операции в $\mathscr{K}$. Поэтому она экстенсиональна и, значит, сохраняет перемешивание. Следовательно, учитывая определение проектора $\jmath(b)$ (см. 8.1.3), для любых x, $y \in K$ получим

$$\jmath(b)xy = \mathrm{mix}\{bxy, b^*0\} = \mathrm{mix}\{bx, b^*0\} \cdot \mathrm{mix}\{by, b^*0\} = \jmath(b)x \cdot \jmath(b)y.$$

Обратимся теперь к обоснованию утверждений (1)–(6).

(1): Пусть $\mu : \mathscr{K}^{n^\wedge} \to \mathscr{K}$ — отображение внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, сопоставляющее каждому упорядоченному набору $(x_1, \ldots, x_n)^{(B)}$ произведение $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \in K$. Тогда согласно 5.3.3 (8) и 5.3.5 отображение $\mu{\downarrow} : K^n \to K$ действует по правилу $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, так как умножение в K по определению есть спуск умножения в $\mathscr{K}$. Поскольку $\mathscr{J}^{(n^\wedge)} = \mu(\mathscr{J}^{n^\wedge})$, то, полагая $J := \mathscr{J}{\downarrow}$ и используя правило спуска 5.3.5 (1), получаем $J^{(n)} = \mu{\downarrow}(J^n) = \mu(\mathscr{J}^{n^\wedge}){\downarrow} = (\mathscr{J}^{(n^\wedge)}){\downarrow}$.

Нильпотентность идеала $\mathscr{J} \subset \mathscr{K}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ означает существование счетного разбиения единицы (b_n) в B такого, что

$$b_n \leqslant [\![\mathscr{J}^{(n^\wedge)} = \{0\}]\!] = [\![(\forall\, z)(z \in \mathscr{J}^{(n^\wedge)} \to z = 0)]\!] =$$
$$= \bigwedge_{z \in \mathscr{J}^{(n^\wedge)}{\downarrow}} [\![z = 0]\!] = \bigwedge_{z \in J^{(n)}} [\![z = 0]\!].$$

Таким образом, $\{0\} = \chi(b_n)J^{(n)} = (\chi(b_n)J)^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Если теперь кольцо K полупервично, а идеал $\mathscr{J} \subset \mathscr{K}$ нильпотентен внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, то из $\{0\} = (\chi(b_n)J)^{(n)}$ вытекает $\{0\} = \chi(b_n)J$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\{0\} = J$ и $[\![\{0\} = \mathscr{J}]\!] = \mathbb{1}$. Наоборот, пусть кольцо $\mathscr{K}$ полупервично и возьмем такой идеал $J \subset K$, что $J^{(n)} = 0$. Положим $\mathscr{J} := J{\uparrow}$ и заметим, что $\{0\} = J^{(n)} = \mathscr{J}^{(n)}{\downarrow}$. Отсюда $[\![\mathscr{J}^{(n)} = \{0\}]\!] = \mathbb{1}$ и, следовательно, $[\![\mathscr{J} = \{0\}]\!] = \mathbb{1}$. Но тогда $J = \{0\}$, что и требовалось.

(2): Утверждение $\mathbb{V}^{(B)} \models$«$\mathscr{K}$ не имеет делителей нуля» равносильно тому, что для любых x и $y \in \mathscr{K}{\downarrow}$ верно $b := [\![xy = 0]\!] = [\![x = 0]\!] \vee [\![y = 0]\!]$. Если выполнено последнее соотношение и $xy = 0$, то $b = \mathbb{1}$. Стало быть, для $e := [\![x = 0]\!]$ и $c := [\![y = 0]\!]$ имеем $e^* \wedge c^* = 0$. Кроме того, $\jmath(e^*)x = x$ и $\jmath(c^*)y = y$ и поэтому $[x] \leqslant \jmath(e^*)$ и $[y] \leqslant \jmath(c^*)$. Отсюда видно, что носители $[x]$ и $[y]$ дизъюнктны. Если же $[x] \circ [y] = 0$, то, как отмечено в 8.1.2, $x \cdot y = 0$.

Наоборот, допустим, что равенство $xy = 0$ равносильно дизъюнктности носителей $[x]$ и $[y]$. Тогда для $b := [\![xy = 0]\!]$ из равенств $0 = \jmath(b)xy = (\jmath(b)x) \cdot (\jmath(b)y)$ вытекает, что проекторы $\pi := [\jmath(b)x]$ и $\rho := [f(b)y]$ дизъюнктны. Заметим, что $\jmath(b) \circ \pi^* x = 0$ и $\jmath(b) \circ \rho^* y = 0$, а потому

$$[\![x = 0]\!] \vee [\![y = 0]\!] \geqslant (b \wedge f^{-1}(\pi^*)) \vee (b \wedge \jmath^{-1}(\rho^*)) = b.$$

(3): Утверждение о мультипликативности ясно. Докажем, что спуск кольца частных есть кольцо частных. Заметим сначала, что $(\mathscr{S} \times \mathscr{K}){\downarrow} = S \times K$. Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim \in \mathbb{V}^{(B)}$ такое, что для $x,\, x' \in K$ и $s,\, s' \in S$

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (x, s) \sim (x', s') \leftrightarrow (\exists\, t \in \mathscr{S})(t(sx' - s'x) = 0).$$

Если $\simeq := (\sim){\downarrow}$, то $\simeq$ — отношение эквивалентности в $K \times S$, причем

$$(x, s) \simeq (x', s') \leftrightarrow (\exists\, t \in S)\,(t(sx' - s'x) = 0).$$

Далее, спуск фактор-множества $\mathscr{S} \times \mathscr{K}/{\sim}$ биективен с множеством $KS \times K/{\simeq}$. Наконец, для $x, y \in K$ и $s, t \in S$ равенства

$$(x/s) + (y/t) = (tx + sy)/st, \quad (x/s)(y/t) = (xy/st)$$

верны в том и только в том случае, если они истинны внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Осталось сопоставить сказанное с определением кольца частных.

(4): Допустим, что $[\![\mathscr{K}$ — поле$]\!] = \mathbb{1}$. Тогда K полупервично и из $xy = 0$ вытекает $[x] \circ [y] = 0$ для всех x и $y \in K$ согласно (1) и (2). Для всякого регулярного элемента $x \in K$ будет $\jmath(b)xy = 0 \to \jmath(b)y = 0$, каковы бы ни были $b \in B$ и $y \in K$. Но тогда $[\![xy = 0]\!] \leqslant [\![y = 0]\!]$, т. е. $[\![x \neq 0]\!] = \mathbb{1}$. Таким образом, существует элемент $u \in K$ такой, что $[\![xu = ux = 1]\!] = \mathbb{1}$ и поэтому $xu = ux = 1$, т. е. x обратим в кольце K. Наоборот, пусть K полупервично, всякий регулярный элемент в нем обратим и ортогональность элементов K равносильна дизъюнктности их носителей. Тогда $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{K}$ — коммутативное кольцо», следовательно, $[\![\,\mathscr{K}$ — поле$\,]\!] = [\![(\forall\, x)(x \in \mathscr{K} \wedge x \neq 0 \to$ «x обратим»$)\,]\!] = \bigwedge\{[\![(\exists\, z)(z = x^{-1})]\!] : x \in K \wedge [\![x \neq 0]\!] = \mathbb{1}\}$. Значит, достаточно показать, что если $[\![x \neq 0]\!] = \mathbb{1}$, то $[\![\,x$ обратим$\,]\!] = \mathbb{1}$, каков бы ни был $x \in K$. Допустим, что $[\![x \neq 0]\!] = \mathbb{1}$ и $xy = 0$ для некоторого $y \in K$. Тогда для $\pi := [x]$ и $\rho := [y]$ имеем $\pi \circ \rho = 0$. С другой стороны, $\jmath(b)x = 0$ влечет $b \leqslant [\![x = 0]\!] = [\![x \neq 0]\!]^* = \mathbb{1}^* = \mathbb{0}$. Стало быть, $\rho := \jmath(\mathbb{1}) = I_K$. Отсюда $\pi \leqslant \rho^* = 0$ или $y = 0$. Следовательно, элемент x обратим в кольце K. Это немедленно приводит к соотношению $[\![x$ обратим в $\mathscr{K}\,]\!] = \mathbb{1}$.

(5): Элемент x входит в радикал кольца в том и только в том случае, если для любого y элемент $1 - yx$ обратим слева. Осталось заметить, что $1 - yx$ обратим слева в K тогда и только тогда, когда $[\![1 - yx$ обратим слева в $\mathscr{K}]\!] = \mathbb{1}$.

(6): Если $[\![\,(\mathscr{K}, \mathscr{D})$ — это BAP-кольцо$\,]\!] = \mathbb{1}$ и $\pi \in \mathscr{D}{\downarrow}$, то по 8.1.3 $\pi{\downarrow} : K \to K$ — гомоморфизм. С другой стороны, $[\![\pi \circ \pi = \pi]\!] = \mathbb{1}$. Значит, $(\pi{\downarrow}) \circ (\pi{\downarrow}) = (\pi \circ \pi){\downarrow} = \pi{\downarrow}$, т. е. $\pi{\downarrow}$ — проектор. То, что D — булева алгебра, было установлено в 7.3.8. Тем самым (K, D) — это BAP-кольцо. По определению $\mathscr{B} = \{\pi{\downarrow} : \pi \in \{\mathbb{0}_{\mathscr{D}}, \mathbb{1}_{\mathscr{D}}\}^B{\downarrow}\}$ (см. 8.1.3) и поэтому $\mathscr{B} \subset D$. Аналогично можно установить и противоположную импликацию. $\triangleright$

8.1.5. Выведем в качестве следствия одно свойство BAP-колец. Возьмем BAP-кольца K_1 и K_2, и пусть $\jmath_1$ и $\jmath_2$ — изоморфизмы B на выделенные булевы алгебры проекторов в K_1 и K_2 соответственно. Гомоморфизм $h : K_1 \to K_2$ называют B-*однородным*, если $h \circ \jmath_1(b) = \jmath_2(b) \circ h$ $(b \in B)$. Будем говорить также, что *K_1 — кольцо с выделенной булевой алгеброй проекторов B и h перестановочен с проекторами из B.*

8.1.6. Теорема. *Пусть $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ — это* BAP-*кольца с одной и той же выделенной алгеброй проекторов $\mathscr{D}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Положим $D := \mathscr{D}{\downarrow}$ и $K_l := \mathscr{K}_l{\downarrow}$ $(l := 1, 2)$. Тогда K_1 и K_2 — это* BAP-*кольца с выделенной алгеброй проекторов D и если внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ верно, что h — гомоморфизм из кольца $\mathscr{K}_1$ в кольцо $\mathscr{K}_2$, перестановочный с проекторами из $\mathscr{D}$, то $h{\downarrow}$ — гомоморфизм из кольца K_1 в кольцо K_2, перестановочный с проекторами из D. Если h — изоморфизм $\mathscr{K}_1$ на $\mathscr{K}_2$, то $h{\downarrow}$ — изоморфизм K_1 на K_2.*

$\triangleleft$ Непосредственно выводится из 7.3.6–7.3.8. $\triangleright$

8.1.7. Теорема. *Пусть (G, B) и (K, B) — соответственно латерально точные* BAP-*группа и* BAP-*кольцо с выделенной булевой алгеброй проекторов B. Тогда существуют $\mathscr{G}, \mathscr{K} \in \mathbb{V}^{(B)}$ такие, что $[\![\mathscr{G}$ — группа$]\!] = [\![\mathscr{K}$ — кольцо$]\!] = \mathbb{1}$, а спуски $\mathscr{G}{\downarrow}$ и $\mathscr{K}{\downarrow}$ служат максимальными расширениями (G, B) и (K, B) соответственно.*

$\triangleleft$ Рассмотрим отображение $d : G \times G \to B$ заданное формулой $d(x, y) = [x - y]$ $(x, y \in G)$. Из 8.1.1 (3) видно, что (G, d) — булево множество. Более того, $\mathfrak{G} := (G, +, 0)$ — алгебраическая B-система. Нетрудно проверить, что перемешивание в смысле введенной булевой метрики совпадает с перемешиванием, введенным в 8.1.1 (2). Если формула $\varphi(G)$ выражает аксиомы группы, то $|\varphi(G)|^{\mathfrak{G}} = \mathbb{1}$. Остается применить 7.4.2 и 7.4.7. Аналогичные рассуждения проходят и в случае кольца. $\triangleright$

8.2. Коммутативные полупервичные кольца

Здесь мы займемся указанным в названии специальным классом колец.

8.2.1. Всюду в данном параграфе K — коммутативное кольцо с единицей 1, причем $1 \neq 0$. В этом случае полупервичность кольца равносильна отсутствию в нем ненулевых нильпотентных элементов, т. е. таких элементов $0 \neq x \in K$, что $x^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Напомним также, что коммутативное кольцо называют *областью целостности* или *целостным кольцом*, если $0 \neq 1$ и 0 — единственный делитель нуля.

Отношение $\perp$ в полупервичном кольце K, определяемое равенством

$$\perp := \{(x, y) \in K \times K : \ xy = 0\},$$

есть отношение дизъюнктности, причем наименьшая $\perp$-компонента совпадает с одноточечным множеством $\{0\}$. Дизъюнктность $\perp$ будет простой в том и только в том случае, когда K — область целостности.

$\triangleleft$ Отношение $\perp$ симметрично ввиду коммутативности K. Для произвольного элемента $x \in \pi_\perp(K)$ будет $x^2 = 0$ и поэтому $x = 0$. Следовательно, второе свойство дизъюнктности (см. 7.2.9 (2)) вытекает из полупервичности K. Если $z = xy \neq 0$, то для произвольных $u \in \pi_\perp(\{x\})$ и $v \in \pi_\perp(\{y\})$ будет $uz = (ux)y = 0$ и $zv = x(yv) = 0$. Значит,

$$z \in \pi_\perp\big(\pi_\perp(\{x\}) \cup \pi_\perp(\{y\})\big) = [x] \cap [y],$$

где $[u]$ — наименьшая $\perp$-компонента, содержащая u (не путать с носителем из 8.1.2). Иначе говоря, выполнено и третье условие из определения дизъюнктности 7.2.9 (3). Итак, $\perp$ — отношение дизъюнктности в K. Привлекая определение 7.2.9 (4), видим, что дизъюнктность $\perp$ проста лишь в том случае, когда из равенства $xy = 0$ вытекает либо $x = 0$, либо $y = 0$. $\rhd$

8.2.2. Легко видеть, что *аннулятор* $L^\perp$ непустого множества $L \subset K$, определяемый формулой

$$L^\perp := \pi_\perp(L) := \big\{k \in K : kL = \{0\}\big\},$$

служит идеалом кольца K. Идеалы такого вида называют *аннуляторными*. Можно показать, что множество $J \subset K$ является аннуляторным идеалом в том и только в том случае, если $J = J^{\perp\perp}$, где $J^{\perp\perp} := (J^\perp)^\perp$.

Аннуляторные идеалы любого коммутативного полупервичного кольца K образуют полную булеву алгебру $\mathscr{B}(K)$, причем решеточные операции в $\mathscr{B}(K)$ имеют вид:

$$L \wedge M := L \cap M, \quad L \vee M := (L \cup M)^{\perp\perp} \quad (L, M \in \mathscr{B}(K)),$$

а булево дополнение L^* идеала $L \in \mathscr{B}(K)$ совпадает с его аннулятором $L^\perp$.

$\lhd$ Вытекает из 7.2.10. $\rhd$

8.2.3. Пусть B — полная булева алгебра аннуляторных идеалов кольца K. Определим в K булево расстояние, положив

$$d(k_1, k_2) := \{k_1 - k_2\}^{\perp\perp} \quad (k_1, k_2 \in K).$$

Коммутативное полупервичное кольцо K с B-метрикой d и дизъюнктностью $\perp$ представляет собой B-кольцо с дизъюнктностью.

$\lhd$ Убедимся сначала, что выполнены свойства булевой метрики из 5.6.1. Свойства (1) и (2) видны непосредственно из определения d. Для проверки свойства 5.6.1 (3) возьмем $k \in \{k_1 - k_2\}^\perp \cap \{k_2 - k_3\}^\perp$ и заметим, что $k(k_1 - k_2) = 0$ и $k(k_2 - k_3) = 0$, т. е. $k(k_1 - k_3) = 0$ или $k \in \{k_1 - k_3\}^\perp$. Отсюда, используя свойства поляры из 1.2.7, выводим:

$$d(k_1, k_3) = \{k_1 - k_3\}^{\perp\perp} \subset (\{k_1 - k_2\}^\perp \cap \{k_2 - k_3\}^\perp)^\perp =$$

$$= \{k_1 - k_2\}^{\perp\perp} \vee \{k_2 - k_3\}^{\perp\perp} = d(k_1, k_2) \vee d(k_2, k_3).$$

Если $d(k_1, k_2) = \mathbb{0}$, то $\{k_1 - k_2\}^\perp = K$ и, значит, $(k_1 - k_2)^2 = 0$. Но так как в K нет ненулевых нильпотентных элементов, то $k_1 = k_2$.

Проверим, что кольцевые операции — нерастягивающие отображения. Надо показать, что

$$\{k_1 - k_1'\}^\perp \cap \{k_2 - k_2'\}^\perp \subseteq \{(k_1 + k_2) - (k_1' + k_2')\}^\perp;$$

$$\{k_1 - k_1'\}^\perp \cap \{k_2 - k_2'\}^\perp \subseteq \{k_1 k_2 - k_1' k_2'\}^\perp.$$

Первое включение очевидно. Имеют место очевидные соотношения $k_1k_2 - k_1'k_2' = k_1k_2 - k_1k_2' + k_1k_2' - k_1'k_2' = k_1(k_2 - k_2') + k_2'(k_1 - k_1')$, откуда следует второе включение.

Кольцевые операции очевидным образом сохраняют дизъюнктность, т. е. из $x, y \in a^\perp$ следует, что $xy, x + y \in a^\perp$. Согласованность дизъюнктности с B-метрикой d тривиально следует из определений, ибо $d(x, 0) = x^{\perp\perp}$ (см. 7.2.11). $\rhd$

8.2.4. *Для любых $x, y \in K$ имеет место равенство $d(xy, 0) = d(x, 0) \wedge d(y, 0)$.*

$\lhd$ Нужно установить равенство $\{xy\}^{\perp\perp} = \{x\}^{\perp\perp} \wedge \{y\}^{\perp\perp}$, в котором включение $\subset$ очевидно. Возьмем $u \in \{x\}^{\perp\perp} \wedge \{y\}^{\perp\perp} = (\{x\}^{\perp} \cup \{y\}^{\perp})^{\perp}$. Это означает, что для любых $a, b \in K$ из $ax = 0$ следует $au = 0$, а из $by = 0$ следует $bu = 0$. Применив эти соображения при $b := v^2x$ и $a := v^2u$, для произвольного $v \in K$ заключаем:

$$v \perp xy \to (v^2x)y = 0 \to (v^2u)x = 0 \to v^2u^2 = 0 \to (vu)^2 = 0 \to vu = 0.$$

Итак, для любого $v \in \{xy\}^{\perp}$ выполнено $v \perp u$. Стало быть, $u \in \{xy\}^{\perp\perp}$. $\rhd$

8.2.5. Элемент $e \in K$ называют *идемпотентом*, если $e^2 = e$. Идемпотенты коммутативного кольца K с единицей образуют булеву алгебру $\mathfrak{P}(K)$ (не обязательно полную), в которой булевы операции имеют вид

$$e \wedge d = e \cdot d, \quad e \vee d = e + d - e \cdot d, \quad e^* = 1 - e \quad (e, d \in \mathfrak{P}(K)).$$

Кольцо K называют *регулярным* (в смысле фон Неймана), если каждый главный идеал K порожден идемпотентом или, эквивалентно, если каждый главный идеал K служит прямым слагаемым. Регулярность кольца K равносильна разрешимости в нем уравнения $a^2x = a$ для любого элемента $a \in K$ (уравнения $axa = a$ в некоммутативном случае).

Если коммутативное полупервичное кольцо K разложимо относительно введенной булевой метрики, то каждый аннуляторный идеал порожден идемпотентом и, в частности, кольцо K регулярно. При этом отображение $\jmath : e \mapsto e \cdot K$ осуществляет булев изоморфизм $\mathfrak{P}(K)$ на $\mathscr{B}(K)$.

$\lhd$ Возьмем аннуляторный идеал $b \in \mathscr{B}(K)$. В силу разложимости B-кольца K существует элемент $e \in K$, для которого $b \wedge d(1, e) = 0$ и $b^* \wedge d(0, e) = 0$, т. е. $e := \operatorname{mix}\{b1, b^*0\}$. Этот элемент является идемпотентом, так как из 8.2.4 вытекает $d(e^2, e) = d(e, 0) \wedge d(1, e) \leqslant b \wedge b^{\perp} = 0$. В частности, $e \perp (1 - e)$ и поэтому аннуляторные идеалы $d(e, 0) = \{e\}^{\perp\perp}$ и $d(1, e) = \{1 - e\}^{\perp\perp}$ дизъюнктны. Следовательно, $d(e, 0) = b$ и $d(1, e) = b^{\perp}$. Теперь, используя равенство $d(ex, x) = d(1, e) \wedge d(x, 0)$ (см. 8.2.4) и взяв произвольный $x \in K$, заключаем:

$$x \in b \leftrightarrow d(x, 0) \leqslant b \leftrightarrow d(ex, x) = 0 \leftrightarrow ex = x.$$

Таким образом, $b = eK$. Оставшиеся детали очевидны. $\rhd$

8.2.6. Множество $S \subset K$ называют *плотным*, если $S^{\perp} = \{0\}$, т. е. если для любого $k \in K$ из равенства $k \cdot S = \{0\}$ следует $k = 0$. Кольцо K называют *рационально полным*, если для любого плотного идеала $J \subset K$ и произвольного группового гомоморфизма $h : J \to K$, для которого $h(kx) = kh(x)$ при всех $k \in K$ и $x \in J$, существует элемент $r \in K$ такой, что $h(x) = rx$ для всех $x \in J$.

Говорят, что кольцо K *самоинъективно*, если оно инъективно как K-модуль. Напомним, что K-модуль M называют *инъективным*, если для любых данных K-модуля N, K-подмодуля N_0 и K-гомоморфизма $h_0 : N_0 \to M$ существует продолжение до K-гомоморфизма $h : N \to M$.

Критерий Бэра. *Пусть K — кольцо. K-модуль M инъективен в том и только в том случае, если для любых идеала $J \subset K$ и K-гомоморфизма $h : J \to M$ существует элемент $m \in M$ такой, что $h(x) = mx$ для всех $x \in J$.*

$\lhd$ Доказательство см., например, у И. Ламбека [131] и К. Фейса [166]. $\rhd$

8.2.7. Теорема. *Рационально полное полупервичное кольцо является расширенным B-кольцом. Если кольцо регулярно, то верно и обратное утверждение: расширенное B-кольцо рационально полно.*

$\triangleleft$ Пусть (b_ξ) — разбиение единицы в булевой алгебре аннуляторных идеалов B и (k_ξ) — произвольное семейство в кольце K. Пусть J — множество всех сумм вида $\sum_\xi x_\xi$, где $x_\xi \in b_\xi$ и в сумме имеется лишь конечное число ненулевых слагаемых x_ξ. Тогда J — плотный идеал. Определим отображение $h : J \to K$ формулой $h(x) := k_\xi x \ \ (x \in b_\xi)$. Ясно, что h удовлетворяет нужным условиям из определения рациональной полноты. Значит, при некотором $r \in K$ имеет место представление: $h(x) = rx$ для всех $x \in J$. Если $x \in b_\xi$, то $h(x) = rx = k_\xi x$ или $x(r - k_\xi) = 0$. Тем самым $b_\xi \subset \{r - k_\xi\}^\perp = d(r, k_\xi)$, значит, будет $b_\xi \wedge d(r, k_\xi) = 0$ и $r = \mathrm{mix}(b_\xi k_\xi)$.

Предположим теперь, что кольцо K регулярно. Возьмем идеал $J \subset K$ и K-гомоморфизм $h : J \to K$. Используя лемму Куратовского — Цорна, можно в множестве $J \cap \mathfrak{P}(K)$ выбрать максимальное множество попарно дизъюнктных элементов (e_ξ). Ввиду того, что рассматриваемое B-кольцо расширенно, существует элемент $k \in K$, для которого $e_\xi k = e_\xi h(e_\xi) = h(e_\xi)$. Заметим, что $e_\xi kx = xh(e_\xi) = e_\xi h(x)$, т. е. $e_\xi(h(x) - kx) = 0$ для всех ξ и $x \in J$. Если теперь $h(x) \neq kx$, то для некоторого ненулевого идемпотента $e_0 \in \mathfrak{P}(K)$ будет $e_0(h(x) - kx) \neq 0$. Но тогда должно быть $e_0 \perp e_\xi$ для всех ξ, что противоречит максимальности семейства (e_ξ). $\triangleright$

8.2.8. Отметим три следствия из установленного факта.

(1) *Рационально полное полупервичное кольцо регулярно.*

$\triangleleft$ Следует из 8.2.5, так как в силу 8.2.7 рационально полное полупервичное кольцо разложимо. $\triangleright$

(2) *Аннуляторный идеал рационально полного коммутативного полупервичного кольца является рационально полным кольцом.*

$\triangleleft$ Аннуляторный идеал K_0 расширенного B-кольца K является расширенным B_0-кольцом, где B_0 — булева алгебра аннуляторных идеалов кольца K_0. Поэтому к K_0 нужно применить 8.2.7. $\triangleright$

(3) *Кольцо рационально полно тогда и только тогда, когда оно самоинъективно.*

$\triangleleft$ $\to$: Рассмотрим гомоморфизм $h : J \to K$, где J — идеал рационально полного кольца K. Согласно 8.2.7 $K_0 := J^{\perp\perp} = eK$ для некоторого идемпотента $e \in K$. Так как кольцо K_0 рационально полно, а отображение $eh : J \to K_0$ является гомоморфизмом, то существует элемент $k \in K$ такой, что $eh(x) = kx$ при всех $x \in J$. Осталось заметить, что $eh(x) = h(ex) = h(x)$ $(x \in J)$.

$\leftarrow$: Это следует из критерия Бэра. $\triangleright$

8.3. Спуски полей

Здесь мы устанавливаем, что рационально полные коммутативные полупервичные кольца биективно соответствуют полям в булевозначных моделях теории множеств. Отсюда, в частности, вытекает возможность переноса хорновских свойств полей на такие кольца. Необходимые факты из теории колец изложены в деталях, например, у И. Ламбека [131], и К. Фейса [166].

8.3.1. Теорема. *Пусть элемент $\mathscr{K} \in \mathbb{V}^{(B)}$ таков, что $[\![\mathscr{K}$ — поле$]\!] = \mathbb{1}$. Тогда $\mathscr{K}{\downarrow}$ — рационально полное коммутативное полупервичное кольцо и существу-*

ет изоморфизм χ алгебры B на булеву алгебру аннуляторных идеалов $\mathscr{B}(\mathscr{K}{\downarrow})$ такой, что

$$b \leqslant [\![x = 0]\!] \leftrightarrow x \in \chi(b^*) \quad (x \in K,\ b \in B).$$

$\triangleleft$ Вытекает из 8.1.4, 8.2.5 и 8.2.7. Нужно только заметить, что в силу 8.1.4 (4) проекторы $\jmath(b)$ соответствуют в точности аннуляторным идеалам $\chi(b)$. $\triangleright$

8.3.2. Теорема. *Пусть K — полупервичное коммутативное рационально полное кольцо и $B = \mathscr{B}(K)$ — полная булева алгебра аннуляторных идеалов. Тогда в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ существует поле $\mathscr{K} \in \mathbb{V}^{(B)}$ такое, что кольца K и $\mathscr{K}{\downarrow}$ изоморфны.*

$\triangleleft$ Воспользуемся теоремой 7.4.3. Кольцо K является расширенной алгебраической B-системой в силу 8.2.7. Следовательно, изоморфизм $\imath$ из 7.4.3 (3) будет биекцией. Так как K — коммутативное B-кольцо, то из 7.4.3 (4) вытекает, что $[\![\mathscr{K}$ — коммутативное кольцо$]\!] = \mathbb{1}$. Осталось доказать, что в кольце $\mathscr{K}$ обратим любой ненулевой элемент, т. е. $[\![\mathscr{K} \models \varphi]\!] = \mathbb{1}$, где φ — $(\forall\, y)(\exists\, x)(y \neq 0 \to xy = 1)$. В силу 7.4.3 (4) достаточно установить, что $|\varphi|^K = \mathbb{1}$, т. е. $K \models_B \varphi$.

Так как кольцо K регулярно (см. 8.2.5 и 8.2.7), то для произвольного $y \in K$ найдется элемент $x \in K$ такой, что $y^2x = y$. Имеют место очевидные импликации

$$y^2x = y \to y(yx - 1) = 0 \to y \in \{yx - 1\}^{\perp} \to$$
$$\to \{y\} \subset \{yx - 1\}^{\perp} \to \{y\}^{\perp\perp} \subset \{yx - 1\}^{\perp\perp\perp} \to \{y\}^{\perp\perp} \subset \{yx - 1\}^{\perp}.$$

Учитывая определение d, заключаем: $d(y, 0) \leqslant d(yx, 1)^{\perp}$. Привлекая определение B-значной интерпретации атомарных формул из 7.1.7, получаем, что для любого $y \in K$ существует $x \in K$ такой, что $|y \neq 0 \to yx = 1|^K = \mathbb{1}$. Вновь воспользовавшись определениями 7.1.7, мы приходим к требуемому: $|\varphi|^K = \mathbb{1}$. $\triangleright$

8.3.3. Следствие. *Хорновские теории рационально полных коммутативных полупервичных колец и полей совпадают.*

8.3.4. Приведем теперь построение полного кольца частных, основанное на установленных результатах о булевозначной реализации. Сначала напомним некоторые определения.

Кольцо $\widehat{K}$ называют *классическим кольцом частных* кольца K, если существует мономорфизм колец $\lambda : K \to \widehat{K}$ такой, что элемент $\lambda(x)$ обратим в $\widehat{K}$ для каждого регулярного элемента $x \in K$ и имеет место представление

$$\widehat{K} = \{\lambda(x)\lambda(y)^{-1} : x, y \in K,\ y \text{ регулярен в } K\}.$$

Если K — область целостности, то $\widehat{K}$ — поле, которое называют *полем частных кольца* K. Классическое кольцо частных мы будем обозначать символом $Q_{\mathrm{cl}}(K) := \widehat{K}$. Заметим, что $Q_{\mathrm{cl}}(K) = S^{-1}h(K)$, если в качестве мультипликативного множества S, фигурирующего в 8.1.2, взять множество всех регулярных элементов (т. е. всех неделителей нуля) кольца K.

В то же самое время кольцо K является алгебраической B-системой и согласно 7.4.6 обладает максимальным расширением $(K', \imath)$, где $\imath : K \to K'$ — кольцевой мономорфизм. Кольцо $Q_B(K) := K'$ принято называть также *ортогональным пополнением* кольца K.

Кольцо $Q(K) := Q_{\mathrm{cl}}\big(Q_B(K)\big)$ вместе с мономорфизмом $\varkappa := \lambda \circ \imath$ называют *полным кольцом частных* кольца K.

8.3.5. Теорема. *Пусть K — коммутативное полупервичное кольцо и B — булева алгебра его аннуляторных идеалов. Пусть $\mathscr{K}$ — булевозначная реализация* *кольца K как алгебраической B-системы. Тогда $[\![\,\mathscr{K}$ — целостное кольцо$\,]\!] = \mathbb{1}$ и при этом существуют элементы $\mathscr{F}, \lambda \in \mathbb{V}^{(B)}$ такие, что справедливы утверждения:*

(1) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «*$\mathscr{F}$ — поле частных целостного кольца $\mathscr{K}$, а $\lambda : \mathscr{K} \to \mathscr{F}$ — вложение кольца $\mathscr{K}$ в поле частных*»;

(2) *$(\mathscr{F}{\downarrow}, \lambda{\downarrow} \circ \imath)$ — полное кольцо частных кольца K, где $\imath : K \to K' := K{\downarrow}$ — каноническое вложение.*

$\triangleleft$ Булевозначная реализация $\mathscr{K} := K^{\sim}$ алгебраической B-системы (B-кольца) K будет кольцом внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. 7.4.1, 7.4.3 и 8.2.3). В соответствии с 7.2.11 B-значная дизъюнктность Δ в кольце K определена формулой $\Delta(x, y) := (d(x, 0) \wedge d(y, 0))^*$ и поэтому в силу 8.2.4 будет $\Delta(x, y) := \big(d(xy, 0)\big)^* = [\![xy = 0]\!]$. Отсюда видно, что для булевозначной реализации δ этой дизъюнктности будет $[\![\delta(x, y) \leftrightarrow xy = 0]\!]$. Таким образом, δ связана с кольцевым умножением в $\mathscr{K}$ так же, как и Δ с кольцевым умножением в K'. Согласно 7.4.10 дизъюнктность δ простая, а это означает ввиду 8.2.1, что $[\![\,\mathscr{K}$ — целостное кольцо$\,]\!] = \mathbb{1}$.

Существование элементов $\mathscr{F}, \lambda \in \mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющих условию (1), вытекает из принципа максимума и утверждения о том, что область целостности имеет кольцо частных, которое является полем. Пусть $K' := \mathscr{K}{\downarrow}$ и $\imath : K \to K'$ — канонический мономорфизм (см. 7.4.3). Тогда K' — ортогональное пополнение кольца K, т. е. $K' = Q_B(K)$. Кроме того, из 8.1.4 (3) следует, что $\mathscr{F}{\downarrow} = Q_{\mathrm{cl}}(K')$. Окончательно получаем: $\mathscr{F}{\downarrow} = Q(K)$. $\triangleright$

Из установленной теоремы можно извлечь разнообразные следствия о строении кольца частных. Рассмотрим некоторые из них.

8.3.6. (1) *Полное кольцо частных любого коммутативного полупервичного кольца рационально полно и, следовательно, самоинъективно и регулярно.*

$\triangleleft$ Непосредственно следует из 8.2.8 (1, 3), 8.3.1 и 8.3.5. $\triangleright$

(2) *Булева алгебра $B := \mathscr{B}(K)$ изоморфна булевой алгебре аннуляторных идеалов каждого из колец K' и $Q(K)$. Изоморфизмы осуществляются отображениями:*

$$g_\imath : L \mapsto \imath^{-1}(L) \ (L \in \mathscr{B}(K')), \quad g_\kappa : L \mapsto \kappa^{-1}(L) \ (L \in \mathscr{B}(Q(K))).$$

$\triangleleft$ Вытекает из 8.1.4 и 7.4.10. $\triangleright$

8.3.7. *Полное кольцо частных $Q(K)$ коммутативного полупервичного кольца K является инъективным K-модулем.*

$\triangleleft$ В силу критерия Бэра (см. 8.2.6) достаточно показать, что если J — идеал K и $h : J \to Q(K)$ — некоторый K-гомоморфизм, то для некоторого $q \in Q(K)$ имеет место представление $h(x) = qx$ $(x \in J)$. Согласно теореме 8.3.5, можно, не ограничивая общности, считать, что $K \subset K' := \mathscr{K}{\downarrow} \subset Q(K) = \mathscr{F}{\downarrow}$. Заметим, что для $x \in J$ и $k \in K$ из $x \perp k$ следует $h(x) \perp k$. Тем самым $x \in b \to h(x) \in g_\kappa^{-1}(b)$ для каждого $b \in B$ и, следовательно, h — экстенсиональное отображение. Пусть $\mathscr{J} := J{\uparrow}$ и $\eta := h'{\uparrow}$. Тогда $\mathscr{J}$ — идеал $\mathscr{K}$, а $\eta : \mathscr{J} \to \mathscr{F}$ — это $\mathscr{K}$-гомоморфизм.

Теперь достаточно показать, что для некоторого $q \in \mathscr{F}$ будет $\eta(x) = qx$ для всех $x \in \mathscr{J}$. Последнее без труда выводится из следующего очевидного соотношения $a\eta(x) = \eta(ax) = x\eta(a)$, справедливого для всех $a, x \in \mathscr{J}$. В самом деле, если $a \neq 0$, то положим $q := \eta(a)a^{-1} \in \mathscr{F}$. $\triangleright$

8.3.8. Подмодуль M некоторого K-модуля $\widehat{M}$ называют *массивным* (или *существенным*), если он имеет ненулевое пересечение с любым ненулевым подмодулем модуля $\widehat{M}$ или, что то же самое для любого элемента $0 \neq x \in \widehat{M}$ найдется такой элемент $k \in K$, что $kx \neq 0$ и $kx \in M$. *Инъективной оболочкой* кольца K называют пару $(\widehat{K}, \tau)$ такую, что $\widehat{K}$ — инъективный K-модуль, $\tau : K \to \widehat{K}$ — мономорфизм и $\tau(K)$ — массивный подмодуль в $\widehat{K}$.

Пара $(Q(K), \kappa)$ является инъективной оболочкой кольца K, рассматриваемого как K-модуль.

◁ В силу доказанного в 8.3.7 нужно лишь установить, что $\kappa(K)$ есть массивный подмодуль K-модуля $Q(K)$. При этом можно считать, что $K \subset Q(K)$. Следовательно, нужно показать, что для любого $0 \neq q \in Q(K)$ существует $k \in K$ со свойствами $kq \neq 0$ и $kq \in K$.

Из определения $Q(K)$ видно, что существуют семейства $(x_\xi) \subset K$ и $(y_\xi) \subset K$ и разбиение единицы $(b_\xi) \subset B$ такие, что $q = xy^{-1}$, $x = \operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$ и $y = \operatorname{mix}(b_\xi y_\xi)$.

Поскольку $q \neq 0$, для некоторого индекса ξ будет $ex_\xi \neq 0$, где e — идемпотент в K', соответствующий идеалу $b := b_\xi$. Верно также, что $ey_\xi \neq 0$, так как y — регулярный элемент.

Пусть a — произвольный ненулевой элемент из идеала b, причем $ax_\xi \neq 0$. Положим $k := ay_\xi = aey_\xi$. Тогда $qk = a(ex)(y_\xi y^{-1}) = ax_\xi = aex_\xi \in b \subset K$. ▷

8.3.9. *Дробью* называют гомоморфизм K-модулей $J \to K$, где J — плотный идеал кольца K. В множестве дробей определена следующая эквивалентность: две дроби эквивалентны если они совпадают на пересечении областей определения. Фактор-множество по этой эквивалентности естественным образом наделено структурой кольца (подробности см. у И. Ламбека [131] и К. Фейса [166]). Это кольцо мы обозначим символом $Q'(K)$.

Кольца $Q(K)$ и $Q'(K)$ изоморфны.

◁ Вновь будем считать K подкольцом кольца $Q(K)$. Учитывая 8.3.8, каждой дроби $h \in Q'(K)$ можно сопоставить элемент $\sigma(h)$, для которого $h(x) = \sigma(h)x$ для всех x из области определения h. Легко видеть, что отображение $h \mapsto \sigma(h)$ является мономорфизмом колец и поэтому осталось обосновать сюръективность этого гомоморфизма.

Для произвольного $q \in Q'(K)$ положим $J := \{k \in K : qk \in K\}$. Тогда J — плотный идеал K. Если дробь h_q задается формулой $h_q : x \mapsto qx$, то $\sigma(h_q) = q$. ▷

8.3.10. *Кольцом частных* (*в смысле Утуми*) кольца K называют пару (R, ν), где R — кольцо и $\nu : K \to R$ — кольцевой мономорфизм, если существует мономорфизм $\tau : R \to Q(K)$ такой, что $\kappa = \tau \circ \nu$.

(1) *Пусть K' обозначает максимальное расширение полупервичного кольца K как алгебраической B-системы. Тогда K' — кольцо частных кольца K.*

◁ Следует из определения кольца частных, если положить $\nu := \imath$ и $\tau := \lambda$. ▷

(2) *Существует единственное с точностью до изоморфизма рационально полное кольцо частных $Q(K)$ коммутативного полупервичного кольца K.*

◁ Вытекает, например, из единственности инъективной оболочки с точностью до изоморфизма. ▷

8.3.11. В заключение этого параграфа коротко остановимся на булевозначной интерпретации векторных пространств. На этом пути возникает класс отделимых инъективных унитарных модулей над полупервичными рационально полными кольцами. Модуль M над кольцом K называют *отделимым*, если для любого элемента $x \in M$ и любого плотного идеала $J \subset K$ из равенства $J \cdot x = \{0\}$ следует, что $x = 0$.

Рассмотрим рационально полное полупервичное коммутативное кольцо K с единицей. Пусть $\jmath$ — изоморфизм булевой алгебры B на булеву алгебру всех идемпотентов $\mathscr{I}(K)$. Понятно, что булева метрика из 8.2.3 может быть вычислена по формуле

$$d(k_1, k_2) := \bigwedge\{b \in B : \jmath(b^*)k_1 = \jmath(b^*)k_2\} \quad (k_1, k_2 \in K).$$

Возьмем теперь K-модуль M и введем булеву метрику $d := d_M$ на нем формулой:

$$d(x, y) := \bigwedge\{b \in B : \jmath(b^*)x = \jmath(b^*)y\} \quad (x, y \in M).$$

Очевидно, что так определенное отображение $d : M \times M \to B$ будет B-полуметрикой. Отделимость же модуля M гарантирует, что B-полуметрика d является B-метрикой. Таким образом, отделимый K-модуль имеет структуру алгебраической B-системы. Следующие две теоремы можно доказать изложенными в этом параграфе методами.

8.3.12. Теорема. *Пусть $\mathscr{M}$ — линейное пространство над полем $\mathscr{K}$ в модели $\mathbb{V}^{(B)}$, а $\chi : B \to \mathscr{B}(\mathscr{K}{\downarrow})$ — булев изоморфизм из 8.3.1. Тогда $\mathscr{M}{\downarrow}$ — унитарный отделимый инъективный модуль над полупервичным рационально полным кольцом $\mathscr{K}{\downarrow}$ и выполнено соотношение*

$$b \leqslant [\![x = 0]\!] \leftrightarrow \chi(b)x = 0 \quad (x \in \mathscr{M}{\downarrow},\ b \in B).$$

8.3.13. Теорема. *Пусть K — некоторое рационально полное коммутативное кольцо, $B = \mathscr{B}(K)$ и $\mathscr{K}$ — булевозначная реализация кольца K. Пусть M — унитарный отделимый инъективный K-модуль. Тогда существует элемент $\mathscr{M} \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $[\![\,\mathscr{M}$ — линейное пространство над полем $\mathscr{K}\,]\!] = \mathbb{1}$, причем существуют изоморфизмы алгебраических B-систем $\imath_K : K \to \mathscr{K}{\downarrow}$ и $\imath_M : M \to \mathscr{M}{\downarrow}$ такие, что*

$$\imath_M(ax) = \imath_K(a)\imath_M(x) \quad (a \in K,\ x \in M).$$

8.4. Упорядоченные группы и кольца

Полная булева алгебра конгруэнций, необходимая для булевозначной реализации алгебраической системы, часто порождена естественным отношением порядка. Это обстоятельство приводит к возможности булевозначной реализации, возможности которой мы несколько детализируем для решеточно упорядоченных групп и колец.

8.4.1. *Упорядоченной группой* называют алгебраическую систему $(G, +, 0, \leqslant)$, для которой соблюдены условия:

(1) $(G, +, 0)$ — группа;

(2) $(G, \leqslant)$ — (частично) упорядоченное множество;

(3) структуры группы и порядка согласованы так, что групповые трансляции являются изотонными отображениями, т. е. G является моделью для $(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, a)(\forall\, b)\,(x \leqslant y \leftrightarrow a + x + b \leqslant a + y + b)$. (Аддитивная запись групповой операции не означает, что она коммутативна.)

Если отношение порядка удовлетворяет условию (3), то мы будем называть его *групповым*. Говорят, что G — *линейно упорядоченная группа*, если помимо (1)–(3) выполняется

(4) $(G, \leqslant)$ — линейно упорядоченное множество, т. е. на G выполнена формула $(\forall\, x)(\forall\, y)\,(x \leqslant y \vee y \leqslant x)$.

Элемент $x \in G$ называют *положительным*, если $x \geqslant 0$. Множество всех положительных элементов именуют *положительным конусом* и обозначают символом G^+.

8.4.2. Подмножество K группы G является положительным конусом относительно некоторого группового порядка на G, если выполнены условия:

(1) $K \cap (-K) = \{0\}$;

(2) $K + K = K$;

(3) $x + K = K + x \quad (x \in G)$.

При этом конус K и соответствующий ему порядок связаны соотношениями

$$x \leqslant y \leftrightarrow y - x \in K \leftrightarrow -x + y \in K.$$

Группа G линейно упорядочена в том и только в том случае, если справедливо

(4) $G = G^+ \cup (-G^+)$.

Конус положительных элементов называют *воспроизводящим*, если $G = G^+ - G^+$. При соблюдении этого условия говорят также, что G — *направленная группа*. По определению упорядоченная группа G *целозамкнута* (*архимедова*) в том и только в том случае, если для любых x, $y \in G$ из неравенств $nx \leqslant y$, $n \in \omega$ (соответственно $nx \leqslant y$, $\pm n \in \omega$) следует, что $x \leqslant 0$ (соответственно $x = 0$). Гомоморфизм $h : G \to G'$ упорядоченных групп положителен, если $h(x) \geqslant 0$ для каждого $0 \leqslant x \in G$.

8.4.3. *Решеточно упорядоченной группой* называют упорядоченную группу G, в которой всякое непустое конечное множество $\{x_0, \dots, x_{n-1}\} \subset G$ имеет точную верхнюю границу $x_0 \vee \dots \vee x_{n-1} := \sup\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ и точную нижнюю границу $x_0 \wedge \dots \wedge x_{n-1} := \inf\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$. Для всякого элемента x решеточно упорядоченной группы G определены элементы $|x| := x \vee (-x)$, $x^+ := x \vee 0$ и $x^- := (-x)^+ = -x \wedge 0$, называемые соответственно *модулем*, *положительной частью* и *отрицательной частью* x. В любой решеточно упорядоченной группе выполнены соотношения:

(1) $x = x^+ - x^-,\ |x| = x^+ + x^-,\ x^+ \wedge x^- = 0$;

(2) $(x + y)^+ \leqslant x^+ + y^+,\ (x + y)^- \leqslant x^- + y^-$;

(3) $(nx)^+ = nx^+,\ (nx)^- = nx^-,\ |nx| = n|x|\ (n \in \omega)$;

(4) $|x + y| \leqslant |x| + |y| + |x|$;

(5) $|x+y-x| = x+|y|-x$, $(x+y-x)^+ = x+y^+-x$, $(x+y-x)^- = x+y^- -x$;

(6) $(u \wedge x = 0, u \wedge y = 0) \to u \wedge (x + y) = 0$.

Решеточно упорядоченная группа G коммутативна в том и только в том случае, если вместо (4) выполняется $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ для всех x, $y \in G$. Из прочих свойств решеточно упорядоченной группы G отметим, что G — группа без кручения, G является дистрибутивной решеткой и в ней справедливы соотношения

$$a + \Big(\bigvee x_\alpha\Big) + b = \bigvee(a + x_\alpha + b), \quad a + \Big(\bigwedge x_\alpha\Big) + b = \bigwedge(a + x_\alpha + b).$$

Подгруппу G_0 решеточно упорядоченной группы называют *o-идеалом*, *порядковым идеалом* или *выпуклой подгруппой*, если для любых $x, y \in G$ из $|x| \leqslant |y|$ и $y \in G_0$ следует, что $x \in G_0$. Если, сверх того, подгруппа G_0 нормальна, то ее именуют l-идеалом.

8.4.4. Всюду ниже G будет решеточно упорядоченной группой. Введем в G отношение дизъюнктности $\perp$ по формуле

$$\perp := \{(x, y) \in G \times G : \ |x| \wedge |y| = 0\}.$$

Ясно, что $\perp$ удовлетворяет всем аксиомам отношения дизъюнктности из 7.2.9. Полную булеву алгебру, составленную из $\perp$-компонент $\mathfrak{K}_\perp(G)$, называют *базой* G и обозначают $\mathfrak{B}(G)$. Допустим, что компонента $K \in \mathfrak{B}(G)$ служит прямым слагаемым группы G. Тогда соответствующий проектор π_K — положительный эндоморфизм G, причем $\pi_K x \leqslant x$ для всех $0 \leqslant x \in G$. Если всякая компонента K служит прямым слагаемым, то множество $\mathfrak{P}(G)$ всех проекторов вида π_K $(K \in \mathfrak{B}(G))$ есть полная булева алгебра, изоморфная $\mathfrak{B}(G)$. В этой ситуации говорят, что G — *группа с проекциями на компоненты.* Решеточно упорядоченную группу G с проекциями на компоненты называют *расширенной* или *ортогонально полной*, если она расширена относительно алгебры проекторов $\mathfrak{P}(G)$, см. 8.1.1 (2). *Максимальным расширением решеточно упорядоченной группы* G называют расширенную решеточно упорядоченную группу G' вместе с o-изоморфизмом $\imath : G \to G'$ такую, что $G' = \operatorname{mix}(\imath(G))$ и для каждого $0 < x' \in G'$ найдется $0 < x \in G$, $\imath(x) \leqslant x'$ (здесь mix вычисляется относительно булевой алгебры $\mathfrak{P}(G)$).

Напомним, что $[x]$ обозначает наименьшую компоненту, содержащую x. Из свойств, перечисленных в 8.4.3, выводятся следующие соотношения:

(1) $x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \ \to \ [x + y] = [x \vee y] = [x] \vee [y]$;

(2) $[x] = [|x|] = [x^+] \vee [x^-]$;

(3) $[x + y - x] = x + [y] - x$;

(4) $x \perp y \ \to \ x + y = y + x$.

Используя эти равенства, а также 8.4.3, легко обосновать следующее предложение.

(5) *Всякая компонента $K \in \mathscr{B}(G)$ является o-идеалом.*

$\triangleleft$ Действительно, если x и $y \in A^\perp$ для некоторого $A \subset G$, то можно написать

$$\{x + y\}^\perp \supset \{x\}^\perp \wedge \{y\}^\perp \wedge \{x\}^\perp \supset A,$$

значит, $x + y \in \{x + y\}^{\perp\perp} \subset A^\perp$. Тем самым установлено, что $A^\perp$ — подгруппа G. С другой стороны, если $y \in A^\perp$ и $|x| \leqslant |y|$, то $\{x\}^\perp \supset \{y\}^\perp \supset A$. Значит, $x \in \{x\}^{\perp\perp} \subset A^\perp$, что и требовалось. $\triangleright$

8.4.5. Если группа G не коммутативна, то компоненты в ней не обязательно будут нормальными подгруппами, т. е., вообще говоря, они не являются l-идеалами. В связи с этим вводят следующее понятие. Компоненту $K \in \mathfrak{B}(G)$ называют *инвариантной*, если $x + K - x \subset K$ для каждого $x \in G$. В силу 8.4.4 (5) это равносильно тому, что K есть l-идеал. Множество всех инвариантных компонент мы обозначим символом $\mathfrak{B}_\imath(G)$.

Для решеточно упорядоченной группы G равносильны утверждения:

(1) *всякая компонента инвариантна, т. е. $\mathfrak{B}(G) = \mathfrak{B}_\imath(G)$;*

(2) *для любых $x, y \in G$ выполняется $\{x\}^\perp = y + \{x\}^\perp - y$;*

(3) *если элемент $x \in G$ дизъюнктен какому-нибудь из своих сопряженных $y + x - y$, то $x = 0$.*

$\triangleleft$ Условие (2) является очевидным следствием (1). Допустим, что выполнено (2) и $x \perp (y + x - y)$ для некоторых x и $y \in G$. Тогда

$$x \in \{y + x - y\}^{\perp} = y + \{x\}^{\perp} - y = \{x\}^{\perp},$$

откуда немедленно вытекает, что $x = 0$. Наконец, пусть выполнено (3) и компонента K имеет вид $A^{\perp}$, $A \subset G$. Возьмем произвольные $x \in K$, $y \in G$, $a \in A$ и положим $z := (y + |x| - y) \wedge |a|$. Ясно, что $0 \leqslant z \wedge (-y + z + y) \leqslant |x| \wedge |a| = 0$, так что $z = 0$. Но это означает, что $|y + x - y| = y + |x| - y \in A^{\perp} = K$, т. е. $y + K - y \subset K$. $\triangleright$

8.4.6. (1) *Множество всех инвариантных компонент $\mathfrak{B}_{\imath}(G)$ является правильной подалгеброй булевой алгебры всех компонент.*

$\triangleleft$ Ясно, что пересечение любого множества инвариантных компонент будет инвариантной компонентой. Поэтому достаточно установить, что инвариантной компонентой будет дизъюнктное дополнение каждой инвариантной компоненты. Возьмем $K \in \mathfrak{B}_{\imath}(G)$ и $x \in K^{\perp}$. Тогда для любых $y \in K$ и $a \in G$ будет $0 = (a + |y| - a) \wedge |x| = -a + (a + |y| - a) \wedge |x| + a = |y| \wedge (-a + |x| + a)$, тем самым $-a + |x| + a \in K^{\perp}$. Это и означает, что компонента $K^{\perp}$ инвариантна. $\triangleright$

Введем симметричное отношение $\vartriangle$ в G формулой

$$\vartriangle := \{(x, y) \in G \times G : (\forall\, a)(\forall\, b)(a + |x| - a) \wedge (b + |y| - b) = 0\}.$$

Если для некоторых x и $y \in G$ неверно, что $x \vartriangle y$, то найдутся такие a_0 и $b_0 \in G$, что $u_0 := (a_0 + |x| - a_0) \wedge (b_0 + |y| - b_0) \neq 0$. Легко видеть, что $u_0 \in \{a_0 + |x| - a_0\}^{\vartriangle\vartriangle}$, а с другой стороны, $\{a_0 + |x| - a_0\}^{\vartriangle\vartriangle} = \{x\}^{\vartriangle\vartriangle}$. Отсюда вытекает, что $u_0 \in \{x\}^{\vartriangle\vartriangle}$ и аналогично $u_0 \in \{y\}^{\vartriangle\vartriangle}$. Заметим еще, что наименьшая $\vartriangle$-компонента есть $\{0\}$ и $\vartriangle \cap I_G \subset \perp \cap I_G = \{(0, 0)\}$. Таким образом, $\vartriangle$ — отношение дизъюнктности на G (см. 7.2.9).

(2) *Множество всех $\vartriangle$-компонент совпадает с полной булевой алгеброй инвариантных $\perp$-компонент*: $\mathfrak{R}_{\vartriangle}(G) = \mathfrak{B}_{\imath}(G)$.

8.4.7. Предположим теперь, что группа G имеет *инвариантную базу*, т. е. все компоненты G инвариантны. Это означает в точности, что $\vartriangle = \perp$. Понятно, что коммутативная решеточно упорядоченная группа имеет инвариантную базу. В указанной ситуации можно превратить G в алгебраическую B-систему. Пусть $\jmath$ — изоморфизм полной булевой алгебры B на (инвариантную) базу $\mathfrak{B}(G)$. Положим по определению

$$p(x) := \jmath^{-1}(\{x^{-}\}^{\vartriangle}) \quad (x \in G).$$

Отображение $p : G \to B$ обладает рядом важных свойств.

Для любых x и $y \in G$ имеют место соотношения:

(1) $0 \leqslant x \to p(x) = \mathbb{1}$;

(2) $p(x) \wedge p(-x) = \jmath^{-1}(\{x\}^{\perp})$;

(3) $p(x) \wedge p(y) \leqslant p(x + y)$;

(4) $p(x) = p(y + x - y)$;

(5) $p(x) \vee p(-x) = \mathbb{1}$.

$\triangleleft$ Первое утверждение очевидно. Для доказательства (2) необходимо заметить, что $\{x\}^{\perp} = \{x^{+}\}^{\perp} \wedge \{x^{-}\}^{\perp} = \{x^{-}\}^{\perp} \wedge \{(-x)^{-}\}^{\perp}$ благодаря дизъюнктности

x^+ и x^-. Тогда ясно, что $\jmath^{-1}(\{x^-\}^\perp) = \jmath^{-1}(\{x^-\}^\perp) \wedge \jmath^{-1}(\{(-x)^-\}^\perp) = p(x) \wedge p(-x)$. Аналогичными рассуждениями с учетом 8.4.3 (2, 6) можно установить (3). Соотношение (4) вытекает из 8.4.3 (5) ввиду инвариантности компонент. Привлекая вновь дизъюнктность элементов x^+ и x^-, можно написать

$$(\{x^+\}^\perp \vee \{x^-\}^\perp)^\perp = \{x^+\}^{\perp\perp} \wedge \{x^-\}^{\perp\perp} = \{0\}.$$

Отсюда выводим $\{x^+\}^\perp \vee \{x^-\}^\perp = G$, что равносильно требуемому в (5). $\triangleright$

8.4.8. Введем два отображения σ и $d : G \times G \to B$ следующими формулами:

$$\sigma(x, y) := p(y - x), \quad d(x, y) := \jmath^{-1}(\{x - y\}^\vartriangle) \quad (x, y \in G).$$

Отображение σ обладает следующими свойствами:

(1) $\sigma(x, x) = 0$ (*рефлексивность*);

(2) $\sigma(x, y) \wedge \sigma(y, z) \leqslant \sigma(x, z)$ (*транзитивность*);

(3) $\sigma(x, y) = \sigma(a + x - b, a + y - b)$ (*инвариантность*);

(4) $\sigma(x, y) \wedge \sigma(y, x) = d(x, y)^*$ (*антисимметричность*).

$\triangleleft$ Следует непосредственно из 8.4.7 (1)–(5). $\triangleright$

Ввиду (4) $d(x, y) = \sigma(x, y)^* \vee \sigma(y, x)^*$. Следовательно, d — это B-метрика на G, инвариантная относительно правых и левых сдвигов, а σ является B-предикатом. Наконец, ясно, что $d(x, 0) = \jmath^{-1}(\{x\}^{\perp\perp})$, т. е. B-метрика d согласована с дизъюнктностью $\perp$ (см. 7.2.11).

8.4.9. Теорема. *Пусть G — решеточно упорядоченная группа с инвариантной базой. Тогда G, рассматриваемая с B-предикатом σ и соответствующей B-метрикой d, представляет собой алгебраическую B-систему сигнатуры $(+, 0, \leqslant)$, на которой выполнены аксиомы линейно упорядоченной группы.*

$\triangleleft$ Как уже было отмечено выше, B-метрика d инвариантна относительно сдвигов. С учетом этого можно написать

$$d(x + y, u + v) = d(x, -y + u + v) \leqslant d(x, u) \vee d(u, -y + u + v),$$
$$d(u, -y + u + v) = d(u + y - u, v) \leqslant d(y, v) \vee d(u + y - u, y),$$
$$d(u + y - u, y) = d(u + y, u + y) = 0.$$

Из этих соотношений видно, что $d(x + y, u + v) \leqslant d(x, u) \vee d(y, v)$, т. е. операция суммы есть нерастягивающее отображение. Далее, благодаря 8.4.7 (3), по определению d будет

$$d(x, y)^* \wedge p(x) = p(x) \wedge p(x - y) \wedge p(y - x) \leqslant p(y),$$

каковы бы ни были x и $y \in G$. Отсюда без труда выводится, что $\sigma(x, y) \wedge d(x, u)^* \wedge d(y, v)^* \leqslant \sigma(u, v)$, а это означает нерастягиваемость отображения σ.

Итак, $(G, +, 0, \sigma)$ служит алгебраической B-системой сигнатуры $(+, 0, \leqslant)$ при следующей интерпретации символа $\leqslant$: если $x, y \in G$, то $|x \leqslant y|^G := \sigma(x, y)$. При этом унарный B-предикат p на G будет, очевидно, интерпретацией свойства быть положительным элементом, т. е. $|0 \leqslant x|^G = p(x)$. Тот факт, что G является B-моделью для аксиом линейно упорядоченной группы, есть просто иная трактовка свойств 8.4.7 (1–5). Проверим, например, согласованность порядка σ с групповой структурой и линейную упорядоченность.

Если φ — замкнутая формула из 8.4.1 (3), то, расписывая булевы оценки истинности для кванторов в соответствии с 7.1.7, получим

$$|\varphi|^G = \bigwedge_{x,y,a,b \in G} |x \leqslant y \to a + x + b \leqslant a + y + b|^G.$$

Далее, учитывая, что σ служит интерпретацией символа $\leqslant$, напишем:

$$|x \leqslant y \to a + x + b \leqslant a + y + b|^G = \sigma(x, y) \Rightarrow \sigma(a + x + b,\, a + y + b).$$

Однако согласно 8.4.7 (4) будет

$$\sigma(a + x + b,\, a + y + b) = p(a + y + b - (a + x + b)) =$$
$$= p(a + (y - x) - a) = p(y - x) = \sigma(x, y).$$

Значит, $\mathbb{1} = \sigma(x, y) \Rightarrow \sigma(a + x + b,\, a + y + b)$ и поэтому $|\varphi|^G = \mathbb{1}$.

Пусть теперь φ — аксиома линейной упорядоченности 8.4.1 (4). Вновь пользуясь правилами 7.1.7, напишем:

$$|\varphi|^G = \bigwedge_{x,y \in G} |x \leqslant y \vee y \leqslant x|^G = \bigwedge_{x,y \in G} \sigma(x, y) \vee \sigma(y, x).$$

Заметим, далее, что в силу 8.4.7 (5) будет

$$\sigma(x, y) \vee \sigma(y, x) = p(y - x) \vee p(x - y) = \mathbb{1}.$$

Стало быть, $|\varphi|^G = \mathbb{1}$. $\triangleright$

8.4.10. Обратимся теперь к решеточно упорядоченным кольцам. Алгебраическую систему $(A, +, \cdot\,, 0, \leqslant)$ называют *упорядоченным кольцом*, если справедливы утверждения:

(1) $(K, +, 0, \leqslant)$ — коммутативная упорядоченная группа;

(2) $(K, +, \cdot\,, 0)$ — кольцо (не обязательно коммутативное или ассоциативное);

(3) умножение в кольце K согласовано с порядком так, что из $0 \leqslant x$, $y \in K$ следует $0 \leqslant xy$, т. е. K является моделью для формулы $(\forall\, x)(\forall\, y)(x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \to x \cdot y \geqslant 0)$.

Таким образом, упорядоченное кольцо представляет собой кольцо, аддитивная группа которого упорядочена и, кроме того, кольцевые гомотетии, соответствующие положительным элементам, являются положительными эндоморфизмами указанной упорядоченной группы. Часто мы будем приписывать упорядоченному кольцу свойства соответствующей упорядоченной группы. Так, например, понятия решеточно упорядоченного кольца или линейно упорядоченного кольца, положительного конуса и т. п. относятся к упорядоченной группе кольца и не нуждаются в дополнительных пояснениях. Порядок на K называют *кольцевым*, если он удовлетворяет всем условиям из (1) и (3).

Упорядоченное кольцо K называют *коммутативным*, если помимо (1)–(3) выполняется также следующая аксиома

(4) $(\forall\, x)(\forall\, y)\,(xy = yx)$.

Подмножество P кольца K является положительным конусом некоторого кольцевого порядка в том и только в том случае, если

$$P \cap (-P) = \{0\}; \quad P + P \subset P; \quad P \cdot P \subset P.$$

В решеточно упорядоченном кольце K помимо указанных в 8.4.2 соотношений справедливы также следующие неравенства:

(5) $(xy)^+ \leqslant x^+y^+ + x^-y^-$; $(xy)^- \leqslant x^+y^- + x^-y^+$; $|xy| \leqslant |x| \cdot |y|$.

8.4.11. Всякое решеточно упорядоченное кольцо K можно превратить в упорядоченную B-группу, но при этом K не будет, вообще говоря, B-кольцом. Дело в том, что кольцевое умножение может не быть нерастягивающей операцией относительно соответствующей B-метрики. Чтобы исключить это нежелательное явление, необходима более тесная взаимосвязь умножения и порядка.

Решеточно упорядоченное кольцо K называют *f-кольцом*, если оно удовлетворяет следующему условию: если $x, y \in K$ и $x \wedge y = 0$, то $(ax) \wedge y = 0$ и $(xa) \wedge y = 0$ для любого $0 \leqslant a \in K$. Отметим, что во всяком f-кольце $|x| \wedge |y| = 0 \to xy = 0$. Если в f-кольце нет ненулевых нильпотентных элементов, то верно и обратное утверждение или, как еще говорят, f-кольцо является *точным*. В частности, f-кольцо без делителей нуля является линейно упорядоченным, а линейно упорядоченное кольцо без ненулевых нильпотентных элементов не содержит делителей нуля. Из прочих свойств f-кольца отметим следующие:

$$(x \vee y)z = (xz) \vee (yz); \quad z(x \vee y) = (zx) \vee (zy);$$
$$(x \wedge y)z = (xz) \wedge (yz); \quad z(x \wedge y) = (zx) \wedge (zy); \quad |xy| = |x| \cdot |y|.$$

8.4.12. *Для любого решеточно упорядоченного кольца K равносильны следующие утверждения*:

(1) *K является f-кольцом*;

(2) $\{xy\}^{\perp\perp} \leqslant \{x\}^{\perp\perp} \wedge \{y\}^{\perp\perp}$;

(3) $d(xy, uv) \leqslant d(x, u) \vee d(y, v)$.

$\triangleleft$ Допустим, что K есть f-кольцо. Если $|x| \wedge |u| = 0$ или $|y| \wedge |u| = 0$, то $|xy| \wedge |u| = (|x| \cdot |y|) \wedge |u| = 0$. Значит, из $u \in \{x\}^\perp$ или $u \in \{y\}^\perp$ следует $u \in \{x \cdot y\}^\perp$, т. е. $\{x\}^\perp \cup \{y\}^\perp \subset \{xy\}^\perp$. Отсюда $\{xy\}^{\perp\perp} \leqslant (\{x\}^\perp \cup \{y\}^\perp)^\perp = \{x\}^{\perp\perp} \wedge \{y\}^{\perp\perp}$. Пусть теперь выполнено (2). Заметим, что $|xy - uv| = |x(y - v) + (x - u)v| \leqslant |x| \cdot |y - v| + |x - u| \cdot |v|$ и поэтому

$$\{xy - uv\}^{\perp\perp} \leqslant \{y - v\}^{\perp\perp} \vee \{x - u\}^{\perp\perp}.$$

Это неравенство равносильно (3) в силу определения B-метрики d из 8.4.8. Наконец, предположим, что отображение $(x, y) \mapsto xy$ нерастягивающее. Положим в (3) $u = 0$, $v = y := a$ и перепишем его в виде $\{x \cdot a\}^{\perp\perp} \subset \{x\}^{\perp\perp} \vee \{0\}^{\perp\perp} = \{x\}^{\perp\perp}$ или $\{xa\}^\perp \supset \{x\}^\perp$. Если теперь $x \wedge y = 0$ для некоторого $y \in K$, то $y \in \{xa\}^\perp$ и при $a \geqslant 0$ будет $(xa) \wedge y = 0$. Аналогично можно установить, что $(ax) \wedge y = 0$ и тем самым K есть f-кольцо. $\triangleright$

8.4.13. Теорема. *Всякое* (*ассоциативное, коммутативное*) *f-кольцо K вместе с B-предикатом σ и соответствующей B-метрикой d представляет собой алгебраическую B-систему, которая является B-моделью для аксиом* (*ассоциативного, коммутативного*) *линейно упорядоченного кольца. При этом элемент $0 \neq e \in K$ является кольцевой единицей указанного B-кольца в том и только в том случае, если e — порядковая и кольцевая единица кольца K.*

$\triangleleft$ Как установлено в 8.4.9, K является линейно упорядоченной B-группой с указанными σ и d. Добавим к этой B-группе нерастягивающее отображение $(x, y) \mapsto xy$ и докажем, что полученная алгебраическая B-система есть f-кольцо.

Ассоциативность, коммутативность и дистрибутивность в B-системе K тривиально следуют из соответствующих свойств кольца K. Проверим аксиому согласованности 8.4.10 (3). Для этого заметим, что благодаря 8.4.10 (5) и 8.4.12 (2) выполнено

$$\{(xy)^-\}^\perp \geqslant \{x^+y^-\}^\perp \wedge \{x^-y^+\}^\perp \geqslant \{x^-\}^\perp \wedge \{y^-\}^\perp.$$

По определению p заключаем, что $p(x) \wedge p(y) \leqslant p(xy)$. Теперь нам осталось вычислить булевы оценки истинности по правилам 7.1.7:

$$|(\forall\, x)(\forall\, y)(x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \to xy \geqslant 0)|^K =$$

$$= \bigwedge_{x,y \in K} |x \geqslant 0|^K \wedge |y \geqslant 0|^K \Rightarrow |xy \geqslant 0|^K = \bigwedge_{x,y \in K} p(x) \wedge p(y) \Rightarrow p(x \cdot y) = \mathbb{1}.$$

Заметим далее, что для $e \in K$ равенство $\mathbb{1} = |\theta < e|^K = |e \geqslant 0 \wedge e \neq 0|^K$ означает, что $p(e) \wedge d(e, 0) = \mathbb{1}$, т. е. $e \geqslant 0$ и e является порядковой единицей. С другой стороны,

$$|(\forall\, x)(xe = ex = x)|^K = \bigwedge_{x \in K} d(x, ex)^* \wedge d(x, xe)^*.$$

Стало быть, e будет единицей B-кольца тогда и только тогда, когда e — порядковая единица в K и для каждого $x \in K$ выполняется $d(xe, x) = d(ex, x) = 0$. Последнее означает: $x = ex = xe$, что и требовалось. $\triangleright$

8.5. Спуски упорядоченных групп и колец

Как показано в предыдущем параграфе, решеточно упорядоченные группы и f-кольца определенным способом превращаются в линейно упорядоченные B-группы и B-кольца. Это означает в силу результатов из параграфе 7.4, что они имеют булевозначные реализации, являющиеся линейно упорядоченными группами и кольцами соответственно. Следовательно, всякую информацию о строении линейно упорядоченных групп и колец можно использовать для изучения более общих классов групп и колец. Приведем несколько результатов в этом направлении.

8.5.1. Теорема. *Пусть $\mathscr{G}$ — упорядоченная группа в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ и $G := \mathscr{G}{\downarrow}$. Тогда G — упорядоченная группа, расширенная относительно булевой алгебры проекторов $\mathscr{B}$ и существует изоморфизм $\jmath$ из B на $\mathscr{B}$ такой, что*

$$b \leqslant [\![0 \leqslant x]\!] \leftrightarrow 0 \leqslant \jmath(b)x \quad (x \in G,\ b \in B).$$

При этом имеют место следующие эквивалентности:

(1) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$\mathscr{G}$ направлена (целозамкнута, архимедова)» $\leftrightarrow$ «G направлена (целозамкнута, архимедова)»*;

(2) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$\mathscr{G}$ решеточно упорядочена (порядково полна)» $\leftrightarrow$ «G решеточно упорядочена (порядково полна)»*;

(3) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$\mathscr{G}$ — упорядоченное кольцо» $\leftrightarrow$ «G — расширенное упорядоченное кольцо с булевой алгеброй проекторов $\mathscr{B}$»*;

(4) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$\mathscr{G}$ — линейно упорядоченное тело» $\leftrightarrow$ «G — расширенное f-кольцо без ненулевых нильпотентных элементов, $\mathscr{B}$ — алгебра проекторов на всевозможные компоненты G и всякий регулярный элемент в G обратим».*

$\lhd$ То, что G — расширенная группа с полной булевой алгеброй проекторов $\mathscr{B}$, было установлено в 8.1.3. Пусть $\mathscr{G}^+$ — положительный конус группы $\mathscr{G}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда

$$[\![\mathscr{G}^+ + \mathscr{G}^+ \subset \mathscr{G}^+]\!] = [\![\mathscr{G}^+ \cap -\mathscr{G}^+ = \{0\}]\!] = [\![(\forall\, x \in \mathscr{G})(x + \mathscr{G}^+ = \mathscr{G}^+ + x)]\!] = \mathbb{1}.$$

Положим $G^+ := \mathscr{G}^+{\downarrow}$ и заметим, что $G^+ + G^+ \subset G^+$, $G^+ \cap -G^+ = \{0\}$ по правилам спусков пересечения и образа. Далее, для любого $x \in G$ будет $[\![x + \mathscr{G}^+ = \mathscr{G}^+ + x]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $x + \mathscr{G}^+ = \mathscr{G}^+ + x$, но тогда

$$(x + G^+) = (x + \mathscr{G}^+){\downarrow} = (\mathscr{G}^+ + x){\downarrow} = G^+ + x.$$

Итак, G — упорядоченная группа с положительным конусом G^+. Существование изоморфизма $\jmath : B \to \mathscr{B}$ также доказано в 8.1.3. При этом равносильны соотношения $b \leqslant [\![x = y]\!]$ и $\jmath(b)x = \jmath(b)y$. Возьмем $x \in G$ и заметим, что $[\![0 \leqslant x \leftrightarrow (\exists\, y \in \mathscr{G}^+)(x = y)]\!] = \mathbb{1}$. Это означает, что $b \leqslant [\![0 \leqslant x]\!]$ в том и только в том случае, если $b \leqslant [\![(\exists\, y \in \mathscr{G}^+)(x = y)]\!]$. Последнее равносильно существованию $y \in \mathscr{G}^+{\downarrow} =: G^+$, такого что $b \leqslant [\![x = y]\!]$ или $\jmath(b)x = \jmath(b)y \geqslant 0$. Докажем теперь эквивалентности (1)–(4).

(1): Направленность $\mathscr{G}$ означает, что $[\![\mathscr{G}^+ - \mathscr{G}^+ = \mathscr{G}]\!] = \mathbb{1}$. Но это равносильно направленности G, ибо $(\mathscr{G}^+ - \mathscr{G}^+){\downarrow} = \mathscr{G}^+{\downarrow} - \mathscr{G}^+{\downarrow} = G^+ - G^+$. Целозамкнутость $\mathscr{G}$ — это не что иное, как

$$\bigwedge \big\{[\![x \leqslant 0]\!] : \ [\![(\exists\, y \in \mathscr{G})(\forall\, n \in \omega^\wedge)(nx \leqslant y)]\!] = \mathbb{1}\big\} = \mathbb{1}.$$

Поэтому $\mathscr{G}$ целозамкнута в том и только в том случае, если для каждого $x \in G$ верна импликация

$$(\exists\, y \in G)([\![(\forall\, n \in \omega^\wedge)(nx \leqslant y)]\!] = \mathbb{1}) \to [\![x \leqslant 0]\!] = \mathbb{1},$$

или

$$((\exists\, y \in G)(\forall\, n \in \omega)[\![n^\wedge x \leqslant y]\!] = \mathbb{1}) \to [\![x \leqslant 0]\!] = \mathbb{1}.$$

Последняя строчка представляет собой эквивалентную запись целозамкнутости группы G. Аналогично можно установить и утверждение об архимедовости G.

(2): Пусть $\mathscr{G}$ решеточно упорядочена. Покажем, что на алгебраической системе G истинна замкнутая формула $(\forall\, x)(\forall\, y)(\exists\, z)\ (z = \sup\{x, y\})$, т. е. что в G для любых двух элементов существует точная верхняя граница. Если x и $y \in G$, то $[\![\{x, y\} \subset \mathscr{G}]\!] = \mathbb{1}$. Поэтому $[\![(\exists\, u \in \mathscr{G})(u = \sup\{x, y\})]\!] = \mathbb{1}$. В силу принципа максимума существует $z \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что

$$[\![z \in \mathscr{G}]\!] \wedge [\![z = \sup\{x, y\}]\!] = \mathbb{1}.$$

Это означает, с одной стороны, что $z \in G$, а с другой —

$$|z = \sup\{x, y\}|^{\mathscr{G}\downarrow} = \mathbb{1}.$$

По определению отношения порядка $z = x \vee y$. Те же рассуждения приводят к существованию точной нижней границы $x \wedge y$.

Предположим теперь, что $[\![\mathscr{G}$ — порядково полная группа $]\!] = \mathbb{1}$. Покажем, что тогда и G будет порядково полной. Сначала напомним следующее эквивалентное определение точной верхней границы $\sup(A)$ множества A в произвольном упорядоченном множестве в терминах поляр:

$$\sup(A) = \pi_{\leqslant}(A) \cap \pi_{\leqslant}^{-1}(\pi_{\leqslant}(A)).$$

Возьмем теперь произвольное ограниченное сверху подмножество A системы $\mathscr{G}{\downarrow}$. Это означает, что $\pi_{\leqslant}(A) \neq \varnothing$. Но тогда по правилам спуска и подъема поляр будет: $[\![\pi_{\leqslant}(A{\uparrow}) \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1}$ или, что то же самое, $[\![A{\uparrow}$ — ограниченное сверху подмножество $\mathscr{G}]\!] = \mathbb{1}$. Отсюда по принципу максимума мы выводим, что для некоторого $a \in \mathscr{G}{\downarrow}$ будет

$$[\![a = \sup(A{\uparrow}) = \pi_{\leqslant}(A{\uparrow}) \cap \pi_{\leqslant}^{-1}(\pi_{\leqslant}(A{\uparrow}))]\!] = \mathbb{1}.$$

Вновь привлекая нужные правила спуска и подъема, получим, что $a = \sup(\operatorname{mix}(A))$. Наконец, учитывая полную экстенсиональность отношения $\leqslant$, заключаем: $\sup(\operatorname{mix}(A)) = \sup(A)$. Итак, A имеет точную верхнюю границу. Таким образом, G — порядково полная упорядоченная группа.

(3): Следует из 8.1.4 и из установленных свойств G.

(4): Пусть $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{G}$ — линейно упорядоченное тело». Благодаря (3) и 8.1.4, можно заключить, что G — упорядоченное расширенное ассоциативное кольцо с булевой алгеброй положительных проекторов $\mathscr{B}$, не имеющее ненулевых нильпотентных элементов. Так как $\mathscr{G}$ является моделью для $(\forall\, x)(\forall\, y)(x \wedge y = 0 \to x = 0 \vee y = 0)$, то для любых $x, y \in G$ будет $[\![x \wedge y = 0]\!] \leqslant [\![(x = 0) \vee (y = 0)]\!]$. Если $x \wedge y = 0$, то $b^* \leqslant [\![x = 0]\!]$ и $b \leqslant [\![y = 0]\!]$ или $\jmath(b)x = x$ и $\jmath(b)y = 0$ для подходящего $b \in B$. Отсюда уже без труда выводится, что $\mathscr{B}$ — булева алгебра проекторов на компоненты. Но тогда ортогональная полнота G равносильна расширенности G относительно $\mathscr{B}$. Так как проекторы $\jmath(b)$ $(b \in B)$ мультипликативны (см. 8.1.4), то ядро всякого проектора есть кольцевой идеал. Это немедленно приводит к справедливости в G характеристического свойства f-кольца (см. 8.4.12 (2)).

Наоборот, если G удовлетворяет указанным в (4) условиям, то ввиду (2) $[\![\mathscr{G}$ — решеточно упорядоченное кольцо $]\!] = \mathbb{1}$. Как нетрудно видеть, $\mathscr{G}$ будет и f-кольцом без ненулевых нильпотентных элементов внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Но тогда для $x, y \in G$ из $[\![xy = 1]\!] = \mathbb{1}$ следует $[\![|x| \wedge |y| = 0]\!] = \mathbb{1}$ или $|x| \wedge |y| = 0$. Значит, найдется такой элемент $b \in B$, что $\jmath(b)x = 0$ и $\jmath(b^*)y = 0$. Отсюда $b \leqslant [\![x = 0]\!]$ и $b^* \leqslant [\![y = 0]\!]$ и, значит, $[\![x = 0 \vee y = 0]\!] \geqslant b \vee b^* = \mathbb{1}$. Тем самым установлено, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{G}$ не имеет делителей нуля». Но f-кольцо без делителей нуля линейно упорядочено, так что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{G}$ линейно упорядочено». Наконец, в силу 8.1.4 ненулевые элементы $\mathscr{G}$ обратимы и, стало быть, $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{G}$ — линейно упорядоченное тело». $\triangleright$

Для дальнейшего напомним несколько известных фактов.

8.5.2. Теорема Гёльдера. *Любая архимедова линейно упорядоченная группа изоморфна подгруппе аддитивной группы вещественных чисел.*

$\triangleleft$ См. у Г. Биркгофа [16, XIII.7, теорема 12] и Л. Фукса [168, IV.1, теорема 1]. $\triangleright$

8.5.3. Теорема Ивасавы. *Полная решеточно упорядоченная группа коммутативна. Следовательно, всякая архимедова направленная группа коммутативна.*

$\triangleleft$ См. Г. Биркгоф [16, XIII.15, теорема 28] и Л. Фукс [168, V.9, теорема 18]. $\triangleright$

8.5.4. Теорема Пиккерта — Хиона. *Архимедово линейно упорядоченное кольцо либо является нулевым (т. е. произведение любых двух элементов равно* *нулю), либо порядково и алгебраически изоморфно однозначно определенному подкольцу поля вещественных чисел.*

$\lhd$ См. у Г. Биркгофа [16, XVII.2, теорема 3] и Л. Фукса [168, VIII.1, теорема 1]. $\rhd$

8.5.5. Теорема. *Пусть G — архимедова решеточно упорядоченная группа, база которой изоморфна булевой алгебре B. Тогда в булевозначной модели $\mathbb{V}^{(B)}$ существует подгруппа $\mathscr{G}$ аддитивной группы поля вещественных чисел, такая, что решеточно упорядоченная группа $G' := \mathscr{G}{\downarrow}$ является максимальным расширением группы G.*

$\lhd$ В соответствии с 8.4.9 группу G можно превратить в линейно упорядоченную B-группу. Пусть $\mathscr{G}$ — булевозначная реализация этой алгебраической B-системы. Тогда по 7.4.3 $\mathscr{G}$ — линейно упорядоченная группа внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. По теореме 8.5.1 $G' := \mathscr{G}{\downarrow}$ — решеточно упорядоченная группа, причем известно, что $G' = \operatorname{mix}(\imath(G))$, где $\imath$ — канонический изоморфизм из G в G'. Если $b \in B$, а $L_b \in \mathscr{B}(G)$ и $\pi_b \in \mathfrak{Pr}(G')$ — соответствующие компонента и проектор, то условия $x \in L_b$ и $(I - \pi_b)(\imath(x)) = 0$ равносильны для любого $x \in G$. Действительно, по определению B-метрики на G (см. 8.4.8) соотношение $x \in L_b$ означает $d(x, 0) \leqslant b$, а из теоремы 8.5.1 видно, что $\pi_b \imath(x) = \imath(x)$ выполняется лишь в том случае, если $b^* \leqslant [\![\imath(x) = 0]\!]$. Но при этом известно, что

$$[\![\imath(x) = 0]\!] = [\![\imath(x) \neq 0]\!]^* = d(x, 0)^*.$$

Итак, установлено, что соответствие $L' \mapsto \imath^{-1}(L')$ $(L' \in \mathscr{B}(G'))$ является изоморфизмом баз $\mathscr{B}(G')$ и $\mathscr{B}(G)$. Возьмем теперь $0 < x \in G'$. Если $x = \operatorname{mix}(\pi_\xi \imath(x_\xi))$, то $0 < \pi_\xi \circ \imath(x_\xi) \leqslant \imath(x_\xi)$ для некоторого ξ. В силу указанного изоморфизма баз существует $0 < z \in G$, для которого $z \in \{\pi_\xi \circ \imath(x_\xi)\}^{\perp\perp}$. Теперь для $x_0 := x_\xi \wedge z$ имеем

$$0 < \imath(x_0) \leqslant \imath(z) \wedge \pi_\xi \circ \imath(x_\xi) \leqslant \pi_\xi \circ \imath(x_\xi) \leqslant x.$$

Значит, $\imath(G)$ минорирует G'. Допустим теперь, что для некоторых x, $y \in G'$ выполняется $n|x| \leqslant y$ $(n \in \omega)$. Пусть $y = \operatorname{mix}(\pi_\xi \imath(y_\xi))$ и $x = \operatorname{mix}(\pi_\xi \imath(x_\xi))$ для некоторых семейств (x_ξ) и (y_ξ) в G и разбиения единицы (π_ξ) в $\mathfrak{Pr}(G')$. Положим $\Xi_0 := \{\xi \in \Xi : \pi_\xi \circ \imath(|x_\xi|) = 0\}$. Ввиду минорантности $\imath(G)$, для каждого $\xi \in \Xi \setminus \Xi_0$ существует $0 < u_\xi \in G$, для которого $\imath(u_\xi) \leqslant \pi_\xi(\imath|x_\xi|)$. Далее, для тех же ξ и для всех $n \in \omega$ будет

$$\imath(nu_\xi) \leqslant \pi_\xi \circ \imath(n|x_\xi|) = \pi_\xi(n|x|) \leqslant \pi_\xi y = \pi_\xi \circ \imath(y_\xi) \leqslant \imath(y_\xi),$$

или $nu_\xi \leqslant y_\xi$. Благодаря архимедовости G, мы получаем $u_\xi = 0$. Это означает, что $\Xi_0 = \Xi$, а потому $x = 0$. Следовательно, группа G' архимедова, а по 8.5.1 $[\![\, \mathscr{G}$ — архимедова $]\!] = \mathbb{1}$. По теореме Гёльдера 8.5.2 $\mathscr{G}$ изоморфна аддитивной подгруппе группы вещественных чисел $\mathscr{R}$. По теореме 7.4.4 можно считать, что $\mathscr{G}$ есть линейно упорядоченная подгруппа $\mathscr{R}$. $\rhd$

8.5.6. Теорема. *Пусть K — архимедово f-кольцо. Тогда в K существуют две взаимно дополнительные компоненты K_0 и K_1, такие что если базы $\mathscr{B}(K_0)$ и $\mathscr{B}(K_1)$ изоморфны булевым алгебрам B_0 и B_1 соответственно, то имеют место утверждения:*

(1) *в булевозначной модели $\mathbb{V}^{(B_0)}$ существует подгруппа $\mathscr{K}_0$ группы вещественных чисел такая, что решеточно упорядоченная группа $K_0' := \mathscr{K}_0{\downarrow}$ с нулевым умножением есть максимальное расширение f-кольца K_0;*

(2) *в булевозначной модели $\mathbb{V}^{(B_1)}$ существует подкольцо $\mathscr{K}_1$ кольца вещественных чисел такое, что f-кольцо $K_1' := \mathscr{K}_1'{\downarrow}$ является максимальным расширением K.*

При этом f-кольцо $K_0' \oplus K_1'$ является максимальным расширением f-кольца K.

$\lhd$ Мы уже видели в 8.5.5, что реализация аддитивной группы f-кольца K в модели $\mathbb{V}^{(B)}$, $B = \mathfrak{B}(K)$, будет подгруппой аддитивной группы вещественных чисел. Однако согласно 8.4.13 K является B-кольцом, а по теореме 7.4.3 $[\![\, \mathscr{K}$ — кольцо $]\!] = \mathbb{1}$. Положим $b_0 := [\![\, \mathscr{K}$ — нулевое кольцо $]\!]$ и $b_1 := [\![\, \mathscr{K}$ — подкольцо кольца вещественных чисел $]\!]$. Благодаря принципу переноса и теореме 8.5.4, $b_0 \vee b_1 = \mathbb{1}$. С другой стороны, $b_0 \wedge b_1 = \mathbb{0}$, ибо кольцо не может быть одновременно нулевым и подкольцом кольца вещественных чисел. Пусть K_0 и K_1 — компоненты в K, соответствующие элементам b_0 и b_1, т. е. K_0 и K_1 определены условиями

$$x \in K_1 \leftrightarrow d(x, 0) \leqslant b_l \quad (l := 0, 1),$$

где d — это B-метрика B-системы K. Положим $B_l := [0, b_l]$ и заметим, что база $\mathscr{B}(K_l)$ изоморфна B_l, причем b_l — единица алгебры B_l.

Обозначим $\mathscr{K}_l := \pi_l^*(\mathscr{K}) \in \mathbb{V}^{(B_l)}$, где $\pi_l : b \mapsto b \wedge b_l$, $b \in B$. Так как π_l — эпиморфизм B на B_l, то $\mathbb{V}^{(B_0)} \models$ «$\pi_0^*(\mathscr{K})$ — подгруппа аддитивной группы вещественных чисел» и $\mathbb{V}^{(B_1)} \models$ «$\pi_1^*(\mathscr{K})$ — подкольцо кольца вещественных чисел». По теореме 8.5.5 $K' := K{\downarrow}$ есть расширение упорядоченной группы K. Поскольку $b_l = [\![\pi_l^*(\mathscr{K}) \simeq \mathscr{K}]\!]$, то $K_l' := \mathscr{K}_l{\downarrow} \simeq \jmath(b_l)(K_l)$ и, следовательно, $K' \simeq K_0' \oplus K_1'$. Отсюда видно, что K' есть максимальное расширение K. $\rhd$

8.6. Комментарии

8.6.1. (1) Группы с проекциями, рассмотренные в 8.1, являются специальными случаями групп с операторами и поэтому для них сохранены общие свойства и конструкции, относящиеся к группам с операторами. Теорема 8.1.3 утверждает, что теория групп с проекциями в определенной степени сводится к теории групп с тривиальным (двухэлементным) множеством операторов, т. е. к общей теории групп.

(2) В качестве иллюстрации высказанного в (1) соображения рассмотрим следующее утверждение: любую абелеву группу без кручения можно снабдить отношением порядка, относительно которого она становится линейно упорядоченной группой. (Это теорема Ф. В. Леви, см. Л. Фукс [168, III.2, следствие 5].) Принцип переноса, принцип максимума и теорема 8.1.3 дают следующее: в любую BAP-группу $(G, \mathscr{B})$ без кручения можно ввести отношение порядка $\leqslant$ так, что $(G, \leqslant)$ — решеточно упорядоченная группа, а $\mathscr{B}$ — булева алгебра порядковых проекторов в G.

(3) Замечание (1) справедливо и для BAP-колец. Примеры применения теоремы 8.1.4 даны в 8.3, 8.5, а также в 8.6.5.

8.6.2. (1) Детальное освещение сведений из теории колец, использованных в этом и следующих параграфах настоящей главы, можно найти в книгах Н. Джекобсона [56], Ф. Каша [76], И. Ламбека [127] и К. Фейса [166].

(2) Идея изучать некоторые классы (регулярных, коммутативных) колец, рассматривая свойства подходящих полей, не является новой. Так, коммутативные регулярные кольца исследовались путем представления их в виде подпрямых произведений полей или в виде кольца глобальных сечений расслоения полей над топологическим булевым пространством (см. у Р. Пирса [353], Д. Сарацино и Ф. Вайспфеннинга [366]). Изложенный в этом параграфе подход на основе алгебраических B-систем и их булевозначных реализаций унифицирует указанную идею, обладая известными техническими и методологическими преимуществами.

(3) Для того чтобы к кольцу можно было применить метод булевозначной реализации, необходимо, чтобы в нем существовал достаточно богатый набор идемпотентов. Такой ситуации можно достичь разными способами: например, принять аксиому рациональной полноты или же постулировать регулярность. Как видно из 8.2.5 и 8.2.7, оба названных способа фактически ведут к одной и той же теории.

8.6.3. (1) Результаты, изложенные в 8.3.1–8.3.3 и 8.3.5, получены Е. И. Гордоном [44]. Несколько позже аналогичные результаты опубликовала Кэй Смит в [375]. Фактически она установила эквивалентность категорий регулярных коммутативных колец и булевозначных полей и на этой основе показала, что регулярное коммутативное кольцо имеет алгебраическое замыкание.

(2) Теорема из 8.3.5 показывает, что с точки зрения $\mathbb{V}^{(B)}$ полное кольцо частных коммутативного полупервичного кольца K есть просто поле частных области целостности, полученной при погружении K в $\mathbb{V}^{(B)}$, где в качестве B взята булева алгебра аннуляторных идеалов K. Такое построение полного кольца частных, проведенное Е. И. Гордоном [44, 45], представляется более естественным, чем традиционное, см., например, у И. Ламбека [131].

(3) Изложенные в 8.2 и 8.3 методы применимы к более общим классам колец. Например, отношение из 8.2.1 будет дизъюнктностью и в случае некоммутативного кольца без ненулевых нильпотентных элементов. Следовательно, множество аннуляторных идеалов такого кольца K образует полную булеву алгебру B, а само кольцо K реализуется в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ как кольцо без делителей нуля.

(4) Пусть K — регулярное самоинъективное справа кольцо и B — полная булева алгебра его центральных идемпотентов. В соответствии с 2.4.2 (2) точка q из стоуновского компакта $\mathrm{St}(B)$ представляет собой ультрафильтр. Для антисингулярного инъективного правого K-модуля A можно определить отображение $q \mapsto \mu_q(A)$ из стоуновского компакта $\mathrm{St}(B)$ в некоторое множество кардиналов следующим образом: $\mu_q(A) = 0$, если $Ae = \{0\}$ для некоторого $e \in q$; в противном случае $\mu_q(A)$ совпадает с наименьшим бесконечным кардиналом β, для которого существует такой $e \in q$, что Ae не содержит прямой суммы β ненулевых попарно изоморфных подмодулей. Обозначим символом $\mathscr{E}(\alpha A)$ инъективную оболочку прямой суммы α изоморфных копий модуля A.

Возьмем $q \in \mathrm{St}(B)$ и бесконечный кардинал α. В случае первичного кольца K кардинал $\mu_q(\mathscr{E}(\alpha A))$ равен наибольшему из кардиналов $\mu_q(A)$ и α^+ (где α^+ — последователь α, 9.1.7), см. К. Р. Гудерл [237, теорема 12.16].

(5) Обозначим символом α_q^+ такой кардинал δ, что $[\![\, |\delta^\wedge| > |\alpha^\wedge| \,]\!] \in q$ и для каждого кардинал $\alpha \leqslant \gamma < \delta$ верно $[\![\, |\gamma^\wedge| = |\alpha^\wedge| \,]\!] \in q$. Н. А. Чупин [174] установил, что если K — регулярное самоинъективное справа кольцо и A — антисингулярный инъективный правый K-модуль, то $\mu_q(\mathscr{E}(\alpha A))$ равен наибольшему из кардиналов $\mu_q(A)$ и α_q^+. Если же B — булева алгебра счетного типа, то для любого кардинала α остается в силе утверждение из (4)

8.6.4. Детальное освещение сведений из теории решеточно упорядоченных групп и колец, использованных в параграфах 8.4 и 8.5 настоящей главы, можно найти в монографиях М. Андерсона и Т. Фейла [186], А. Бигарда, К. Киймела и С. Вольфенштейна [195], А. И. Кокорина и В. М. Копытова [78], В. М. Копытова [82], Л. Фукса [168].

8.6.5. (1) Основные результаты параграфа 8.5 (теоремы 8.5.1, 8.5.5 и 8.5.6) взяты из работ А. Г. Кусраева [99, 100]. В этих работах приведены также и некоторые применения, два из которых сформулированы в следующих подпунктах.

(2) *Пусть K — полупервичное f-кольцо, а K' — его полное кольцо частных. Тогда K' можно, и притом единственным способом, превратить в f-кольцо так, чтобы подкольцо K оказалось и подрешеткой в K'.*

$\triangleleft$ В самом деле, булевозначная реализация $\mathscr{K}$ кольца K будет линейно упорядоченной областью целостности в соответствии с теоремой 8.4.13. Известно, что линейный порядок области целостности $\mathscr{K}$ допускает единственное продолжение до линейного порядка ее поля частных $\mathscr{F}$. Осталось заметить, что f-кольцо $\mathscr{F}{\downarrow}$ изоморфно полному кольцу K' (см. теорему 8.3.5). $\triangleright$

(3) *Пусть K — рационально полное полупервичное кольцо. Тогда K можно превратить в расширенное точное f-кольцо в том и только в том случае, если элемент $1+x_1^2+\ldots+x_n^2$ обратим для любого конечного набора $\{x_1,\ldots,x_n\}\subset K$.*

$\triangleleft$ По теореме 8.3.2 булевозначная реализация кольца K будет полем $\mathscr{F}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. По теореме Артина — Шрейера поле $\mathscr{F}$ может быть линейно упорядочено в том и только в том случае, если оно формально действительно, т. е. если $1+x_1^2+\ldots+x_n^2$ — ненулевой элемент поля $\mathscr{F}$ для любого конечного набора $\{x_1,\ldots,x_n\}\subset\mathscr{F}$ (см. у С. Ленга [135] и Л. Фукса [168]). Осталось привлечь 8.5.1. $\triangleright$

(4) Существуют другие классы колец и алгебр, которые имеют полные булевы алгебры идемпотентов или аннуляторных идеалов и к которым применимы методы булевозначного анализа. К ним относятся некоторые подклассы инволютивных колец и алгебр (бэровские $*$-кольца, см. книгу С. К. Бербериана [193]; AW^*-алгебры, введенные И. Капланским [266, 268, 269]; упорядоченные инволютивные алгебры с некоторыми условиями полноты, см. обзор В. И. Чилина [266]), йордановых алгебр (йордановы операторные алгебры, см. монографии Ш. А. Аюпова [12, 13], Х. Ханш-Олсена и Э. Штёрмера [244], упорядоченных йордановых алгебр (см. у Т. А. Сарымсакова, Ш. А. Аюпова, Дж. Хаджиева и В. И. Чилина [159]), упорядоченных алгебр Ли (см. у Ш. А. Аюпова, Ш. А. Усманова и А. А. Рахимова [182]) и т. п.

Глава 9
Анализ кардиналов

Настоящая глава занимает особое место в книге. До сих пор мы рассматривали булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ для произвольной полной булевой алгебры B. При этом мы обсуждали такие свойства и конструкции, в которых специфические свойства B не играли особой роли. На самом деле многие тонкие математические свойства объектов $\mathbb{V}^{(B)}$ существенно зависят от строения булевой алгебры B. Здесь мы покажем, как подбор булевой алгебры влияет на специфические свойства кардиналов (и не только кардиналов) в соответствующем булевозначном мире.

Мы уже видели в пятой главе, что при погружении универсума фон Неймана в булевозначный универсум $\mathbb{V} \to \mathbb{V}^{(B)}$ стандартные имена ординалов становятся булевозначными ординалами и при этом сохраняется взаимное расположение исходных ординалов. То же самое происходит и с кардиналами при условии, что B — булева алгебра счетного типа. Однако возможен такой выбор алгебры B, что указанное каноническое вложение «склеивает» бесконечные кардиналы, т. е. стандартные имена двух различных бесконечных кардиналов обладают одной и той же мощностью в подходящей булевозначной модели.

Существуют и другие математические конструкции, искажаемые каноническим погружением в булевозначный универсум. К ним относятся, например, теоретико-множественные операции образования множества всех подмножеств и декартовой степени. Преодоление указанной патологии связано теперь уже не со счетностью типа булевой алгебры, а с дистрибутивными законами.

Возможность выбора специальной булевой алгебры, индуцирующей порой причудливое устройство порожденного ею булевозначного мира, стала источником многих замечательных результатов. Бóльшая часть из них относится к установлению непротиворечивости аксиоматических систем и независимости тех или иных аксиом. В этой главе приведены лишь два примера такого рода: теорема Гейфмана — Хейлза — Соловея — Крипке о вложении с сохранением точных границ произвольной булевой алгебры в булеву алгебру, вполне порожденную счетным числом образующих, и классическая теорема Гёделя — Коэна о независимости гипотезы континуума.

9.1. Булевозначные кардиналы

В этом параграфе будут рассмотрены свойства кардиналов в булевозначном универсуме. В частности, мы покажем, что лишь при дополнительных предположениях относительно полной булевой алгебры B кардиналы внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ могут быть устроены столь же просто, как и «булевозначные» ординалы.

9.1.1. В силу принципа переноса в булевозначной модели справедлив принцип измерения мощностей 1.5.13. Значит, существует $\mathbb{V}^{(B)}$-класс Cn, элементами которого являются только кардиналы. Формулу, утверждающую, что α — кардинал, мы обозначим символом $\mathrm{Card}(\alpha)$. Тогда внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ справедлива эквивалентность $\alpha \in \mathrm{Cn} \leftrightarrow \mathrm{Card}(\alpha)$. Согласно 1.5.13 (2) класс ординалов $\mathrm{On}^{\wedge}$ подобен классу бесконечных кардиналов; отображение подобия из $\mathrm{On}^{\wedge}$ в Cn мы обозначим символически $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$. В частности, для любого стандартного ординала $\alpha \in \mathrm{On}$ существует единственный бесконечный кардинал $\aleph_{\alpha^{\wedge}}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, поскольку выполнено $[\![\mathrm{Ord}\,(\alpha^{\wedge})]\!] = \mathbb{1}$.

Напомним, что в соответствии с 4.2.7 стандартные имена ординалов и кардиналов принято называть *стандартными ординалами* и *стандартными кардиналами* внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

(1) *Стандартное имя наименьшего бесконечного кардинала служит наименьшим бесконечным кардиналом*:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\omega_0)^{\wedge} = \aleph_0.$$

$\lhd$ Это иная запись утверждения, установленного в 5.1.7 (1) (см. 1.5.12 и 1.5.13). $\rhd$

В силу 1.5.13 (3) внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ существует отображение $|\cdot|$ из универсального класса $\mathbb{U}_B$ в класс Cn, такое что x и $|x|$ равномощны для любого x.

(2) *Стандартные имена равномощных множеств равномощны*:

$$(\forall\, x \in \mathbb{V})\,(\forall\, y \in \mathbb{V})\,(|x| = |y| \to [\![|x^{\wedge}| = |y^{\wedge}|]\!] = \mathbb{1}).$$

$\lhd$ Как отмечено в 1.2.10, утверждение о равномощности x и y (т. е. выражение $|x| = |y|$) эквивалентно некоторой Σ_1-формуле и поэтому нам достаточно сослаться на 4.2.9 (3). $\rhd$

9.1.2. (1) *Если стандартное имя ординала является кардиналом, то и сам этот ординал будет кардиналом*:

$$(\forall\, \alpha \in \mathrm{On})\,(\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Card}(\alpha^{\wedge})) \to \mathrm{Card}(\alpha).$$

$\lhd$ Тот факт, что ординал α не является кардиналом, можно записать Σ_1-формулой $\varphi(\alpha)$ так:

$$\varphi(\alpha) := \mathrm{Ord}\,(\alpha) \wedge (\exists\, \beta \in \alpha)\,|\alpha| = |\beta|.$$

С учетом этого обстоятельства требуемое легко установить от противного: если ординал α не является кардиналом, то имеет место Σ_1-формула $\varphi(\alpha)$ и, стало быть, $[\![\varphi(\alpha^{\wedge})]\!] = \mathbb{1}$ согласно 4.2.9 (3). Но тогда верно также соотношение $[\![\neg\,\mathrm{Card}(\alpha^{\wedge})]\!] = \mathbb{1}$, противоречащее условию. $\rhd$

(2) *Стандартное имя конечного кардинала — это конечный кардинал*:

$$(\forall\, \alpha \in \mathrm{On})\,(\alpha < \omega \;\to\; \mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Card}(\alpha^{\wedge}) \wedge \alpha^{\wedge} \in \aleph_0).$$

$\lhd$ В теории ZF можно доказать, что каждый конечный ординал является кардиналом: $(\forall\, \alpha)(\alpha \in \omega \to \mathrm{Card}(\alpha)$. В силу принципа переноса имеет место равенство $[\![(\forall\, \alpha)(\alpha \in \aleph_0 \to \mathrm{Card}(\alpha))]\!] = \mathbb{1}$. Но согласно 9.1.1 (1) в последнем выражении $\aleph_0$ можно заменить на $\omega^{\wedge}$. Осталось вычислить булевы оценки 2.5.15:

$$[\![(\forall\, \alpha \in \omega^{\wedge})\ \mathrm{Card}(\alpha)]\!] = \bigwedge_{\alpha \in \omega} [\![\mathrm{Card}(\alpha^{\wedge})]\!] = \mathbb{1}.\ \rhd$$

9.1.3. *Для произвольного $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ выполнено $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Card}(x)$ в том и только в том случае, если существуют непустое множество кардиналов Γ и разбиение единицы $(b_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \subset B$ такие, что $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Card}(\gamma^\wedge)$ для любого $\gamma \in \Gamma$ и имеет место представление $x = \mathrm{mix}_{\gamma\in\Gamma}(b_\gamma\gamma^\wedge)$. Иными словами, любой булевозначный кардинал является перемешиванием некоторого множества стандартных кардиналов.*

$\lhd$ Любой кардинал является ординалом, поэтому в силу принципа переноса из $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Card}(x)$ вытекает $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Ord}\,(x)$. Согласно 5.1.7 (3) для некоторых ординала β и разбиения единицы $(b_\alpha)_{\alpha\in\beta} \subset B$ имеет место представление $x = \mathrm{mix}_{\alpha\in\beta}(b_\alpha\alpha^\wedge)$. Отсюда с учетом 4.1.8 (7) мы можем заключить, что $b_\alpha \leqslant [\![\mathrm{Card}(x)]\!] \wedge [\![x = \alpha^\wedge]\!] \leqslant [\![\mathrm{Card}(\alpha^\wedge)]\!]$. Положим $\Gamma := \{\alpha : b_\alpha \neq 0\}$. Если $\bar{b}_\alpha$ обозначает гомоморфизм из B на булеву алгебру $B_\alpha := [\mathbb{0}, b_\alpha]$, действующий по правилу $b \mapsto b \wedge b_\alpha$, то согласно 4.2.2 (2) отображение $\bar{b}_\alpha^* : \mathbb{V}^B \to \mathbb{V}^{(B_\alpha)}$ будет сюръективным при $\alpha \in \Gamma$. Более того, применяя последовательно 4.2.3 (2), 4.2.2 (1) и 4.2.8 (5), мы видим, что $b_\alpha = \bar{b}_\alpha([\![\mathrm{Card}(\alpha^\wedge)]\!]^B) = [\![\mathrm{Card}(\bar{b}_\alpha^*(\alpha^\wedge))]\!]^{B_\alpha} = [\![\mathrm{Card}(\alpha^\wedge)]\!]^{B_\alpha}$. Таким образом, $\mathbb{V}^{(B_\alpha)} \models \mathrm{Card}(\alpha^\wedge)$ и, следовательно, при $\alpha \in \Gamma$ из 9.1.2 (1) вытекает $\mathrm{Card}(\alpha)$. Отсюда видно, что Γ — непустое множество кардиналов и имеет место требуемое представление. $\rhd$

9.1.4. *Для любого кардинала α имеет место неравенство $(\omega_\alpha)^\wedge \leqslant \aleph_{\alpha^\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$; символически:*

$$\mathrm{Card}(\alpha) \to \mathbb{V}^{(B)} \models (\omega_\alpha)^\wedge \leqslant \aleph_{\alpha^\wedge}.$$

$\lhd$ Доказательство состоит в индукции по α. При $\alpha = 0$ требуемое вытекает из 9.1.1 (1). Предположим, что $\alpha > 0$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models (\omega_\beta)^\wedge \leqslant \aleph_{\beta^\wedge}$ для всех ординалов $\beta < \alpha$. Возьмем произвольный ординал $\gamma < \omega_\alpha$.

Если $\gamma < \omega_0$, то внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ справедливы неравенства $\gamma^\wedge < (\omega_0)^\wedge = \aleph_0 < \aleph_{\alpha^\wedge}$.

Если же $\omega_0 \leqslant \gamma < \omega_\alpha$, то в силу 1.5.13 (1) $|\gamma| = \omega_\beta$ для некоторого $\beta \in \alpha$. Согласно 9.1.1 (2) $\mathbb{V}^{(B)} \models |\gamma^\wedge| = |(\omega_\beta)^\wedge|$. Так как $\gamma^\wedge$ и $|\gamma^\wedge|$ — равномощные ординалы внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то по определению кардинала (см. 1.5.12) должно быть $\mathbb{V}^{(B)} \models \gamma^\wedge \leqslant |\gamma^\wedge|$. Из сказанного с учетом индукционного предположения и 1.5.15 (2) получаем, что внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ справедливы соотношения:

$$\gamma^\wedge \leqslant |\gamma^\wedge| = |(\omega_\beta)^\wedge| \leqslant \aleph_{\beta^\wedge} < \aleph_{\alpha^\wedge}.$$

Таким образом, для произвольного ординала $\gamma < \omega_\alpha$ будет $[\![\gamma^\wedge < \aleph_{\alpha^\wedge}]\!] = \mathbb{1}$. Отсюда, привлекая 5.1.7 (4) и определения 1.5.2, мы выводим:

$$[\![\eta < (\omega_\alpha)^\wedge]\!] = [\![\eta \in (\omega_\alpha)^\wedge]\!] = \bigvee_{\gamma\in\omega_\alpha} [\![\eta = \gamma^\wedge]\!] =$$
$$= \bigvee_{\gamma\in\omega_\alpha} [\![\eta = \gamma^\wedge]\!] \wedge [\![\gamma^\wedge < \aleph_{\alpha^\wedge}]\!] \leqslant [\![\eta < \aleph_{\alpha^\wedge}]\!].$$

Теперь, используя 5.1.7 (4), можно показать, что внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ имеет место формула $(\forall\,\eta)(\mathrm{Ord}\,(\eta) \to (\eta < (\omega_\alpha)^\wedge \to \eta < \aleph_{\alpha^\wedge}))$, откуда $[\![(\omega_\alpha)^\wedge \leqslant \aleph_{\alpha^\wedge}]\!] = \mathbb{1}$. $\rhd$

9.1.5. *Если B — полная булева алгебра счетного типа, то множество α будет кардиналом в том и только в том случае, когда его стандартное имя $\alpha^\wedge$ служит кардиналом внутри $\mathbb{V}^{(B)}$:*

$$\mathrm{Card}(\alpha) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Card}(\alpha^\wedge).$$

$\lhd$ В доказательстве нуждается лишь необходимость, так как достаточность верна для любой полной булевой алгебры согласно 9.1.2 (1). Возьмем произвольный кардинал α. Для конечного кардинала требуемое следует из 9.1.2 (2), поэтому можно предположить, не ограничивая общности, что $\alpha > \omega$. Нужно обосновать равенство $b := [\![\mathrm{Card}(\alpha^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$. Допустим, что это равенство не верно и $b \neq \mathbb{1}$. Тогда $[\![\neg\,\mathrm{Card}(\alpha^\wedge)]\!] = b^* \neq \mathbb{0}$. Формулу $[\![\neg\,\mathrm{Card}(\alpha^\wedge)]\!]$ можно записать в виде $(\exists\, f)\,(\exists\,\beta \in \alpha)\ \mathrm{Func}\,(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = \beta^\wedge \wedge \mathrm{im}(f) = \alpha^\wedge$. Следовательно, в силу принципа максимума существует элемент $f \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что

$$\bigvee_{\beta\in\alpha} [\![\mathrm{Func}\,(f)]\!] \wedge [\![\mathrm{dom}(f) = \beta^\wedge \wedge \mathrm{im}(f) = \alpha^\wedge]\!] = b^*.$$

Отсюда видно, что найдется ординал $\beta \in \alpha$, для которого $[\![\mathrm{dom}(f) = \beta^\wedge \wedge \mathrm{im}(f) = \alpha^\wedge]\!] = b_0 \neq \mathbb{0}$. Учитывая определения dom и im и привлекая формулы 4.6.8, мы выводим:

$$[\![(\forall\,\lambda \in \alpha^\wedge)\,(\exists\,\varkappa \in \beta^\wedge) f(\varkappa) = \lambda]\!] =$$
$$= \bigwedge_{\lambda\in\alpha}\bigvee_{\varkappa\in\beta} [\![f(\varkappa^\wedge) = \lambda^\wedge]\!] = \bigwedge_{\lambda\in\alpha}\bigvee_{\varkappa\in\beta} [\![f(\varkappa^\wedge) = \lambda^\wedge]\!] \wedge b_0 \neq \mathbb{0}.$$

Таким образом, для каждого $\lambda \in \alpha$ существует хотя бы один ординал $\varkappa_\lambda \in \beta$ такой, что $[\![f((\varkappa_\lambda)^\wedge) = \lambda^\wedge]\!] \wedge b_0 \neq \mathbb{0}$. Заметим, что если бы множество $A(\gamma) := \{\lambda \in \alpha : \varkappa_\lambda = \gamma\}$ было счетным для любого $\gamma \in \beta$, то объединение всех $A(\gamma)$, совпадающее с α, имело бы мощность, не превосходящую β, что противоречило бы соотношению $\beta \in \alpha$. Следовательно, $A(\gamma)$ несчетно для некоторого $\gamma \in \beta$. Но тогда множество

$$\big\{[\![f(\varkappa^\wedge) = \lambda^\wedge]\!] \wedge b_0 :\ \lambda \in A(\gamma)\big\}$$

будет несчетной антицепью в B, что противоречит условию счетности типа. $\rhd$

9.1.6. *Если B — полная булева алгебра счетного типа, то для любого ординала $\alpha \in \mathrm{On}$ имеет место соотношение*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\omega_\alpha)^\wedge = \aleph_{\alpha^\wedge}.$$

$\lhd$ Ввиду 9.1.4 нужно лишь установить, что $[\![\aleph_{\alpha^\wedge} \leqslant (\omega_\alpha)^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Доказательство мы проведем индукцией по α. Предположим, что требуемое справедливо для любых $\beta \in \alpha$. Согласно 9.1.5 $[\![\mathrm{Card}((\omega_\alpha)^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$. При $\beta \in \alpha$ будет $[\![(\omega_\beta)^\wedge < (\omega_\alpha)^\wedge]\!] = \mathbb{1}$, поэтому индукционное предположение дает $[\![\aleph_{\beta^\wedge} \leqslant (\omega_\alpha)^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Отсюда мы выводим:

$$\mathbb{1} = [\![\mathrm{Card}((\omega_\alpha)^\wedge)]\!] \wedge \bigwedge_{\beta\in\alpha} [\![\aleph_{\beta^\wedge} \leqslant (\omega_\alpha)^\wedge]\!] =$$
$$= [\![\mathrm{Card}((\omega_\alpha)^\wedge) \wedge (\forall\,\beta \in \alpha^\wedge)\aleph_\beta < (\omega_\alpha)^\wedge]\!] = [\![\aleph_{\alpha^\wedge} \leqslant (\omega_\alpha)^\wedge]\!]. \ \rhd$$

9.1.7. *Если B — полная булева алгебра счетного типа, то для любых множеств $x, y \in \mathbb{V}$ имеет место эквивалентность*

$$|x| = |y| \ \leftrightarrow\ [\![|x^\wedge| = |y^\wedge|]\!] = \mathbb{1}.$$

$\lhd$ Следует непосредственно из 9.1.5. $\rhd$

Кардинал, следующий за $\varkappa$, часто обозначают символом $\varkappa^+$. Значит, если $\varkappa = \omega_\alpha$, то по определению $\varkappa^+ = \omega_{\alpha+1}$. В силу принципов переноса и максимума, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ существует отображение $\varkappa \mapsto \varkappa^+$, действующее из Cn в Cn и удовлетворяющее условию

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, \varkappa \in \mathrm{Cn})(\forall\, \alpha \in \mathrm{On}^\wedge)\varkappa = \aleph_\alpha \to \varkappa^+ = \aleph_{\alpha+1}.$$

9.1.8. *Если B — полная булева алгебра счетного типа, то для любого кардинала $\lambda \in \mathbb{V}$ будет $\mathbb{V}^{(B)} \models (\lambda^+)^\wedge = (\lambda^\wedge)^+$.*

$\lhd$ Если λ — конечный кардинал, то $\lambda^+ = \lambda + 1$ и требуемое вытекает из следующих равенств, справедливых внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ согласно 5.1.2, 5.1.4 (1) и 9.1.2 (2):

$$(\lambda^+)^\wedge = (\lambda \cup \{\lambda\})^\wedge = \lambda^\wedge \cup \{\lambda^\wedge\} = \lambda^\wedge + 1 = (\lambda^\wedge)^+.$$

Если же $\lambda = \omega_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \mathrm{On}$, то в силу 9.1.6 внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ имеют место соотношения

$$(\lambda^+)^\wedge = (\omega_\alpha^+)^\wedge = (\omega_{\alpha+1})^\wedge = \aleph_{(\alpha+1)^\wedge} = \aleph_{\alpha^\wedge+1} = (\aleph_{\alpha^\wedge})^+ = (\omega_\alpha^\wedge)^+ = (\lambda^\wedge)^+,$$

что и требовалось. $\rhd$

9.2. Дистрибутивные законы и кардиналы

В текущем параграфе мы выясним, как влияют законы дистрибутивности булевой алгебры B на поведение стандартных имен кардиналов при каноническом вложении в $\mathbb{V}^{(B)}$. Как обычно, всюду ниже B — полная булева алгебра.

9.2.1. Возьмем два кардинала $\varkappa$ и λ, причем кардинал $\varkappa$ бесконечен.

(1) Булеву алгебру B называют $(\varkappa, \lambda)$-*дистрибутивной*, если для любой двойной сети $(b_{\alpha,\beta})_{\alpha\in\varkappa,\beta\in\lambda}$ в B выполнено следующее условие:

$$\bigwedge_{\alpha\in\varkappa}\bigvee_{\beta\in\lambda} b_{\alpha,\beta} = \bigvee_{\phi\in\lambda^\varkappa}\bigwedge_{\alpha\in\varkappa} b_{\alpha,\phi(\alpha)}.$$

При произвольном выборе функции $\phi : \varkappa \to \lambda$ для любого индекса $\alpha \in \varkappa$ выполнено неравенство $\bigvee_{\beta\in\lambda} b_{\alpha,\beta} \geqslant b_{\alpha,\phi(\alpha)}$, поэтому $\bigwedge_{\alpha\in\varkappa}\bigvee_{\beta\in\lambda} b_{\alpha,\beta} \geqslant \bigwedge_{\alpha\in\varkappa} b_{\alpha,\phi(\alpha)}$. Отсюда вытекает неравенство

$$\bigwedge_{\alpha\in\varkappa}\bigvee_{\beta\in\lambda} b_{\alpha,\beta} \geqslant \bigvee_{\phi\in\lambda^\varkappa}\bigwedge_{\alpha\in\varkappa} b_{\alpha,\phi(\alpha)}.$$

Следовательно, условие $(\varkappa, \lambda)$-дистрибутивности равносильно справедливости противоположного неравенства $\leqslant$ для любой двойной сети $(b_{\alpha,\beta})_{\alpha\in\varkappa,\beta\in\lambda}$.

(2) Используя формулы Моргана 2.1.3 (2), это условие можно переписать в эквивалентной форме: для любой двойной сети $(b_{\alpha,\beta})_{\alpha\in\varkappa,\beta\in\lambda}$ в B выполнено условие

$$\bigvee_{\alpha\in\varkappa}\bigwedge_{\beta\in\lambda} b_{\alpha,\beta} = \bigwedge_{\phi\in\lambda^\varkappa}\bigvee_{\alpha\in\varkappa} b_{\alpha,\phi(\alpha)}.$$

Так же, как и в (1), можно убедиться, что это равенство равносильно неравенству $\geqslant$, поскольку противоположное неравенство $\leqslant$ выполнено автоматически.

(3) Говорят, что булева алгебра *$\varkappa$-дистрибутивна*, если она $(\varkappa, \varkappa)$-дистрибутивна. Булеву алгебру именуют *вполне дистрибутивной*, если она $\varkappa$-дистрибутивна для каждого кардинала $\varkappa$. Легко видеть, что если $\varkappa' \leqslant \varkappa$ и $\lambda' \leqslant \lambda$, то всякая $(\varkappa, \lambda)$-дистрибутивная булева алгебра будет $(\varkappa', \lambda')$-дистрибутивной. Значит, вполне дистрибутивная алгебра $(\varkappa, \lambda)$-дистрибутивна при любых кардиналах $\varkappa$ и λ.

9.2.2. Пусть B — произвольная булева алгебра. *Покрытием* алгебры называют любое ее подмножество, точная верхняя граница которого равна единице. Говорят, что элемент $b \in B$ *вписан* в покрытие C алгебры B, если $b \leqslant c$ для некоторого элемента $c \in C$. Говорят, что покрытие C_0 *вписано* в покрытие C, если каждый элемент C_0 вписан в C. Если $(C_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство покрытий алгебры B и элемент $b \in B$ вписан в каждое из покрытий C_ξ $(\xi \in \Xi)$, то мы скажем, что элемент b вписан в семейство $(C_\xi)_{\xi \in \Xi}$. Покрытие, все элементы которого вписаны в семейство $(C_\xi)_{\xi \in \Xi}$, мы также будем называть вписанным в это семейство. Покрытие мощности λ мы будем именовать *λ-покрытием*, а семейство покрытий, имеющее мощность $\varkappa$, мы будем называть *$\varkappa$-семейством покрытий.*

9.2.3. *Для полной булевой алгебры B равносильны утверждения*:

(1) *B является $(\varkappa, \lambda)$-дистрибутивной алгеброй*;

(2) *для любого $\varkappa$-семейства λ-покрытий $(b_{\alpha,\beta})_{\beta \in \lambda}$ $(\alpha \in \varkappa)$ в B выполнено равенство*

$$\bigvee_{\phi \in \lambda^\varkappa} \bigwedge_{\alpha \in \varkappa} b_{\alpha,\phi(\alpha)} = \mathbb{1}.$$

$\lhd$ Импликация (1) $\to$ (2) очевидна. Для доказательства (2) $\to$ (1) возьмем $\varkappa$-семейство λ-покрытий $(b_{\alpha,\beta})_{\beta \in \lambda}$ алгебры B, где α пробегает $\varkappa$, удовлетворяющее указанному в формулировке условию, и предположим, что равенство из 9.2.1 (1) не выполнено. Тогда согласно 9.2.1 (1) элемент $b := \bigwedge_{\alpha \in \varkappa} \bigvee_{\beta \in \lambda} b_{\alpha,\beta}$ строго больше, чем $\bigvee_{\phi \in \lambda^\varkappa} \bigwedge_{\alpha \in \varkappa} b_{\alpha,\phi(\alpha)}$. Стало быть, существует такой элемент $b_0 \in B$, что $\mathbb{0} \neq b_0 \leqslant b$ и $\bigwedge_{\alpha \in \varkappa} b_{\alpha,\phi(\alpha)} \leqslant b - b_0$ для любой функции $\phi \in \lambda^\varkappa$. Определим двойную сеть $(b'_{\alpha,\beta})_{\alpha \in \varkappa, \beta \in \lambda}$, полагая $b'_{\alpha,0} := b^*$, $b'_{\alpha,\beta+1} := b \wedge b_{\alpha,\beta}$ при $0 \leqslant \beta < \omega_0$, $b'_{\alpha,\beta} := b \wedge b_{\alpha,\beta}$ при $\omega_0 \leqslant \beta < \lambda$. Тогда семейство $(b'_{\alpha,\beta})_{\beta \in \lambda}$ представляет собой λ-покрытие при любом $\alpha \in \varkappa$. Применив к нему условие (2), мы получим противоречие:

$$\mathbb{1} = \bigvee_{\phi \in \lambda^\varkappa} \bigwedge_{\alpha \in \varkappa} b'_{\alpha,\phi(\alpha)} = (b - b_0) \vee b^* = \mathbb{1} - b_0,$$

доказывающее $(\varkappa, \lambda)$-дистрибутивность B. $\rhd$

9.2.4. *Для полной булевой алгебры B равносильны утверждения*:

(1) *B является $(\varkappa, \lambda)$-дистрибутивной алгеброй*;

(2) *в каждое $\varkappa$-семейство λ-покрытий B можно вписать некоторое покрытие*;

(3) *в каждое $\varkappa$-семейство λ-покрытий B можно вписать некоторое разбиение единицы*;

(4) *в каждое $\varkappa$-семейство λ-покрытий B, состоящих из антицепей, можно вписать некоторое разбиение единицы.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Возьмем $\varkappa$-семейство λ-покрытий $(b_{\alpha,\beta})_{\beta \in \lambda}$ в B. Тогда из условия $(\varkappa, \lambda)$-дистрибутивности B вытекает равенство

$$\bigvee_{\phi \in \lambda^\varkappa} \bigwedge_{\alpha \in \varkappa} b_{\alpha,\phi(\alpha)} = \mathbb{1}.$$

Полагая $b_\phi := \bigwedge_{\alpha\in\varkappa} b_{\alpha,\phi(\alpha)}$, получаем покрытие $(b_\phi)_{\phi\in\lambda^\varkappa}$, вписанное в семейство λ-покрытий $(b_{\alpha,\beta})_{\beta\in\lambda}$.

(2) $\to$ (3): Следствие принципа исчерпывания (см. 2.1.10 (1)).

(3) $\to$ (4): Очевидно.

(4) $\to$ (1): Используем предложение 9.2.3. Возьмем произвольное $\varkappa$-семейство λ-покрытий $(b_{\alpha,\beta})_{\beta\in\lambda}$ $(\alpha\in\varkappa)$ алгебры B. Для каждого $\alpha\in\varkappa$ подберем разбиение единицы $(b'_{\alpha,\beta})_{\beta\in\lambda}$ той же мощности λ, вписанное в покрытие $(b_{\alpha,\beta})_{\beta\in\lambda}$. Это можно сделать полагая $b'_{\alpha,0} := b_{\alpha,0}$ и $b'_{\alpha,\beta} := b_{\alpha,\beta} - \bigvee_{\gamma\in\beta} b_{\alpha,\gamma}$ при $\beta\in\lambda$. В соответствии с (4) существует разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, вписанное в $\varkappa$-семейство разбиений единицы $(b'_{\alpha,\beta})_{\beta\in\lambda}$ $(\alpha\in\varkappa)$. Возьмем произвольный индекс $\xi\in\Xi$. По определению вписанного покрытия для каждого $\alpha\in\varkappa$ найдется ординал $\phi_\xi(\alpha)\in\lambda$, удовлетворяющий неравенству $b_\xi \leqslant b'_{\alpha,\phi_\xi(\alpha)}$. Значит, определены функции $\phi_\xi\in\lambda^\varkappa$, для которых $b_\xi \leqslant \bigwedge_{\alpha\in\varkappa} b'_{\alpha,\phi_\xi(\alpha)}$ $(\xi\in\Xi)$, поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\mathbb{1} = \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi \leqslant \bigvee_{\xi\in\Xi}\bigwedge_{\alpha\in\varkappa} b'_{\alpha,\phi_\xi(\alpha)} \leqslant \bigvee_{\phi\in\lambda^\varkappa}\bigwedge_{\alpha\in\varkappa} b_{\alpha,\phi_\xi(\alpha)}.$$

Теперь из 9.2.3 видна $(\varkappa,\lambda)$-дистрибутивность B. $\rhd$

9.2.5. *Для полной булевой алгебры B равносильны следующие утверждения*:

(1) *B является $(\varkappa,\lambda)$-дистрибутивной алгеброй*;

(2) $\mathbb{V}^{(B)} \models (\lambda^\varkappa)^\wedge = (\lambda^\wedge)^{\varkappa^\wedge}$.

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Для произвольного $h\in\mathbb{V}^{(B)}$ согласно 5.1.1 (1) и 5.1.6 мы можем написать:

$$[\![h\in(\lambda^\varkappa)^\wedge]\!] = \bigvee_{\phi\in\lambda^\varkappa}[\![h=\phi^\wedge]\!] = \bigvee_{\phi\in\lambda^\varkappa}[\![h=\phi^\wedge]\!]\wedge[\![\phi^\wedge:\varkappa^\wedge\to\lambda^\wedge]\!] \leqslant [\![h:\varkappa^\wedge\to\lambda^\wedge]\!].$$

Значит, $[\![(\lambda^\varkappa)^\wedge \subset (\lambda^\wedge)^{\varkappa^\wedge}]\!] = \mathbb{1}$. Для доказательства обратного включения воспользуемся формулой

$$[\![(\forall\, h)(h\in(\lambda^\wedge)^{\varkappa^\wedge} \to h\in(\lambda^\varkappa)^\wedge]\!] = \bigwedge\{[\![h\in(\lambda^\varkappa)^\wedge]\!] :\ [\![h\in(\lambda^\wedge)^{\varkappa^\wedge}]\!]=\mathbb{1}\}.$$

Пусть $[\![h\in(\lambda^\wedge)^{\varkappa^\wedge}]\!]=\mathbb{1}$. Полагая $b_{\alpha,\beta} := [\![h(\alpha^\wedge)=\beta^\wedge]\!]$ для $\alpha\in\varkappa$ и $\beta\in\lambda$ и учитывая $(\varkappa,\lambda)$-дистрибутивность алгебры B, мы выводим:

$$[\![h\in(\lambda^\varkappa)^\wedge]\!] = \bigvee_{\phi\in\lambda^\varkappa}[\![(\forall\,\alpha\in\varkappa^\wedge)h(\alpha)=\phi^\wedge(\alpha)]\!] = \bigvee_{\phi\in\lambda^\varkappa}\bigwedge_{\alpha\in\varkappa} b_{\alpha,\phi(\alpha)} = \bigwedge_{\alpha\in\varkappa}\bigvee_{\beta\in\lambda} b_{\alpha,\beta} =$$
$$= [\![(\forall\,\alpha\in\varkappa^\wedge)(\exists\,\beta\in\lambda^\wedge)h(\alpha)=\beta]\!] \geqslant [\![h:\varkappa^\wedge\to\lambda^\wedge]\!] = \mathbb{1}.$$

(2) $\to$ (1): В силу 9.2.4 (4) нужно лишь установить, что в произвольное $\varkappa$-семейство λ-разбиений единицы $(b_{\alpha,\beta})_{\beta\in\lambda}$ $(\alpha\in\varkappa)$ можно вписать некоторое разбиение единицы. Существует такой элемент $h\in\mathbb{V}^{(B)}$, что $[\![h:\varkappa^\wedge\to\lambda^\wedge]\!]=\mathbb{1}$ и $[\![h(\alpha^\wedge)=\beta^\wedge]\!] = b_{\alpha,\beta}$ при $\alpha\in\varkappa$ и $\beta\in\lambda$. Чтобы убедиться в последнем, положим $h := g{\uparrow}$, где отображение $g:\varkappa\to(\lambda^\wedge){\downarrow}$ определено правилом $g(\alpha) := \operatorname{mix}_{\beta\in\lambda} b_{\alpha,\beta}\beta^\wedge$. Согласно 5.7.7 (3) будет $[\![h:\varkappa^\wedge\to\lambda^\wedge]\!]=\mathbb{1}$. Кроме того,

$$d_{\alpha,\beta} := [\![h(\alpha^\wedge)=\beta^\wedge]\!] \geqslant [\![h(\alpha^\wedge)=g(\alpha)]\!]\wedge[\![g(\alpha)=\beta^\wedge]\!] \geqslant b_{\alpha,\beta}.$$

Ясно, что $d_{\alpha,\beta}\wedge d_{\alpha,\gamma}=\mathbb{0}$ при $\beta\neq\gamma$. Следовательно, $d_{\alpha,\beta}=b_{\alpha,\beta}$ при всех $\alpha\in\varkappa$ и $\beta\in\lambda$.

Воспользуемся теперь условием (2). Существуют разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и семейство $(\phi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ такие, что $\phi_\xi : \varkappa \to \lambda$ и $b_\xi \leqslant [\![h = \phi_\xi^\wedge]\!]$ при $\xi \in \Xi$. Таким образом, для любого $\xi \in \Xi$ имеют место соотношения

$$b_\xi \leqslant [\![(\forall\, \alpha \in \varkappa^\wedge) h(\alpha) = \phi_\xi^\wedge(\alpha)]\!] = \bigwedge_{\alpha\in\varkappa} [\![h(\alpha^\wedge) = \phi_\xi(\alpha)^\wedge]\!] = \bigwedge_{\alpha\in\varkappa} b_{\alpha,\beta}.$$

Следовательно, разбиение единицы (b_ξ) вписано в каждое из разбиений единицы $(b_{\alpha,\beta})_{\beta\in\lambda}$ $(\alpha \in \varkappa)$. $\triangleright$

9.2.6. Теорема. *Для произвольной полной булевой алгебры B равносильны следующие утверждения*:

(1) *B является $\varkappa$-дистрибутивной алгеброй*;

(2) $\mathbb{V}^{(B)} \models (\varkappa^\varkappa)^\wedge = (\varkappa^\wedge)^{\varkappa^\wedge}$;

(3) $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{P}(\varkappa^\wedge) = (\mathscr{P}(\varkappa))^\wedge$.

$\triangleleft$ Нужно лишь обосновать импликации (1) $\to$ (3) и (3) $\to$ (2), так как эквивалентность (1) $\leftrightarrow$ (2) следует из 9.2.5.

(1) $\to$ (3): В силу 5.1.10 (2) достаточно обосновать включение $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{P}(\varkappa^\wedge) \subset (\mathscr{P}(\varkappa))^\wedge$. При этом, принимая во внимание формулы 4.3.8, нужно лишь показать, что для любого $u \in \mathbb{V}^{(B)}$ соотношение $[\![u \subset \varkappa^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ влечет $[\![u \in \mathscr{P}(\varkappa)^\wedge]\!] = \mathbb{1}$.

Итак, пусть $[\![u \subset \varkappa^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Согласно 5.2.4 (2) и 5.4.3 (1) $u{\downarrow} \subset \varkappa^\wedge{\downarrow} = \mathrm{mix}(\bar\varkappa)$, где $\bar\varkappa := \{\beta^\wedge : \beta \in \varkappa\}$. Предположим сначала, что мощность $|u|$ — стандартный кардинал, т. е. $|u| = \lambda^\wedge \leqslant \varkappa^\wedge$ для некоторого кардинала λ. Тогда внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ существует биекция $\sigma : \lambda^\wedge \to u$, ограниченный спуск s которой будет взаимно однозначным вложением λ в $u{\downarrow}$. Более того, $u{\downarrow} = \mathrm{mix}(u_0)$ или, что то же, $[\![u = u_0{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$, где $u_0 := \mathrm{im}(s) = \{t_\alpha := s(\alpha) : \alpha \in \lambda\}$. Так как $u_0 \subset \mathrm{mix}(\bar\varkappa)$, то для любого $\alpha \in \lambda$ имеет место представление $t_\alpha = \mathrm{mix}_{\beta\in\varkappa} b_{\alpha,\beta}\beta^\wedge$, где $(b_{\alpha,\beta})_{\beta\in\varkappa}$ — некоторое разбиение единицы в B. Но булева алгебра B предполагается $\varkappa$-дистрибутивной, стало быть, она будет и $(\lambda,\varkappa)$-дистрибутивной. Поэтому согласно 9.2.4 существует некоторое разбиение единицы в B, вписанное в каждое из покрытий $(b_{\alpha,\beta})_{\beta\in\varkappa}$ $(\alpha \in \lambda)$. Положим $v_\xi := \{\beta \in \varkappa : (\exists\, \alpha \in \lambda) b_\xi \leqslant b_{\alpha,\beta}\}$ и $v := \mathrm{mix}_\xi\, b_\xi v_\xi^\wedge$. Тогда $[\![v = u]\!] = \mathbb{1}$ при условии, что $[\![v_\xi^\wedge = u]\!] \geqslant b_\xi$ для любого ξ.

Покажем, что $[\![v_\xi^\wedge = u]\!] \geqslant b_\xi$. Если $\beta \in v_\xi$, то по определению $b_\xi \leqslant b_{\alpha,\beta}$ для некоторого $\alpha \in \lambda$, поэтому

$$b_\xi \leqslant b_{\alpha,\beta} \leqslant [\![\beta^\wedge = t_\alpha]\!] \wedge [\![t_\alpha \in u]\!] \leqslant [\![\beta^\wedge \in u]\!].$$

В то же время для любого $\alpha \in \lambda$ существует такой $\phi(\alpha) \in \varkappa$, что $b_\xi \leqslant b_{\alpha,\phi(\alpha)}$. Следовательно, $\phi(\alpha) \in v_\xi$ и

$$b_\xi \leqslant b_{\alpha,\phi(\alpha)} \leqslant [\![t_\alpha = \phi(\alpha)^\wedge]\!] \wedge [\![\phi(\alpha)^\wedge \in \phi(\alpha)^\wedge]\!] \leqslant [\![t_\alpha \in v_\xi^\wedge]\!].$$

Отсюда, используя 4.1.4 (2), мы выводим:

$$[\![v_\xi^\wedge = u]\!] = \bigwedge_{\beta\in v_\xi} [\![\beta^\wedge \in u]\!] \wedge \bigwedge_{\alpha\in\lambda} [\![t_\alpha \in v_\xi^\wedge]\!] \geqslant b_\xi.$$

В общем случае мощность $|u|$ — перемешивание стандартных кардиналов, т. е. справедливо представление $|u| = \mathrm{mix}_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma\gamma^\wedge$, где $(b_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \subset B$ — разбиение единицы и $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Card}(\gamma^\wedge)$ при $\gamma \in \Gamma$ (см. 9.1.3). Положим $B_\gamma := [\mathbb{0}, b_\gamma]$ и рассмотрим полный гомоморфизм $\pi_\gamma : B \to B_\gamma$, действующий по правилу $\pi_\gamma :$

$b \mapsto b \wedge b_\gamma$. Ввиду определений 4.2.1 и 4.3.2 $\pi_\gamma^*(u) = b_\gamma u$, а из 5.1.1 (4) вытекает $\pi_\gamma^*\big(\mathscr{P}(\varkappa)^\wedge\big) = \mathscr{P}(\varkappa)^\wedge$ и $\pi_\gamma^*(\gamma^\wedge) = \gamma^\wedge$. Из 4.2.3 (2) мы выводим:

$$b_\gamma = b_\gamma \wedge [\![|u| = \gamma^\wedge]\!]^B = \pi_\gamma([\![|u| = \gamma^\wedge]\!]^B) = [\![|b_\gamma u| = \gamma^\wedge]\!]^{B_\gamma},$$

значит, $\mathbb{V}^{(B_\gamma)} \models$ «мощность $|b_\gamma u|$ — стандартный кардинал». Учитывая доказанное выше и вновь привлекая 4.2.3 (2), получаем

$$b_\gamma = [\![b_\gamma u \in \mathscr{P}(\varkappa)^\wedge]\!]^{B_\gamma} = \pi_\gamma([\![u \in \mathscr{P}(\varkappa)^\wedge]\!]^B) = b_\gamma \wedge [\![u \in \mathscr{P}(\varkappa)^\wedge]\!]^B,$$

откуда $b_\gamma \leqslant [\![u \in \mathscr{P}(\varkappa)^\wedge]\!]^B$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Окончательно $[\![u \in \mathscr{P}(\varkappa)^\wedge]\!] = \mathbb{1}$.

(3) $\to$ (2): Из 9.2.5 видно, что включение $(\varkappa^\varkappa)^\wedge \subset (\varkappa^\wedge)^{\varkappa^\wedge}$ выполнено всегда. Значит, нужно доказать противоположное включение. Воспользуемся соотношениями $\varkappa^\varkappa \subset \mathscr{P}(\varkappa \times \varkappa)$ и $|\varkappa \times \varkappa| = |\varkappa|$. Если $s : \varkappa \to \varkappa \times \varkappa$ — какая-нибудь биекция, то $\sigma := s^\wedge$ — биекция из $\varkappa^\wedge$ на $(\varkappa \times \varkappa)^\wedge = \varkappa^\wedge \times \varkappa^\wedge$ (см. 5.1.4 (2) и 5.1.6). Пусть $\mathbb{V}^{(B)} \models u \subset \varkappa^\wedge \times \varkappa^\wedge$. Тогда $\sigma^{-1}(u) \subset \varkappa^\wedge$ и в соответствии с предположением (3) $\mathbb{V}^{(B)} \models \sigma^{-1}(u) \in (\mathscr{P}(\varkappa))^\wedge$. Значит, имеет место представление $\sigma^{-1}(u) = \operatorname{mix}_\xi b_\xi v_\xi^\wedge$, $v_\xi \in \mathscr{P}(\varkappa)$. Применив к этому равенству σ, получаем $u = \operatorname{mix}_\xi b_\xi \sigma(v_\xi^\wedge) = \operatorname{mix}_\xi b_\xi s(v_\xi)^\wedge$. Так как $\mathbb{V}^{(B)} \models s(v_\xi)^\wedge \subset \varkappa^\wedge \times \varkappa^\wedge$, то $\mathbb{V}^{(B)} \models u \in (\mathscr{P}(\varkappa \times \varkappa))^\wedge$. Значит, $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{P}(\varkappa^\wedge \times \varkappa^\wedge) = (\mathscr{P}(\varkappa \times \varkappa))^\wedge$.

Возьмем теперь элемент $f \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $f \in (\varkappa^\wedge)^{\varkappa^\wedge}$. Учитывая доказанное выше, мы можем написать $f \in \mathscr{P}(\varkappa^\wedge \times \varkappa^\wedge) \subset \mathscr{P}(\varkappa \times \varkappa)^\wedge$. В соответствии с 5.4.3 (1) можно подобрать разбиение единицы $(b_\xi) \subset B$ и семейство $(\phi_\xi) \subset \varkappa \times \varkappa$ так, что имеет место представление $f = \operatorname{mix}_\xi b_\xi \phi_\xi$. Принимая во внимание равенство $[\![f : \varkappa^\wedge \to \varkappa^\wedge]\!]$ и утверждения 4.2.3 (2) и 4.2.8, с учетом ограниченности формулы $\phi_\xi : \varkappa \to \varkappa$ мы можем заключить, что

$$b_\xi \leqslant [\![f = \phi_\xi^\wedge]\!] \wedge [\![f : \varkappa^\wedge \to \varkappa^\wedge]\!] \leqslant [\![\phi_\xi^\wedge : \varkappa^\wedge \to \varkappa^\wedge]\!]^{(B)} = [\![\phi_\xi^\wedge : \varkappa^\wedge \to \varkappa^\wedge]\!]^{(2)} \in \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}.$$

Отсюда видно, что если $b_\xi \neq \mathbb{0}$, то $[\![\phi_\xi^\wedge : \varkappa^\wedge \to \varkappa^\wedge]\!]^{(2)} = \mathbb{1}$, значит, в силу 4.2.9 имеет место формула $\phi_\xi : \varkappa \to \varkappa$. Стало быть, $[\![\phi_\xi^\wedge \in (\varkappa^\varkappa)^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ для всех ξ и, следовательно, $[\![f \in (\varkappa^\varkappa)^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. $\rhd$

9.2.7. Теорема. *Для произвольной полной булевой алгебры B равносильны следующие утверждения*:

(1) *для любого семейства $(b_\alpha)_{\alpha \in \varkappa}$ элементов алгебры B выполняется*

$$\bigvee_{\phi \in \{0,1\}^\varkappa} \bigwedge_{\alpha \in \varkappa} b_{\alpha,\phi(\alpha)},$$

где $b_{\alpha,0} := b_\alpha^*$ и $b_{\alpha,1} := b_\alpha$;

(2) *B является $(\varkappa, 2)$-дистрибутивной алгеброй*;

(3) *B является $\varkappa$-дистрибутивной алгеброй*;

(4) *B является $(\varkappa, 2^\varkappa)$-дистрибутивной алгеброй.*

$\lhd$ Импликации (4) $\to$ (3) $\to$ (2) очевидны (см. 9.2.1 (3)). Импликация (2) $\to$ (1) следует из рассуждений, аналогичных 9.2.3. Покажем (1) $\to$ (4).

Ограничимся схемой доказательства. Если выполнено (1), то в силу 9.2.6 $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{P}(\varkappa^\wedge) = (\mathscr{P}(\varkappa))^\wedge$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{P}(\varkappa^\wedge \times \varkappa^\wedge) = (\mathscr{P}(\varkappa \times \varkappa))^\wedge$. Использую биекцию между $\mathscr{P}(X)$ и 2^X, сопоставляющую подмножеству его характеристическую функцию, можно показать, что из указанных соотношений вытекают равенства $(2^{\varkappa})^{\wedge} = 2^{(\varkappa^{\wedge})}$ и $(2^{\varkappa\times\varkappa})^{\wedge} = 2^{\varkappa^{\wedge}\times\varkappa^{\wedge}}$. Отсюда мы выводим:

$$\left((2^{\varkappa})^{\wedge}\right)^{\varkappa^{\wedge}} = \left(2^{\varkappa^{\wedge}}\right)^{\varkappa^{\wedge}} = 2^{\varkappa^{\wedge}\times\varkappa^{\wedge}} = 2^{(\varkappa\times\varkappa)^{\wedge}} = \left(2^{\varkappa\times\varkappa}\right)^{\wedge} = \left((2^{\varkappa})^{\varkappa}\right)^{\wedge}.$$

Осталось применить 9.2.5 при $\lambda := 2^{\varkappa}$. $\rhd$

9.3. Смещение кардинальных чисел

В этом параграфе мы приводим способ построения специальной булевой алгебры B, обеспечивающей «склеивание» двух стандартных бесконечных кардиналов при погружении в универсум $\mathbb{V}^{(B)}$.

9.3.1. Рассмотрим упорядоченное множество $P := (P, \leqslant)$. Будем предполагать, что в P имеется наименьший элемент $\mathbb{0}$. Если в P нет наименьшего элемента, то его всегда можно добавить, заменив P на $P \cup \{\mathbb{0}\}$. В множестве P введем бинарное отношение $\perp$, полагая $p \perp q$ в том случае, когда в P отсутствует ненулевой элемент, меньший p и q:

$$p \perp q \leftrightarrow (\forall\, r \in P)(r \leqslant p \wedge r \leqslant q \to r = \mathbb{0}).$$

Как и в 7.2.10 для поляры вместо $\pi_{\perp}(A)$ мы будем писать $A^{\perp}$, а также пользоваться сокращением $[p] := \{p\}^{\perp\perp}$. Как видно из определения, отношение $\perp$ симметрично и $p \perp p$ влечет $p = \mathbb{0}$. В частности, наименьшая $\perp$-компонента $P^{\perp}$ совпадает с $\{\mathbb{0}\}$.

(1) *Отображение* $p \mapsto [p]$ *изотонно*: $q \leqslant p \to [q] \subset [p]$.

$\lhd$ Включение $h \in [p]$ означает, что для любого $g \in P$ из $g \perp p$ вытекает $g \perp h$. Если $q \leqslant p$ и $h \in [q]$, то для $g \in P$ соотношение $g \perp p$ влечет $g \perp q$, поэтому $g \perp h$. Значит, $h \in [p]$ и $[q] \subset [p]$. $\rhd$

(2) *Отношение* $\perp$ *является дизъюнктностью на* P.

$\lhd$ Как уже отмечалось выше, отношение $\perp$ удовлетворяет условиям 7.2.9 (1, 2). Легко видеть, что выполнено и 7.2.9 (3). В самом деле, если не верно, что $p \perp q$, то можно подобрать ненулевой элемент $r \in P$, для которого $r \leqslant p$ и $r \leqslant q$. Но тогда в силу (1) будет $[r] \subset [p] \cap [q]$ и, стало быть, $[p] \cap [q] \neq \{\mathbb{0}\}$. $\rhd$

Согласно теореме 7.2.10 множество $\mathfrak{K}_{\perp}(P)$ всех $\perp$-компонент в P, упорядоченное по включению, образует полную булеву алгебру. Напомним, что подмножество P булевой алгебры B называют *плотным*, если для любого ненулевого элемента $b \in B$ существует ненулевой элемент $p \in P$, для которого $p \leqslant b$.

9.3.2. *Для упорядоченного множества* P *равносильны утверждения*:

(1) *если* $p, q \in P$ *и* $\mathbb{0} \neq q \nleqslant p$, *то существует ненулевой элемент* $p' \in P$, *для которого* $p' \leqslant q$ *и* $p \perp p'$;

(2) $[p] = [\mathbb{0}, p]$ *для любого* $p \in P$;

(3) *отображение* $p \mapsto [p]$ *взаимно однозначно*;

(4) *отображение* $p \mapsto [p]$ *служит порядковым изоморфизмом* P *на плотное подмножество полной булевой алгебры* $\mathfrak{K}_{\perp}(P)$.

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Включение $[p] \supset [\mathbb{0}, p]$ видно непосредственно из определений. Допустим, что $q \notin [\mathbb{0}, p]$. Тогда согласно (1) существует ненулевой элемент $p' \in [\mathbb{0}, q]$ такой, что $p \perp p'$. Следовательно, $q \notin [p]$, ибо в противном случае из $p \perp p'$ вытекало бы $p' \perp q$, что противоречит условию $p' \neq \mathbb{0}$.

(2) $\to$ (3): Очевидно.

(3) $\to$ (4): Согласно (3) и 9.3.1 (1) отображение $p \mapsto [p]$ служит порядковым изоморфизмом P на некоторое подмножество полной булевой алгебры $B := \mathfrak{K}_\perp(P)$. Ненулевой элемент $b \in B$ имеет вид $b = [A] := A^{\perp\perp}$ для некоторого множества $\{\mathbb{0}\} \neq A \subset P$. Если p — какой-нибудь ненулевой элемент из A, то $\{\mathbb{0}\} \neq [p] \subset b$.

(4) $\to$ (1): Для элементов $p, q \in P$, удовлетворяющих условию $\mathbb{0} \neq q \nleqslant p$, положим $b := [q] \cap [p]^\perp$. Если $b = \mathbb{0}$, то $[q] \subset [p]$ и согласно (4) должно быть $q \leqslant p$, что противоречит выбору p и q. Значит, $b \neq \mathbb{0}$ и, стало быть, существует ненулевой элемент $p' \in P$, для которого $b = [p']$. Соотношения $b \leqslant [q]$ и $b \perp [p]$ в силу (4) равносильны требуемым свойствам элемента p'. $\rhd$

9.3.3. Упорядоченное множество P назовем *измельченным*, если оно удовлетворяет одному (а тогда и каждому) из условий (1)–(4) из 9.3.2. Таким образом, измельченные упорядоченные множества и только они изоморфны плотным подмножествам полных булевых алгебр. При этом булеву алгебру $\mathfrak{K}_\perp(P)$ принято называть *булевым пополнением* упорядоченного множества P. Рассмотрим примеры измельченных упорядоченных множеств.

(1) Возьмем два непустых множества x и y. Обозначим символом $C(x, y)$ множество всех функций, определенных на конечных подмножествах x и действующих в y. Таким образом,

$$C(x, y) := \{f : \ \mathrm{Fnc}\,(f) \wedge \mathrm{dom}(f) \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(x) \wedge \mathrm{im}(f) \subset y\}.$$

Отношение порядка в $C(x, y)$ введем формулой $g \leqslant f \leftrightarrow g \supset f$. Если $g \nleqslant f$, то либо $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(g)$ и $f \neq g|_{\mathrm{dom}(f)}$, либо $\mathrm{dom}(f)$ не лежит в $\mathrm{dom}(g)$. В первом случае положим $f' := g$, а во втором случае определим f' формулами $\mathrm{dom}(f') := \mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{dom}(g)$, $f'|_{\mathrm{dom}(g)} = g$, $f'|_z \neq f|_z$, где $z := \mathrm{dom}(f) \setminus \mathrm{dom}(g)$. В обоих случаях легко видеть, что $f' \leqslant f$ и $f \perp f'$. Значит, $C(x, y) \cup \{\mathbb{0}\}$ — измельченное упорядоченное множество. Соответствующую полную булеву алгебру мы обозначим символом $B(x, y)$.

(2) Пусть $\varkappa$ — бесконечный кардинал, а x и y — те же, что и в (1), причем $|y| \geqslant 2$. Обозначим символом $C_\varkappa(x, y)$ множество всех функций, определенных на подмножествах x мощности строго меньше, чем $\varkappa$. Иначе говоря,

$$C_\varkappa(x, y) := \{f : \ \mathrm{Fnc}\,(f) \wedge \mathrm{dom}(f) \in \mathscr{P}(x) \wedge |\,\mathrm{dom}(f)| < \varkappa \wedge \mathrm{im}(f) \subset y\}.$$

Порядок в $C_\varkappa(x, y)$ вводится так же, как и в (1). Теми же рассуждениями, что и выше, можно убедиться, что $C_\varkappa(x, y) \cup \{\mathbb{0}\}$ — измельченное упорядоченное множество. Соответствующее булево пополнение мы обозначим символом $B_\varkappa(x, y)$. Ясно, что $C(x, y) = C_\omega(x, y)$ и $B(x, y) = B_\omega(x, y)$.

9.3.4. Теорема. *Пусть $\varkappa$ и λ — бесконечные кардиналы, причем $\varkappa \leqslant \lambda$. Тогда равносильны следующие утверждения*:

(1) $\mathbb{V}^{(B)} \models |\varkappa^\wedge| = |\lambda^\wedge|$;

(2) *существует двойная сеть $(b_{\alpha,\beta})_{\alpha \in \varkappa, \beta \in \lambda}$ в B такая, что $\bigvee_{\alpha \in \varkappa} b_{\alpha,\beta} = \mathbb{1}$ для всех $\beta \in \lambda$, а $\{b_{\alpha,\beta} : \beta \in \lambda\}$ представляет собой антицепь для каждого $\alpha \in \varkappa$.*

$\lhd$ По условию $\varkappa \leqslant \lambda$, поэтому $\mathbb{V}^{(B)} \models \varkappa^\wedge \leqslant \lambda^\wedge$ ввиду ограниченности формулы $\varkappa \leqslant \lambda := ((\forall\, x \in \varkappa)\, x \in \lambda) \vee (\varkappa = \lambda)$. Но тогда верно также и соотношение $\mathbb{V}^{(B)} \models |\varkappa^\wedge| \leqslant |\lambda^\wedge|$. Таким образом, утверждение (1) равносильно соотношению $\mathbb{V}^{(B)} \models |\lambda^\wedge| \leqslant |\varkappa^\wedge|$.

(1) → (2): Если выполнено (1), то внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ существует отображение из $\varkappa^\wedge$ на $\lambda^\wedge$. В силу принципа максимума найдется такой элемент $f \in \mathbb{V}^{(B)}$, что $[\![f : \varkappa^\wedge \to \lambda^\wedge]\!] = [\![\operatorname{im} f = \lambda^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Для $\alpha \in \varkappa$ и $\beta \in \lambda$ положим $b_{\alpha,\beta} := [\![f(\alpha^\wedge) = \beta^\wedge]\!]$. Тогда для произвольных $\beta, \gamma \in \lambda$ при $\beta \neq \gamma$ будет

$$b_{\alpha,\beta} \wedge b_{\alpha,\gamma} = [\![f(\alpha^\wedge) = \beta^\wedge]\!] \wedge [\![f(\alpha^\wedge) = \gamma^\wedge]\!] \leqslant [\![\beta^\wedge = \gamma^\wedge]\!] = \mathbb{0}.$$

В то же время ввиду (1) для любого $\beta \in \lambda$ справедливы соотношения

$$\bigvee_{\alpha\in\varkappa} b_{\alpha,\beta} = \bigvee_{\alpha\in\varkappa} [\![f(\alpha^\wedge) = \beta^\wedge]\!] = [\![(\exists\, x \in \varkappa^\wedge) f(x) = \beta^\wedge]\!] = \mathbb{1}.$$

Значит, выполнено (2).

(2) → (1): Предполагая справедливость (2), нужно показать, что $\mathbb{V}^{(B)} \models |\lambda^\wedge| \leqslant |\varkappa^\wedge|$. Определим элемент $f \in \mathbb{V}^{(B)}$, полагая

$$\operatorname{dom}(f) := \{(\alpha^\wedge, \beta^\wedge)^B :\ \alpha \in \varkappa,\ \beta \in \lambda\}, \quad f : (\alpha^\wedge, \beta^\wedge)^B \mapsto b_{\alpha,\beta} \quad (\alpha \in \varkappa,\ \beta \in \lambda).$$

Используя формулы 4.1.4 (1) и 4.2.8 (1) легко убедиться в справедливости соотношения $\mathbb{V}^{(B)} \models f \subset \varkappa^\wedge \times \lambda^\wedge$. Используя те же соображения и 5.1.1 (3), можно установить, что $[\![\operatorname{Fnc}(f)]\!] = \mathbb{1}$, так как для произвольных $\alpha \in \varkappa$ и $\beta, \gamma \in \lambda$ верно $[\![(\alpha^\wedge, \beta^\wedge) \in f]\!] = b_{\alpha,\beta}$ и $[\![(\alpha^\wedge, \gamma^\wedge) \in f]\!] = b_{\alpha,\gamma}$, а по условию $b_{\alpha,\beta} \wedge b_{\alpha,\gamma} = \mathbb{0}$ при $\beta \neq \gamma$. Значит, f представляет собой функцию внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, область определения и область значений которой содержатся в $\varkappa^\wedge$ и $\lambda^\wedge$ соответственно. Наконец, вновь применив (2), мы выводим:

$$[\![(\forall\, \beta \in \lambda)(\exists\, \alpha \in \varkappa) f(\alpha) = \beta]\!] = \bigwedge_{\beta\in\lambda} \bigvee_{\alpha\in\varkappa} [\![f(\alpha^\wedge) = \beta^\wedge]\!] = \bigwedge_{\beta\in\lambda} \bigvee_{\alpha\in\varkappa} b_{\alpha,\beta} = \mathbb{1}.$$

Таким образом, $\mathbb{V}^{(B)} \models \lambda^\wedge \subset \operatorname{im}(f)$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models |\lambda^\wedge| \leqslant |\varkappa^\wedge|$. $\rhd$

9.3.5. Теорема. *Пусть λ — произвольный бесконечный кардинал. Возьмем полную булеву алгебру $B(\omega, \lambda)$. Тогда $|\lambda^\wedge|$ — счетный кардинал внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. $\mathbb{V}^{(B)} \models |\lambda^\wedge| = \aleph_0$.*

$\lhd$ Взяв произвольные $\alpha \in \omega$ и $\beta \in \lambda$, мы будем считать, что $b_{\alpha,\beta} := [D_{\alpha,\beta}]$ — наименьшая компонента, содержащая $D_{\alpha,\beta}$, где $D_{\alpha,\beta} := \{g \in C(\omega, \lambda) : \alpha \in \operatorname{dom}(g) \wedge g(\alpha) = \beta\}$. Непосредственно из определения видно, что $b_{\alpha,\beta} \perp b_{\alpha,\gamma}$ при $\beta \neq \gamma$. В $D_{\alpha,\beta}$ имеется наибольший элемент $d_{\alpha,\beta}$, определяемый формулами: $\operatorname{dom}(d_{\alpha,\beta}) = \{\alpha\}$ и $\operatorname{im}(d_{\alpha,\beta}) = \{\beta\}$, поэтому $[D_{\alpha,\beta}] = [d_{\alpha,\beta}]$. Компонента $\{d_{\alpha,\beta}\}^\perp$ состоит из таких функций $g \in C(\omega, \lambda)$, что $\alpha \in \operatorname{dom}(g)$ и $g(\alpha) \neq \beta$. Значит, имеют место соотношения

$$\Big(\bigvee_{\alpha\in\omega} b_{\alpha,\beta}\Big)^\perp = \bigcap_{\alpha\in\omega} [d_{\alpha,\beta}]^\perp = \mathbb{0}.$$

Итак, двойная сеть $(b_{\alpha,\beta})_{\alpha\in\omega,\beta\in\lambda}$ удовлетворяет условиям 9.3.4 (2) с $\varkappa = \omega$ и, следовательно, $\mathbb{V}^{(B)} \models |\omega^\wedge| = |\lambda^\wedge|$. $\rhd$

9.3.6. Отметим одно следствие из теоремы 9.3.5.

Для любых бесконечных кардиналов $\varkappa$ и λ, $\varkappa < \lambda$, существует полная булева алгебра B такая, что $\mathbb{V}^{(B)} \models |\varkappa^\wedge| = |\lambda^\wedge|$.

$\lhd$ Если $B := B(\omega, \lambda)$, то согласно 9.3.5 $\mathbb{V}^{(B)} \models |\lambda^\wedge| = \aleph_0$. Учитывая неравенства $\omega_0 \leqslant \varkappa < \lambda$ и 9.1.1 (1), мы выводим:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \aleph_0 \leqslant |\varkappa^\wedge| \leqslant |\lambda^\wedge| = \aleph_0. \rhd$$

Пусть B — полная булева алгебра. Говорят, что подмножество $C \subset B$ *вполне порождает* B, если наименьшая полная подалгебра B, содержащая C, совпадает со всей алгеброй B. Элементы множества C при этом называют (*полными*) *образующими* алгебры B.

9.3.7. Теорема Соловея. *Пусть λ — бесконечный кардинал и $B := B(\omega, \lambda)$. Тогда алгебра B обладает счетным множеством полных образующих и $|B| \geqslant \lambda$.*

$\lhd$ Определим элемент $f \in \mathbb{V}^{(B)}$ и семейство $(b_{m,\beta})_{(m,\beta)\in\omega\times\lambda}$ в B формулами

$$\mathrm{dom}(f) := \{(m^\wedge, \beta^\wedge)^B : \ (m,\beta) \in \omega \times \lambda\},$$
$$f : (m^\wedge, \beta^\wedge)^B \mapsto b_{m,\beta} := [\{g \in C(\omega,\lambda) : \ g(m) = \beta\}] \in B.$$

Так же, как и при доказательстве импликации (2) $\to$ (1) из 9.3.4, можно показать, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «функция f отображает $\omega^\wedge$ на $\lambda^\wedge$». Кроме того, выполнено равенство $b_{m,\beta} = [\![f(m^\wedge) = \beta^\wedge]\!]$. Так как имеется λ различных элементов $(b_{m,\beta})_{\beta\in\lambda}$, то $|B| \geqslant \lambda$. Из определения алгебры $B := B(\omega,\lambda)$ видно, что если $g \in C(\omega,\lambda)$, то $[g] = \bigwedge_{m\in\mathrm{dom}(g)} b_{m,g(m)}$. Но так как множество компонент вида $[g]$ плотно в B, то семейство $(b_{m,\beta})_{(m,\beta)\in\omega\times\lambda}$ вполне порождает булеву алгебру B.

Положим $a_{m,n} := [\![f(m^\wedge) < f(n^\wedge)]\!]$ при $m,n \in \omega$. Теперь для завершения доказательства достаточно показать, что каждый элемент $b_{m,\beta}$ лежит в полной подалгебре $B' \subset B$, вполне порождаемой двойной последовательностью $(a_{m,n})_{m,n\in\omega}$. Это утверждение докажем индукцией по β. Предположим, что $b_{m,\gamma} \in B'$ для всех $m \in \omega$ и $\gamma \in \beta$. Поскольку

$$b_{m,\beta} = [\![f(m^\wedge) = \beta^\wedge]\!] = [\![f(m^\wedge) \leqslant \beta^\wedge]\!] \wedge [\![f(m^\wedge) < \beta^\wedge]\!]^*,$$

то для обоснования индукционного шага $b_{m,\beta} \in B'$ достаточно показать, что элементы $[\![f(m^\wedge) < \beta^\wedge]\!]$ и $[\![f(m^\wedge) \leqslant \beta^\wedge]\!]$ входят в B'. Для первого из этих элементов имеем:

$$[\![f(m^\wedge) < \beta^\wedge]\!] = [\![f(m^\wedge) \in \beta^\wedge]\!] = \bigvee_{\gamma\in\beta} [\![f(m^\wedge) = \gamma^\wedge]\!] = \bigvee_{\gamma\in\beta} b_{m,\gamma} \in B',$$

так как по индукционному предположению $b_{m,\gamma} \in B'$ для всех $\gamma \in \beta$. Для второго элемента с учетом уже доказанного мы выводим:

$$[\![f(m^\wedge) \leqslant \beta^\wedge]\!] = [\![(\forall\, \alpha < f(m^\wedge))\alpha < \beta^\wedge]\!] =$$
$$= [\![(\forall\, x \in \omega^\wedge)(f(x) < f(m^\wedge) \to f(x) < \beta^\wedge]\!] =$$
$$= \bigwedge_{n\in\omega} [\![f(n^\wedge) < f(m^\wedge) \to f(n^\wedge) < \beta^\wedge]\!] =$$
$$= \bigwedge_{n\in\omega} a_{n,m} \Rightarrow [\![f(n^\wedge) < \beta^\wedge]\!] \in B'. \rhd$$

9.4. Приложение к булевым алгебрам

Здесь мы показываем следующее. Во-первых, булев гомоморфизм, определенный на подалгебре и действующий в полную булеву алгебру, допускает продолжение до булева гомоморфизма, определенного на всей алгебре. Во-вторых, всякую бесконечную булеву алгебру можно вложить с сохранением точных границ в полную булеву алгебру со счетным числом полных образующих.

9.4.1. Возьмем произвольное множество X и полную булеву алгебру B. Пусть σ — некоторый элемент $\mathbb{V}^{(B)}$, причем $[\![\sigma \subset X^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Определим отображение $h_\sigma : X \to B$ формулой

$$h_\sigma(x) := [\![x^\wedge \in \sigma]\!] \quad (x \in X),$$

Отображение $\sigma \mapsto h_\sigma$ осуществляет биекцию между множествами $\mathscr{P}(X^\wedge){\downarrow}$ и B^X.

$\lhd$ Очевидно, что указанное отображение инъективно. Возьмем произвольное отображение $h : X \to B$. Пусть η обозначает модифицированный подъем отображения $\chi \circ h : X \to \{0,1\}^B{\downarrow}$, где χ определено так же, как и в 7.3.2. Привлекая принцип максимума, определим элемент $\sigma \in \mathscr{P}(X^\wedge)$ формулой $\sigma := \{x \in X^\wedge : \eta(x) = 1\}$. Тогда, учитывая свойства из 7.3.2, мы выводим:

$$h(x) = [\![\chi(h(x) = 1]\!] = [\![\eta(x^\wedge) = 1]\!] = [\![x^\wedge \in \sigma]\!].$$

Значит, $h = h_\sigma$. $\rhd$

9.4.2. Возьмем еще одну булеву алгебру A. Отображение $p : A \to B$ назовем *субморфизмом* (*суперморфизмом*), если $p(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}$ и $p(x \vee y) = p(x) \vee p(y)$ (соответственно $p(\mathbb{0}_A) = \mathbb{0}$ и $p(x \wedge y) = p(x) \wedge p(y)$) для любых $x, y \in A$. Если отображение $h^* : x \mapsto h(x)^*$ $(x \in A)$ служит булевым гомоморфизмом, то мы будем называть $h : A \to B$ *булевым антиморфизмом.*

Тот факт, что A — булева алгебра, можно выразить ограниченной формулой. Следовательно, $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$A^\wedge$ — булева алгебра». Пусть $\sigma \in \mathscr{P}(A^\wedge){\downarrow}$.

Справедливы следующие эквивалентности:

(1) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«σ — идеал» $\leftrightarrow$ h_σ^* — субморфизм*;

(2) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«σ — фильтр» $\leftrightarrow$ h_σ — суперморфизм*;

(3) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«σ — ультрафильтр» $\leftrightarrow$ h_σ — булев гомоморфизм*;

(4) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«σ —максимальный идеал» $\leftrightarrow$ h_σ — булев антиморфизм.*

$\lhd$ Подмножество булевой алгебры является фильтром (идеалом) тогда и только тогда, когда оно не содержит нуля (единицы) и инфимум (супремум) двух элементов входит в это подмножество лишь в случае вхождения в него обоих элементов. Этот факт имеет место и в булевозначном универсуме в силу принципа переноса. Таким образом, соотношения $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «σ — идеал» и $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «ρ — фильтр» равносильны следующим двум группам равенств соответственно:

$$[\![\mathbb{1}_A^\wedge \in \sigma]\!] = \mathbb{0}, \quad [\![x^\wedge \vee y^\wedge \in \sigma]\!] = [\![x^\wedge \in \sigma]\!] \wedge [\![y^\wedge \in \sigma]\!];$$

$$[\![\mathbb{0}_A^\wedge \in \rho]\!] = \mathbb{0}, \quad [\![x^\wedge \wedge y^\wedge \in \rho]\!] = [\![x^\wedge \in \rho]\!] \wedge [\![y^\wedge \in \rho]\!].$$

Отсюда вытекают (1) и (2). Далее, фильтр в булевой алгебре будет ультрафильтром лишь в том случае, когда для произвольного элемента алгебры в фильтр входит либо он сам, либо его булево дополнение. Интерпретируя этот критерий в булевозначном универсуме, мы получаем, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «σ — ультрафильтр» тогда и только тогда, когда h_σ — суперморфизм и $[\![x^* \in \sigma]\!] \vee [\![x \in \sigma]\!] = \mathbb{1}$ ($x \in A^\wedge$), что ввиду соотношения $[\![(x^*)^\wedge \in \sigma]\!] \wedge [\![x^\wedge \in \sigma]\!] = \mathbb{0}$ равносильно равенству $h_\sigma(x^*) = h_\sigma(x)^*$. Эти рассуждения доказывают (3), а (4) легко следует из (3). $\triangleright$

Пусть $\mathrm{Hom}(A, B)$ обозначает множество всех булевых гомоморфизмов из A в B. Обозначим символом $\mathfrak{U}(A^\wedge)$ элемент из $\mathbb{V}^{(B)}$, для которого $[\![\mathfrak{U}(A^\wedge)$ — множество всех ультрафильтров в булевой алгебре $A^\wedge]\!] = \mathbb{1}$.

(5) *Отображение $\psi \mapsto h_\psi$ устанавливает биекцию между множествами $\mathfrak{U}(A^\wedge){\downarrow}$ и $\mathrm{Hom}(A, B)$.*

$\triangleleft$ Следует из 9.4.1 и (3). $\triangleright$

9.4.3. Теорема о сэндвиче. *Пусть даны отображения $p, q : A \to B$, причем p — субморфизм и q — суперморфизм. Предположим, что $q(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in A$. Тогда существует $h \in \mathrm{Hom}(A, B)$ такой, что*

$$q(x) \leqslant h(x) \leqslant p(x) \quad (x \in A).$$

$\triangleleft$ Согласно 9.4.1 существуют такие элементы $\rho, \sigma \in \mathscr{P}(A^\wedge){\downarrow}$, что $q = h_\sigma$ и $p^* = h_\rho$. В силу 9.4.2 $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «σ — фильтр» и $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «ρ — идеал». Кроме того, $[\![x^\wedge \in \sigma]\!] = q(x) \leqslant p(x) = [\![x^\wedge \notin \rho]\!]$ и, следовательно, $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\sigma \cap \rho$ пусто». Работая внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и используя принципы переноса и максимума, заметим, что фильтры σ и $\rho^* := \{x^* : x \in \rho\}$ содержатся в некотором фильтре. В самом деле, если это не так, то найдутся элементы $x \in \sigma$ и $y \in \rho$, для которых $x \wedge y^* = \mathbb{0}$ или, что то же самое, $x \leqslant y$. Но последнее влечет $x \in \rho$, что противоречит условию $\sigma \cap \rho = \varnothing$. Подберем теперь ультрафильтр $\psi \subset A^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, содержащий σ и ρ^*. Положим $h := h_\psi$ и заметим, что h — булев гомоморфизм в соответствии с 9.4.2 (3). Ясно, что $\sigma \subset \psi$ и $\psi \cap \rho = \varnothing$. Стало быть, $x \in \sigma \to x \in \psi \to x \notin \rho$ для любого $x \in A^\wedge$. Вычисление булевых оценок последней формулы дает $q(x) \leqslant h(x) \leqslant p(x)$. $\triangleright$

В качестве следствия установленной теоремы отметим два факта о продолжении булевых гомоморфизмов. Первый из них аналогичен теореме Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов.

9.4.4. Теорема Хана — Банаха для булевых гомоморфизмов. *Пусть A_0 — подалгебра булевой алгебры A и отображение $p : A \to B$ — субморфизм. Допустим, что булев гомоморфизм $h_0 : A_0 \to B$ удовлетворяет неравенству $h_0(x_0) \leqslant p(x_0)$ для любого $x_0 \in A_0$. Тогда существует булев гомоморфизм $h : A \to B$ такой, что $h(x) \leqslant p(x)$ $(x \in A)$.*

$\triangleleft$ Введем отображение $q : A \to B$, полагая

$$q(x) := \bigvee \{h_0(a) : \ a \in A_0,\, a \leqslant x\} \quad (x \in A).$$

Легко проверить, что q — суперморфизм, $q \leqslant p$ и $q|_{A_0} = h_0$. По 9.4.3 существует $h \in \mathrm{Hom}(A, B)$, для которого $q \leqslant h \leqslant p$. В частности, справедливо неравенство $h_0|_{A_0} \leqslant h$, из которого при $x \in A_0$ мы выводим, что $h(x) = h(x^*)^* \leqslant h_0(x^*)^* = h_0(x)$. Значит, $h|_{A_0} = h$ и h — искомый гомоморфизм. $\triangleright$

9.4.5. Теорема Сикорского о продолжении. *Булев гомоморфизм h_0, определенный на подалгебре A_0 произвольной булевой алгебры A и действующий в полную булеву алгебру B, допускает продолжение до булева гомоморфизма h, определенного на всей алгебре A.*

$\triangleleft$ Положим $p(\mathbb{0}_A) = \mathbb{0}$ и $p(x) = \mathbb{1}$ при $\mathbb{0}_A \neq x \in A$. Тогда p — субморфизм и $h_0 \leqslant p|_{A_0}$. Стало быть, требуемое следует из 9.4.4.

Можно действовать иначе: не апеллировать к 9.4.4, а прямо привлечь 9.4.1 и 9.4.2. В самом деле, $[\![A_0^\wedge$ — подалгебра алгебры $A^\wedge]\!] = \mathbb{1}$, и согласно 9.4.1 $h_0 = h_\sigma$ для некоторого $\sigma \in \mathscr{P}(A_0^\wedge){\downarrow}$. В силу 9.4.2 (3) $[\![\sigma$ — ультрафильтр в $A_0^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Теперь требуемое вытекает из того, что σ, рассматриваемый (внутри $\mathbb{V}^{(B)}$) как базис фильтр в $A^\wedge$, допускает расширение до некоторого ультрафильтра $\psi \subset A^\wedge$, так как гомоморфизм $h = h_\psi$ будет искомым. $\triangleright$

9.4.6. Ниже потребуется один вспомогательный факт о существовании ультрафильтров, обладающих дополнительными свойствами. Введем соответствующее понятие. Рассмотрим некоторое семейство подмножеств $\tau \subset \mathscr{P}(A)$ булевой алгебры A. Ультрафильтр ψ в A называют *τ-полным*, если для любого $C \in \tau$ включение $\sup(C) \in \psi$ влечет $C \cap \psi \neq \varnothing$.

Гомоморфизм $h \in \operatorname{Hom}(A, B)$ назовем *τ-полным*, если для любого $C \in \tau$ имеет место равенство $h(\sup(C)) = \sup h(C)$. Ясно, что τ-полнота ультрафильтра равносильна τ-полноте соответствующего ему двузначного гомоморфизма.

Пусть $\psi \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $[\![\psi$ — ультрафильтр в булевой алгебре $A^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Гомоморфизм h_ψ будет τ-полным в том и только в том случае, если $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «ультрафильтр ψ является $\tau^\wedge$-полным».

$\triangleleft$ Предположим, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «ψ — это $\tau^\wedge$-полный ультрафильтр». Возьмем $C \in \tau$ и допустим, что существует $c = \sup(C) \in A$. Тогда $[\![c^\wedge = \sup(C^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$ и, следовательно, для гомоморфизма $h := h_\psi$ будет

$$
\begin{aligned}
h(\sup(C)) = h(c) = [\![c^\wedge \in \psi]\!] = [\![\sup(C^\wedge) \in \psi]\!] = \\
= [\![(\exists\, x \in C^\wedge) x \in \psi]\!] = \bigvee_{x \in C} [\![x^\wedge \in \psi]\!] = \bigvee_{x \in C} h(x) = \sup h(C).
\end{aligned}
$$

Наоборот, пусть известно, что гомоморфизм h является τ-полным. Тогда τ-полнота ультрафильтра ψ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ видна из вычислений:

$$
[\![(\forall\, C \in \tau^\wedge)(\sup(C) \in \psi \leftrightarrow (\exists\, x \in C) x \in \psi)]\!] =
$$

$$
= \bigwedge_{C \in \tau} \Big([\![\sup(C^\wedge) \in \psi]\!] \Leftrightarrow \bigvee_{x \in C} [\![x^\wedge \in \psi]\!] \Big) = \bigwedge_{C \in \tau} h(\sup(C)) \Leftrightarrow \sup h(C) = \mathbb{1}. \ \triangleright
$$

9.4.7. Теорема Расёвой — Сикорского. *Для любой счетной последовательности τ подмножеств булевой алгебры A и любого ненулевого элемента $x \in A$ существует τ-полный ультрафильтр в A, содержащий x.*

$\triangleleft$ Возьмем последовательность $\tau := (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ подмножеств A и ненулевой элемент $x \in A$. Положим $c_n := \sup(C_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Заметим, что $\mathbb{1} = \bigvee_{b \in C_1} (c_1 \Rightarrow b)$ и, стало быть, $\mathbb{0} \neq x = \bigvee_{b \in C_1} x \wedge (c_1 \Rightarrow b)$. Отсюда видно, что $\mathbb{0} \neq x_1 := x \wedge (c_1 \Rightarrow b_1)$ для некоторого $b_1 \in C_1$. Заменив в только что приведенном рассуждении x на x_1, c_1 на c_2 и C_1 на C_2, подберем $b_2 \in C_2$, для которого $\mathbb{0} \neq x_2 := x_1 \wedge (c_2 \Rightarrow b_2)$. Продолжая по индукции, получаем последовательности (x_n) и (b_n) в A такие, что $b_n \in C_n$ и $\mathbb{0} \neq x_n := x_{n-1} \wedge (c_n \Rightarrow b_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, где $x_0 := x$. Пусть $\mathfrak{U}$ — какой-нибудь ультрафильтр, содержащий убывающую последовательность $(x_n)_{n \in \omega}$ ненулевых элементов. Этот ультрафильтр содержит x по определению. Если $c_n \in \mathfrak{U}$, то $c_n^* \notin \mathfrak{U}$, но в то же время $c_n^* \vee b_n = c_n \Rightarrow b_n \in \mathfrak{U}$, так как $x_n \leqslant c_n \Rightarrow b_n$. Значит, $b_n \in \mathfrak{U}$ и $C_n \cap \mathfrak{U} \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$. $\triangleright$

9.4.8. Теорема Крипке. *Пусть A — булева алгебра, мощность которой $\varkappa := |A|$ — бесконечный кардинал. Тогда A можно вложить с сохранением точных границ в полную булеву алгебру $B(\omega, 2^{\varkappa})$.*

$\triangleleft$ Обозначим для удобства $\lambda := |2^{\varkappa}|$ и $B := B(\omega, \lambda)$. По теореме 9.3.5 $\lambda^{\wedge}$ — счетный ординал внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Так как $|\mathscr{P}(A)| = |2^{\varkappa}| = \lambda$, то $\mathscr{P}(A)^{\wedge}$ также будет счетным множеством внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ согласно 9.1.1 (2). По условию множество $A \setminus \{\mathbb{0}_A\}$ можно занумеровать элементами кардинала $\varkappa$, т. е. $A \setminus \{\mathbb{0}_A\} = \{a_\xi : \xi \in \varkappa\}$. Возьмем какое-нибудь разбиение единицы $(Q_\xi)_{\xi \in \varkappa}$ в булеане $\mathscr{P}(\lambda)$ и положим

$$b_\xi := [\{f \in C(\omega, \lambda) :\ f(0) \in Q_\xi\}] \quad (\xi \in \varkappa).$$

Как видно, $(b_\xi)_{\xi \in \varkappa}$ — разбиение единицы в B, причем $b_\xi \neq \mathbb{0}$ для любого ξ, ибо множества Q_ξ можно считать непустыми, не ограничивая общности. Положим $x := \mathrm{mix}_{\xi \in \varkappa}\, b_\xi a_\xi^{\wedge}$. Тогда

$$[\![x \in A^{\wedge}]\!] \geqslant \bigvee_{\xi \in \varkappa} [\![x = a_\xi^{\wedge}]\!] \geqslant \bigvee_{\xi \in \varkappa} b_\xi = \mathbb{1}.$$

В то же время для $\xi \in \varkappa$ выполнено

$$b_\xi \leqslant [\![x = a_\xi^{\wedge}]\!] \leqslant [\![x = a_\xi^{\wedge}]\!] \wedge [\![a_\xi^{\wedge} \neq \mathbb{0}_A^{\wedge}]\!] \leqslant [\![x \neq \mathbb{0}_A^{\wedge}]\!] = [\![x \neq \mathbb{0}_{A^{\wedge}}]\!].$$

Следовательно, $[\![x \neq \mathbb{0}_{A^{\wedge}}]\!] = \mathbb{1}$. Далее, положим

$$\tau := \big\{C \in \mathscr{P}(A) :\ \sup(C) \text{ существует в } A\big\}$$

и заметим, что $\tau^{\wedge}$ — счетное множество внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Таким образом, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ имеется булева алгебра $A^{\wedge}$, ненулевой элемент $x \in A^{\wedge}$ и счетное множество $\tau^{\wedge} \subset \mathscr{P}(A)^{\wedge}$, причем для каждого $C \in \tau^{\wedge}$ существует $\sup(C)$. В силу принципа переноса внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ имеет место теорема Расёвой — Сикорского 9.3.7. Привлекая принцип максимума, можно подобрать такой элемент $\psi \in \mathbb{V}^{(B)}$, что $[\![\psi$ — $\tau^{\wedge}$-полный ультрафильтр в $A^{\wedge}$ и $x \in \psi]\!] = \mathbb{1}$. Если $h = h_\psi$, то из 9.4.2 (3) и 9.4.6 видно, что h — полный гомоморфизм из A в B. Осталось заметить, что h инъективен. Действительно, если $\mathbb{0}_A \neq a \in A$, то $a = a_\xi$ для некоторого $\xi \in \varkappa$, поэтому

$$h(a) = [\![a_\xi^{\wedge} \in \psi]\!] \geqslant [\![x \in \psi]\!] \wedge [\![a_\xi^{\wedge} = x]\!] = [\![a_\xi^{\wedge} = x]\!] \geqslant b_\xi \neq \mathbb{0},$$

что и требовалось. $\triangleright$

9.4.9. Отметим два следствия из теорем 9.3.7 и 9.4.8.

(1) *Всякую булеву алгебру можно вложить с сохранением точных границ в булеву алгебру, вполне порожденную счетным множеством образующих.*

$\triangleleft$ Согласно 9.4.8 произвольную булеву алгебру A можно вложить с сокращением точных границ в булеву алгебру $B := B(\omega, 2^{\varkappa})$, где $\varkappa := |A|$. Но по теореме 9.3.7 алгебра $B(\omega, 2^{\varkappa})$ обладает счетным множеством полных образующих. $\triangleright$

(2) Теорема Гейфмана — Хейлза. *Существует булева алгебра сколь угодно большой мощности, вполне порожденная счетным множеством образующих.*

$\triangleleft$ Это следует непосредственно из 9.3.7. $\triangleright$

9.5. Независимость гипотезы континуума

Гипотеза континуума не может быть ни доказана, ни опровергнута в теории множеств Цермело — Френкеля. Значит, эта гипотеза представляет собой независимую теоретико-множественную аксиому. Здесь мы приводим доказательство этого замечательного результата.

9.5.1. Напомним, что теорию $\mathscr{T}$ называют *непротиворечивой*, если φ и $\neg\varphi$ не являются одновременно теоремами этой теории ни для какой формулы φ языка $\mathscr{L}(\mathscr{T})$. Непротиворечивость теории $\mathscr{T}$ мы обозначим символом $\operatorname{Consis}(\mathscr{T})$. Если для некоторой формулы φ языка $\mathscr{L}(\mathscr{T})$ выполнены утверждения $\operatorname{Consis}(\mathscr{T}+\varphi)$ и $\operatorname{Consis}(\mathscr{T}+\neg\varphi)$, то принято говорить, что φ *независима* от $\mathscr{T}$.

Пусть $\mathscr{T}$ и $\mathscr{T}'$ — две теории первого порядка. Говорят, что теория $\mathscr{T}'$ служит *расширением* $\mathscr{T}$, если каждый символ и каждая переменная языка $\mathscr{L}(\mathscr{T})$ являются соответственно символом и переменной языка $\mathscr{L}(\mathscr{T}')$, а любая теорема теории $\mathscr{T}$ служит теоремой теории $\mathscr{T}'$. Разумеется, это равносильно тому, чтобы каждая специальная аксиома теории $\mathscr{T}$ являлась теоремой теории $\mathscr{L}(\mathscr{T}')$ (но вовсе не обязательно, чтобы каждая специальная аксиома теории $\mathscr{T}$ была бы специальной аксиомой теории $\mathscr{L}(\mathscr{T}')$).

Пусть в языке $\mathscr{L}:=\mathscr{L}(\mathrm{ZF})$ *определены константы* B, $\mathbb{V}^{(B)}$, $[\![\cdot=\cdot]\!]^B$ *и* $[\![\cdot\in\cdot]\!]^B$. *Допустим, что для двух расширений* $\mathscr{T}$ *и* $\mathscr{T}'$ *теории* ZF *выполнены следующие требования*:

(1) $\operatorname{Consis}(\mathrm{ZF})\to\operatorname{Consis}(\mathscr{T}')$;

(2) $\mathscr{T}'\vdash$«B *— полная булева алгебра*»;

(3) *в теории* $\mathscr{T}'$ *можно доказать, что* $\mathbb{V}^{(B)}$ *— булевозначная модель теории* $\mathscr{T}$, *т. е.* $\mathscr{T}'\vdash[\![\tau]\!]^B=\mathbb{1}_B$ *для любой аксиомы* τ *теории* $\mathscr{T}$.

Тогда $\operatorname{Consis}(\mathrm{ZF})\to\operatorname{Consis}(\mathscr{T})$.

$\lhd$ Предположив, что $\mathscr{T}$ противоречива, подберем аксиомы $\tau_1,\dots,\tau_n$ теории $\mathscr{T}$ так, что $\tau_1\wedge\dots\wedge\tau_n\to\sigma\wedge\neg\sigma$ для любого предложения σ языка $\mathscr{L}$. Из (2) и (3) мы выводим, что $\mathscr{T}'\vdash[\![\tau_1\wedge\dots\wedge\tau_n]\!]^B=\mathbb{1}_B$. Но в силу выбора аксиом $\tau_1,\dots,\tau_n$ будет

$$\mathscr{T}'\vdash[\![\tau_1\wedge\dots\wedge\tau_n]\!]^B\leqslant[\![\sigma\wedge\neg\sigma]\!]^B=\mathbb{0}_B.$$

Получаем абсурдное утверждение $\mathscr{T}'\vdash\mathbb{1}_B\leqslant\mathbb{0}_B$, доказывающее противоречивость $\mathscr{T}'$. Но тогда согласно (1) противоречивой будет и ZF, что и требовалось. $\rhd$

9.5.2. Напомним также следующие обозначения: AC — аксиома выбора (см. 1.3.10), CH — гипотеза континуума и GCH — обобщенная гипотеза континуума (см. 1.5.14). Независимость гипотезы континуума от аксиом теории множеств вытекает из следующих двух результатов, принадлежащих К. Гёделю и П. Дж. Коэну.

Теорема Гёделя о непротиворечивости. *Если теория множеств* ZF *непротиворечива, то теория* $\mathrm{ZF}+\mathrm{AC}+\mathrm{GCH}$ *также непротиворечива.*

$\lhd$ Доказательство этого факта, выходящее за рамки настоящей книги, проводят по следующей схеме. Сначала устанавливают, что универсум конструктивных множеств $\mathbb{L}$ (см. 1.6.10) образует модель для теории множеств Цермело — Френкеля: $\mathbb{L}\models\mathrm{ZF}$. Затем доказывают, что в этой модели справедливы AC и GCH. Таким образом, если теория множеств ZF непротиворечива, то аксиома выбора и обобщенная гипотеза континуума являются теоремами теории

ZF $+(\mathbb{V} = \mathbb{L})$. Следовательно, конъюнкция аксиомы выбора и обобщенной гипотезы континуума не может быть опровергнута в ZF. Подробности можно найти у К. Гёделя [36], Т. Йеха [64], П. Дж. Коэна [84], А. Мостовского [148], Дж. Шенфильда [175]. $\triangleright$

9.5.3. Теорема Коэна. *Если теория множеств* ZF *непротиворечива, то гипотеза континуума* CH *не является теоремой теории* ZFC.

$\triangleleft$ Доказательство содержится ниже в пунктах 9.5.5–9.5.9. $\triangleright$

9.5.4. Далее нам будут нужны некоторые свойства кардиналов. Напомним, прежде всего, что для кардиналов $\varkappa$ и λ сумму $\varkappa+\lambda$, произведение $\varkappa\cdot\lambda$ и степень $\lambda^\varkappa$ определяют соответственно как мощности множеств $X \cup Y$, $X \times Y$ и Y^X, где $\varkappa = |X|$, $\lambda = |Y|$ и в случае суммы предполагают дополнительно, что $X \cap Y = \varnothing$.

Для произвольных бесконечных кардиналов $\varkappa$, λ *и* ν *имеют место следующие утверждения*:

(1) $\lambda \cdot \omega = \lambda$;

(2) $\left(\lambda^\varkappa\right)^\nu = \lambda^{\varkappa\cdot\nu}$;

(3) $\lambda \cdot \varkappa = \lambda + \varkappa = \max\{\lambda, \varkappa\}$;

(4) $\lambda^n = \lambda$ $(n \in \omega)$;

(5) $|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n| = \lambda$;

(6) $|\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\lambda)| = \lambda$.

$\triangleleft$ Доказательства можно найти в книгах Ю. Л. Ершова и Е. А. Палютина [60], Т. Йеха [64], К. Куратовского и А. Мостовского [89], И. А. Лаврова и Л. Л. Максимовой [130], Э. Мендельсона [146]. $\triangleright$

9.5.5. *Всякая антицепь в булевой алгебре* $B(x, 2)$ *не более чем счетна, т. е.* $B(x, 2)$ — *булева алгебра счетного типа.*

$\triangleleft$ По определению множество $C(x, 2)$ можно отождествить с плотным подмножеством булевой алгебры $B(x, 2)$. Если (b_ξ) — антицепь в $B(x, 2)$, то для каждого ненулевого b_ξ найдется ненулевой $p_\xi \in C(x, 2)$, для которого $p_\xi \leqslant b_\xi$. Ясно, что (p_ξ) — также антицепь. Следовательно, достаточно доказать, что всякая антицепь в $C(x, 2)$ не более чем счетна.

Пусть A — антицепь в $C(x, 2)$. Множество A можно считать вполне упорядоченным. Определим последовательность $(x_n)_{n\in\omega}$ подмножеств множества x. Положим $x_0 := \varnothing$ и $x_1 := \mathrm{dom}(q)$, где q — наименьший элемент A. В множестве $\{a|_{x_1} : a \in A\}$ имеется лишь конечное число различных функций (не более 2^{x_1}), например, $a_1|_{x_1}, \dots, a_m|_{x_1}$. В каждом из множеств $\{a \in A : a|_{x_1} = a_k|_{x_1}\}$ имеется наименьший элемент, который мы обозначим символом a'_k. Положим

$$x_2 := x_1 \cup \bigcup_{k=1}^{m} \mathrm{dom}(a'_k)$$

и продолжим процесс по индукции. Пусть $x_\omega := \bigcup_{n\in\omega} x_n$. Ясно, что $|x_\omega| \leqslant \omega_0$ и, следовательно, согласно 9.5.4 (6) будет $|C(x_\omega, 2)| \leqslant \omega_0$. Осталось показать, что $A \subset C(x_\omega, 2)$. Для произвольного $p \in A$ существует $n \in \omega$ такой, что $\mathrm{dom}(p) \cap x_n = \mathrm{dom}(p) \cap x_{n+1}$, ибо в противном случае множество $\mathrm{dom}(p)$ было бы бесконечным. В непустом множестве $\{a \in A : a|_{x_n} = p|_{x_n}\}$ выберем наименьший элемент, скажем, $q \in A$. Тогда по определению x_{n+1} выполнено $\mathrm{dom}(q) \subset x_{n+1}$ и, в частности,

$q \in C(x_w, 2)$. Для множества $D := \operatorname{dom}(p) \cap \operatorname{dom}(q)$ будет

$$
\begin{aligned}
D \cap x_n &= \operatorname{dom}(q) \cap (\operatorname{dom}(p) \cap x_n) = \\
&= \operatorname{dom}(q) \cap (\operatorname{dom}(p) \cap x_{n+1}) = \operatorname{dom}(p) \cap (\operatorname{dom}(q) \cap x_{n+1}) = D,
\end{aligned}
$$

откуда $D \subset x_n$, а значит, p и q совпадают на D. Если $p \neq q$, то $r := p \cup q$ — ненулевой элемент из $C(x, 2)$, причем $r \leqslant p$ и $r \leqslant q$, что противоречит дизъюнктности p и q. Значит, $p = q \in C(x_\omega, 2)$. $\triangleright$

9.5.6. *Пусть $u \in \mathbb{V}$ и $v \in \mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что $|\operatorname{dom}(v)| \leqslant |u|$. Тогда $\mathbb{V}^{(B)} \models |v| \leqslant |u^\wedge|$.*

$\triangleleft$ Из условия $|\operatorname{dom}(v)| \leqslant |u|$ следует существование такой функции $g : u \to \operatorname{dom}(v)$, что $\operatorname{dom}(v) = \operatorname{im}(g)$. Определим элемент $f \in \mathbb{V}^{(B)}$ формулой

$$
f := \{(t^\wedge, g(t))^B : \ t \in u\} \times \{\mathbb{1}\}.
$$

Теперь так же, как и в 4.4.11 можно установить, что f удовлетворяет всем требуемым условиям:

$$
\mathbb{V}^{(B)} \models \operatorname{Fnc}(f) \wedge \operatorname{dom}(f) = u^\wedge \wedge \operatorname{im}(f) \supset u.
$$

Значит, $\mathbb{V}^{(B)} \models |v| \leqslant |u^\wedge|$, что и требовалось. $\triangleright$

9.5.7. *Пусть x — непустое множество и $|x| = \omega_\alpha$. Тогда справедливы оценки*

$$
\omega_\alpha \leqslant |B(x, 2)| \leqslant (\omega_\alpha)^{\omega_0}.
$$

$\triangleleft$ Каждый элемент g из $C(x, 2)$ однозначно определен упорядоченной парой (F_1, F_2) конечных подмножеств $F_1 := g^{-1}(0) \subset x$ и $F_2 := g^{-1}(1) \subset x$. Поэтому с учетом 9.5.4 (4, 6) мы выводим:

$$
|C(x, 2)| = |\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(x) \times \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(x)| = |\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(x)| \cdot |\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(x)| = |x| \cdot |x| = \omega_\alpha.
$$

Так как $C(x, 2)$ изоморфно плотному подмножеству $P \subset B(x, 2)$, то $\omega_\alpha \leqslant |B(x, 2)|$. В то же время по принципу исчерпывания каждый элемент булевой алгебры $B(x, 2)$ можно представить в виде супремума некоторой антицепи из P, которая будет счетной в силу 9.5.5. Следовательно, таких антицепей в P, а значит, и элементов в $B(x, 2)$, будет не больше, чем $|P^{\omega_0}| = |C(x, 2)^{\omega_0}| = (\omega_\alpha)^{\omega_0}$. $\triangleright$

9.5.8. Теорема. *Предположим, что $(\omega_\alpha)^{\omega_0} = \omega_\alpha$, и пусть $B := B(\omega \times \omega_\alpha, 2)$. Тогда имеет место утверждение*:

$$
\mathbb{V}^{(B)} \models 2^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha^\wedge}.
$$

$\triangleleft$ Согласно 9.5.7 будет $\omega_\alpha \leqslant |B| \leqslant (\omega_\alpha)^{\omega_0} = \omega_\alpha$, значит, $|B| = \omega_\alpha$. Определим элемент $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ формулами

$$
\operatorname{dom}(y) := B^{\operatorname{dom}(\omega^\wedge)}, \quad y(z) := [\![z \subset x]\!] \quad (z \in \operatorname{dom}(y)).
$$

Тогда $[\![y = \mathscr{P}(\omega^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$ (см. 4.4.4). Заметим, что

$$
|\operatorname{dom}(y)| = |B^{\operatorname{dom}(\omega^\wedge)}| = (\omega_\alpha)^{\omega_0} = \omega_\alpha.
$$

Следовательно, в силу 9.5.6 будет $\mathbb{V}^{(B)} \models |y| \leqslant |(\aleph_\alpha)^\wedge|$ или $\mathbb{V}^{(B)} \models |\mathscr{P}(\aleph_0)| \leqslant |(\omega_\alpha)^\wedge|$. Так как B — булева алгебра счетного типа, то по теореме 9.1.6 $\mathbb{V}^{(B)} \models$

$|(\omega_\alpha)^\wedge| = \aleph_{\alpha^\wedge}$, откуда мы выводим, что $\mathbb{V}^{(B)} \models |\mathscr{P}(\aleph_0)| \leqslant \aleph_{\alpha^\wedge}$ или, что то же самое, $\mathbb{V}^{(B)} \models 2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_{\alpha^\wedge}$.

Осталось доказать противоположное неравенство $\mathbb{V}^{(B)} \models \aleph_{\alpha^\wedge} \leqslant 2^{\aleph_0}$. Для произвольного $\nu \in \omega_\alpha$ определим элемент $u_\nu \in \mathbb{V}^{(B)}$ по формуле

$$\mathrm{dom}(u_\nu) := \mathrm{dom}(\omega^\wedge), \quad u_\nu(n^\wedge) := \{f \in 2^{\omega\times\omega_\alpha} :\ f(n,\nu) = \mathbb{1}\}.$$

Применяя 4.1.9, легко сосчитать, что

$$[\![u_\nu \subset \omega^\wedge]\!] = \bigvee_{n\in\omega} u_\nu(n^\wedge) \Rightarrow [\![n^\wedge \in \omega^\wedge]\!] = \mathbb{1}.$$

Множество $P := C(\omega \times \omega_\alpha, 2)$ можно отождествить с плотным в B множеством. Тогда для любого $p \in P$ будет

$$[\![n^\wedge \in u_\nu]\!] \geqslant p \leftrightarrow p(n,\nu) = 1; \qquad [\![n^\wedge \notin u_\nu]\!] \geqslant p \leftrightarrow p(n,\nu) = 0.$$

Возьмем произвольные $\mu, \nu \in \omega_\alpha$, $\mu \neq \nu$, и пусть $p \leqslant [\![u_\mu = u_\nu]\!]$ для некоторого $p \in P$. Если $p \neq \mathbb{0}$, то в силу конечности множества $\mathrm{dom}(p)$ найдется такое число $n \in \omega$, что $(n,\eta) \notin \mathrm{dom}(p)$ для всех $\eta \in \omega_\alpha$. Положим

$$p' := p \cup \{((n,\mu),1)\} \cup \{((n,\nu),0)\}.$$

Тогда $p' \leqslant [\![n^\wedge \in u_\mu]\!] \wedge [\![n^\wedge \notin u_\nu]\!]$, откуда $p' \leqslant [\![u_\mu \neq u_\nu]\!]$. Но так как $p' \leqslant p$, то выполнено также $p' \leqslant [\![u_\mu = u_\nu]\!]$ и, стало быть, $p' = \mathbb{0}$. Таким образом, $p = \mathbb{0}$ и $[\![u_\mu = u_\nu]\!] = \mathbb{0}$ при $\mu \neq \nu$.

Введем теперь элемент $f \in \mathbb{V}^{(B)}$ формулой

$$f := \{(\nu^\wedge, u_\nu)^B :\ \nu \in \omega_\alpha\} \times \{\mathbb{1}\}.$$

Так же, как и в 4.4.11 можно установить, что

$$\mathbb{V}^{(B)} \models «f \text{ — отображение из } (\omega_\alpha)^\wedge \text{ в } \mathscr{P}(\omega^\wedge)».$$

Более того, из условия $\mu \neq \nu \to [\![u_\mu = u_\nu]\!] = \mathbb{0}$ вытекает непосредственно, что $[\![f \text{ инъективно}]\!] = \mathbb{1}$. Поскольку B — алгебра счетного типа, то по теореме 9.1.6 будет $\mathbb{V}^{(B)} \models (\omega_\alpha)^\wedge = \aleph_{\alpha^\wedge}$ и, следовательно,

$$\mathbb{V}^{(B)} \models «f \text{ — инъективное отображение из } \aleph_{\alpha^\wedge} \text{ в } \mathscr{P}(\omega^\wedge)».$$

Значит, $\mathbb{V}^{(B)} \models \aleph_{\alpha^\wedge} \leqslant 2^{\aleph_0}$, что и требовалось. $\rhd$

9.5.9. Теорема. *Если теория* ZF *непротиворечива, то теория* $\mathrm{ZFC} + 2^{\omega_0} = \omega_2$ *также непротиворечива.*

$\lhd$ Непротиворечивость ZF влечет непротиворечивость $\mathscr{T}' := \mathrm{ZFC} + \mathrm{GCH}$ согласно 9.5.2. Предполагая GCH, на основании 9.5.4 (1, 2) мы выводим:

$$(\omega_2)^{\omega_0} = \left(2^{\omega_1}\right)^{\omega_0} = 2^{\omega_1\cdot\omega_0} = 2^{\omega_1} = \omega_2.$$

По теореме 9.5.8 в теории $\mathscr{T}'$ можно доказать существование полной булевой алгебры B такой, что $\mathbb{V}^{(B)} \models 2^{\aleph_0} = \aleph_{2^\wedge}$. Ввиду очевидного соотношения $\mathbb{V}^{(B)} \models 2^\wedge = 2$ будет $\mathbb{V}^{(B)} \models \aleph_{2^\wedge} = \aleph_2$ и, следовательно, $\mathbb{V}^{(B)} \models 2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Кроме того, $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{ZFC}$ согласно принципу переноса. Теперь нам осталось применить 9.5.1 к расширениям $\mathscr{T}'$ и $\mathscr{T} := \mathrm{ZFC} + 2^{\omega_0} = \omega_2$. $\rhd$

9.6. Комментарии

9.6.1. (1) Материал параграфа 9.1 является общеизвестным и представлен в различных руководствах по булевозначным моделям, см., например, книги Дж. Белла [191], Г. Такеути и У. М. Заринга [394]. Утверждения 9.1.4–9.1.7 взяты из книги Дж. Белла [191], в которой приведено большое количество ссылок на неопубликованную рукопись Д. Скотта 1967 года.

(2) Утверждения, аналогичные 9.1.4 и 9.1.6, имеют место и для кардиналов $\aleph_\alpha$, где α — произвольный ординал внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Согласно 5.1.7 (3) булевозначный ординал δ представляет собой перемешивание стандартных ординалов, т. е. имеет место представление $\delta = \operatorname{mix}_{\alpha\in\beta}(b_\alpha \alpha^\wedge)$ для некоторых ординала β и разбиения единицы $(b_\alpha)_{\alpha\in\beta} \subset B$. Тогда из 9.1.4 видно, что $\aleph_\delta \geqslant \operatorname{mix}_{\alpha\in\beta}(b_\alpha \omega_\alpha^\wedge)$. Если же B — алгебра счетного типа, то из 9.1.6 вытекает $\aleph_\delta = \operatorname{mix}_{\alpha\in\beta}(b_\alpha \omega_\alpha^\wedge)$.

(3) Если B не подчиняется требованию счетности типа, то соотношение $\mathbb{V}^{(B)} \models (\lambda^+)^\wedge = (\lambda^\wedge)^+$ из 9.1.8 может нарушаться. Более того, из результатов параграфа 9.3 следует, что для любого кардинала λ возможен такой выбор B, что внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ ординалы $(\lambda^+)^\wedge$ и $\lambda^\wedge$ равномощны.

(4) Пусть $\varkappa$ — бесконечный кардинал. Говорят, что булева алгебра B удовлетворяет *$\varkappa$-цепному условию*, если $|A| < \varkappa$ для любой антицепи A в B. Ясно, что булева алгебра счетного типа — это булева алгебра, удовлетворяющая ω_1-цепному условию. Можно показать, что если B удовлетворяет $\varkappa$-цепному условию, то $\mathbb{V}^{(B)} \models \operatorname{Card}(\alpha^\wedge)$ для любого кардинала $\alpha > \varkappa$. Если же, сверх сказанного, $\varkappa$ — регулярный кардинал, то $\mathbb{V}^{(B)} \models \operatorname{Card}(\varkappa^\wedge)$. (Кардинал $\varkappa$ называют *регулярным*, если мощность объединения семейства множеств $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ меньше $\varkappa$ при условии $|\mathrm{A}| < \varkappa$ и $|x_\alpha| < \varkappa$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$.) Подробности см. в книгах Дж. Белла [191] и Т. Йеха [64].

9.6.2. (1) Различные определения $(\varkappa, \lambda)$-дистрибутивности для булевой алгебры, а также утверждения 9.2.3 и 9.2.4 см. в книге Р. Сикорского [160]. Теоремы 9.2.5–9.2.7 приведены в книге Дж. Белла [191] в качестве упражнений и также восходят к упомянутой рукописи Д. Скотта 1967 года. Эквивалентность (2) и (3) из 9.2.7 следует также из одного старого результата Э. Смита мл. и А. Тарского (см. у Р. Сикорского [160, теорема 20.4]): *всякая полная (и даже $2^\varkappa$-полная) $\varkappa$-дистрибутивная булева алгебра будет $(\varkappa, 2^\varkappa)$-дистрибутивной.*

(2) *Атомом* булевой алгебры B называют такой ее ненулевой элемент a, что $\{x \in B : \mathbb{0} \leqslant x \leqslant a\} = \{\mathbb{0}, a\}$. Эквивалентно, $a \neq \mathbb{0}$ — атом булевой алгебры B, если для любого $x \in B$ либо $a \leqslant x$, либо $a \leqslant x^*$. Говорят, что булева алгебра B *атомична* или *атомна*, если для всякого ненулевого элемента $x \in B$ существует атом $a \leqslant x$. Булеву алгебру называют *безатомной*, если она не обладает ни одним атомом.

Теорема. *Пусть B — полная булева алгебра. Равносильны следующие утверждения*:

(a) *B изоморфна булеану $\mathscr{P}(A)$ для непустого A*;

(b) *B вполне дистрибутивна*;

(c) *B атомична.*

$\triangleleft$ См. у Р. Сикорского [160, теоремы 25.1 и 25.2]. $\triangleright$

(3) Булеву алгебру B называют *слабо σ-дистрибутивной*, если для любой двойной последовательности $(e_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ в B такой, что $e_{m,n+1} \leqslant e_{m,n}$ для всех

$m, n \in \mathbb{N}$, будет

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n\in\mathbb{N}} e_{m,n} = \inf_{\phi\in\Phi} \sup_{m\in\mathbb{N}} e_{m,\phi(m)},$$

где $\Phi := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (при условии, что все точные границы в этой формуле существуют). Слабая σ-дистрибутивность булевой алгебры B равносильна тому, что в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ множество стандартных последовательностей натуральных чисел мажорирует множество всех последовательностей натуральных чисел. Точнее говоря, имеет место следующее утверждение.

Для полной булевой алгебры B равносильны условия:

(a) *B слабо σ-дистрибутивна*;

(b) $\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, g \in (\omega^\wedge)^{\omega^\wedge})(\exists\, f \in (\omega^\omega)^\wedge)(\forall\, n \in \omega^\wedge) g(n) \leqslant f(n)$.

(4) Общее понятие слабой $(\varkappa, \lambda)$-дистрибутивности и его характеризацию в терминах стоунова компакта см. в книге Р. Сикорского [160] (ср. 10.7.7). В [306, 307] К. Маттес получил результат о продолжении $\varkappa$-гомоморфизма со значениями в слабо $\varkappa$-дистрибутивной (= слабо $(\varkappa, \varkappa)$-дистрибутивной) булевой алгебре. Тот факт, что условие слабой $\varkappa$-дистрибутивности является также необходимым для продолжения $\varkappa$-гомоморфизмов (обращение результата К. Маттеса), установил М. Райт [404]. В случае σ-гомоморфизмов со значениями в булевой алгебре счетного типа эти результаты получил независимо Д. А. Владимиров [32]. Слабая σ-дистрибутивность соответствует случаю $\varkappa = \lambda = \omega$.

(5) Стоит отметить, что теорема 9.2.5 верна и в том случае, когда $\varkappa = n$ — некоторый конечный кардинал. Действительно, каждая булева алгебра (n, λ)-дистрибутивна, каков бы ни был кардинал λ. Но и формула $\mathbb{V}^{(B)} \models (\lambda^n)^\wedge = (\lambda^\wedge)^{n^\wedge}$ справедлива для любой булевой алгебры B в соответствии с 5.1.10 (1).

9.6.3. (1) Предположим, что y снабжено дискретной топологией, а y^x — топологией произведения. Тогда булева алгебра $B(x, y)$ из 9.3.3 (1) изоморфна $\mathrm{RO}\,(y^x)$. Вложение упорядоченного множества $C(x, y)$ в $B(x, y)$ имеет вид $p \mapsto \{f \in y^x : p \subset f\}$. Аналогично, булева алгебра $B_\varkappa(x, y)$ будет изоморфна $\mathrm{RO}\,(y^x)$, если определить топологию в y^x посредством базы, состоящей из множеств вида $\{f \in y^x : p \subset f\}$, где p пробегает $C_\varkappa(x, y)$. Вложение упорядоченного множества $C_\varkappa(x, y)$ в $B_\varkappa(x, y)$ имеет тот же вид $p \mapsto \{f \in y^x : p \subset f\}$. Алгебру $B_\varkappa(\varkappa, \lambda)$ называют $(\varkappa, \lambda)$-*алгеброй смещения* (см. книги Дж. Белла [191] и Т. Йеха [64]).

(2) Тот факт, что $B(x, 2)$ — булева алгебра счетного типа (см. 9.5.5), можно получить из того, что в топологическом пространстве 2^x семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств не более чем счетно. Приведем формулировку более общего факта из общей топологии (см. книгу Р. Энгелькинга [180, теорема 2.3.17]).

Символ $d(X)$ обозначает *плотность* X, т. е. наименьший кардинал вида $|A|$, где A — всюду плотное множество в X.

Теорема. *Пусть $\varkappa$ — бесконечный кардинал. Если $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — произвольное семейство топологических пространств, причем $d(X_\xi) \leqslant \varkappa$ для каждого $\xi \in \Xi$, то мощность любого семейства попарно непересекающихся непустых открытых множеств в декартовом произведении $\prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$ не превосходит $\varkappa$.*

Отсюда следует, в частности, что в декартовом произведении сепарабельных топологических пространств любое семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств счетно.

(3) Сформулированная в (2) теорема может быть доказана на основе следующего результата (см. книгу Р. Энгелькинга [180, теорема 2.3.15]).

Теорема Хьюитта — Марчевского — Пондицери. *Пусть $\varkappa$ — бесконечный кардинал, а $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство топологических пространств, причем $|\Xi| \leqslant 2^\varkappa$. Если $d(X_\xi) \leqslant \varkappa$ для каждого $\xi \in \Xi$, то $d(\prod_{\xi\in\Xi} X_\xi) \leqslant \varkappa$.*

(4) Если булева алгебра порождена счетным числом образующих, то она служит гомоморфным образом свободной булевой алгебры со счетным числом образующих (см. у Р. Сикорского [160, 31.6]). Последняя же алгебра изоморфна алгебре открыто-замкнутых множеств канторова множества. Как показывает теорема 9.3.7 ничего подобного не наблюдается, если речь идет об образующих вполне порождающих булеву алгебру. Теорему 9.3.7 установили Х. Гейфман и А. Хейлз (см. у Р. Сикорского [160, пример 35.Л]). Доказательство, приведенное в 9.3, найдено Р. Соловеем [376].

(5) Теорему 9.3.5 получил А. Леви [285] (см. также [286, 287]). Ему же принадлежит следующий результат, приведенный в книге Дж. Белла в качестве упражнения: в предположении GCH для бесконечных кардиналов $\varkappa$ и λ при $\varkappa < \lambda$ существует полная булева алгебра B такая, что при каноническом погружении в модель $\mathbb{V}^{(B)}$ кардиналы $\varkappa$ и λ «склеиваются» ($|\lambda^\wedge| = |\varkappa^\wedge|$), но никакой кардинал $\alpha \leqslant \varkappa$ или $\alpha > \lambda$ не смещается ($\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Card}(\alpha^\wedge)$). В качестве такой алгебры можно взять $B := B_\varkappa(\varkappa, \lambda)$.

9.6.4. (1) Теоремы о сэндвиче и теорема Хана — Банаха для булевых гомоморфизмов (теоремы 9.4.3 и 9.4.4) другим способом были получены А. Монтейро [317]. Аналогичные результаты для дистрибутивных решеток получил А. Сигноли [203]. Приведенные в 9.4 доказательства сводят дело к существованию ультрафильтра в подходящей модели. Например, теорема 9.4.3 является интерпретацией в булевозначной модели следующей теоремы Стоуна: *если в булевой алгебре идеал I и фильтр F не пересекаются, то существует максимальный идеал $\mathscr{I}$, содержащий I и непересекающийся с F (или существует ультрафильтр $\mathscr{F}$, содержащий F и непересекающийся с $\mathscr{I}$).*

(2) Относительно теоремы 9.4.7 и ее приложений см. книгу Е. Расёвой и Р. Сикорского [155]. Здесь отметим дополнительно к 9.4.7, что множество всех ультрафильтров в A, не являющихся τ-полными, представляет собой множество первой категории в стоуновом пространстве алгебры A, причем существует τ-полный изоморфизм A в некоторый булеан (см. [155, теоремы 9.3 и 9.4]).

(3) Центральный результат параграфа 9.4 — теорема 9.4.8 принадлежит С. Крипке [272] (см. также книги Дж. Белла [191], Т. Йеха [64]).

9.6.5. (1) Справедлив вариант теоремы 9.5.5 для булевой алгебры $B_\varkappa(x, y)$ (см. у Дж. Белла [191]).

Пусть $\varkappa$ — регулярный кардинал, x и y — непустые множества, причем $2 \leqslant |y| \leqslant \varkappa$. Любая антицепь в $B_\varkappa(x, y)$ имеет мощность, не превосходящую $\varkappa$.

$\lhd$ Рассуждения аналогичны 9.5.5. Антицепь A можно вполне упорядочить. Построим трансфинитную последовательность $(x_\alpha)_{\alpha\in\varkappa}$, полагая: $x_0 := \varnothing$, $x_\alpha := \bigcup_{\beta\in\alpha} x_\beta$ для предельного α и $x_{\alpha+1} := x_\alpha \cup \bigcup\{\mathrm{dom}(q) : q \in A_{\alpha+1}\}$, где $q \in C_\varkappa(x, y)$ входит в $A_{\alpha+1}$ в том и только в том случае, если q — наименьший элемент множества вида $\{a \in A : a|_{x_\alpha} = p\}$ для некоторого $p \in C_\varkappa(x_\alpha, y)$. Положим $x_\varkappa := \bigcup_{\beta\in\varkappa} x_\beta$. Тогда $|x_\alpha| \leqslant \varkappa$ и $|C_\varkappa(x_\varkappa, y)| \leqslant \varkappa$. Далее, как и в 9.5.5 можно установить, что $A \subset C_\varkappa(x_\varkappa, y)$. $\rhd$

(2) В рассуждениях из 9.5.8 и 9.5.9, как нетрудно понять, можно ω_2 заменить на ω_3, $\omega_{\omega+1}$, ω_{ω_1} и т. д. При этом мы получим, что при разных выборах булевой алгебры B в булевозначной модели $\mathbb{V}^{(B)}$ будет $2^{\aleph_0} = \aleph_3$, $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1}$, $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$ и т. д. Стало быть, из непротиворечивости ZF вытекает непротиворечивость $\mathrm{ZFC} + 2^{\omega_0} = \omega_3$, $\mathrm{ZFC} + 2^{\omega_0} = \omega_{\omega+1}$, $\mathrm{ZFC} + 2^{\omega_0} = \omega_{\omega_1}$ и т. д. Может показаться, что подобные упражнения уже почти ничего не добавляют к основному выводу о независимости гипотезы континуума и больше похожи на забаву. Однако они позволяют конструировать модели, в которых выполняются утверждения, в большей или меньшей мере отклоняющиеся от гипотезы континуума, и в конечном счете лучше понять «степень независимости» гипотезы континуума.

(3) Можно подобрать такую булеву алгебру B, что в булевозначной модели $\mathbb{V}^{(B)}$ обобщенная гипотеза континуума $2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}$ нарушается только при $\alpha = 0$ (см. у Дж. Белла [191]):

Если теория ZF *непротиворечива, то непротиворечива также и теория*

$$\mathrm{ZFC} + (2^{\omega_0} = \omega_2) + ((\forall\, \alpha \geqslant 1) 2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}).$$

В частности, в этой теории можно доказать $2^{\omega_0} = 2^{\omega_1} = \omega_2$.

$\lhd$ Для этого нужно взять $B := B(\omega \times \omega_2, 2)$. $\rhd$

(4) Приведем еще один результат в этом направлении, принадлежащий Р. Соловею. Пусть $\varkappa$ и λ — регулярные кардиналы, причем $\varkappa < \lambda$. Положим $B := B_\varkappa(\varkappa \times \lambda, 2)$. Если имеет место GCH, то справедливы соотношения:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, \alpha)(\mathrm{Card}(\alpha) \wedge \aleph_0 \leqslant \alpha < \varkappa^{\wedge} \to 2^\alpha = \alpha^+);$$

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, \alpha)(\mathrm{Card}(\alpha) \wedge \alpha \geqslant \lambda^{\wedge} \to 2^\alpha = \alpha^+);$$

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, \alpha)(\mathrm{Card}(\alpha) \wedge \varkappa^{\wedge} \leqslant \alpha < \lambda^{\wedge} \to 2^\alpha = \lambda^{\wedge}).$$

Отсюда выводится следующий результат.

Если теория ZF *непротиворечива, то непротиворечивой будет и теория*

$$\mathrm{ZFC} + (2^{\omega_0} = \omega_1) + (\forall\, \alpha)(1 \leqslant \alpha \leqslant \omega \to 2^{\omega_\alpha} = \omega_{\omega+1}) + \\ + (\forall\, \alpha)(\omega + 1 \leqslant \alpha \to 2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}).$$

(5) Дальнейшие результаты о независимости и непротиворечивости см. в книгах Дж. Белла [191], Х. Дейлза и У. Вудина [206], Т. Йеха [64], Г. Такеути и У. М. Заринга [394].

Глава 10
Анализ векторных решеток

Каждый булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$, связанный с выбранной булевой алгеброй B, представляет собой одну из тех арен, где разыгрываются всевозможные математические события. В самом деле, в силу принципов переноса и максимума в любом из $\mathbb{V}^{(B)}$ имеются числа и группы, интегралы Лебега и Римана, выполнена теорема Радона — Никодима и Хана — Банаха, осуществимо жорданово разложение матрицы. Простейшая техника спусков и подъемов, с которой мы ознакомились на примере алгебраических систем, показывает, что каждый из стандартных математических объектов, рассматриваемый в $\mathbb{V}^{(B)}$, есть реализация аналогичного классического объекта с дополнительной структурой, определяемой алгеброй B. В частности, высказанное соображение относится и к алгебраическим системам, используемым в функциональном анализе.

Оказывается, что булевозначные реализации большинства классических объектов анализа неразрывно связаны с концепциями теории векторных решеток и, прежде всего, с K-пространствами, введенными в начале 1930-х годов Л. В. Канторовичем. Открытие этой связи является наиболее значительным общенаучным достижением булевозначного анализа.

В текущей главе мы дадим булевозначное введение в теорию векторных решеток. Фундаментальную роль при этом будет играть теорема Гордона, утверждающая, что *произвольное расширенное K-пространство служит интерпретацией поля вещественных чисел в подходящей булевозначной модели*. Более того, *архимедова векторная решетка при вложении в булевозначную модель превращается в векторную подрешетку множества вещественных чисел, рассматриваемого как векторная решетка над некоторым своим плотным упорядоченным подполем*. Этот результат следует рассматривать как один из центральных результатов главы, так как именно он обеспечивает возможность широкого и плодотворного применения теоремы Гордона в теории векторных решеток.

В соответствии с названными фактами и основными принципами булевозначного анализа каждая теорема о вещественных числах в рамках теории множеств Цермело — Френкеля имеет свой аналог для исследуемого K-пространства, реализованного как булевозначное поле вещественных чисел. Поиск этих аналогов проводят с помощью операций булевозначного анализа и называют переносом или переводом утверждений о числах в утверждения об элементах K-пространства, реализованного как соответствующее булевозначное поле вещественных чисел. Технику *булевозначного переноса* мы демонстрируем выводом некоторых важнейших структурных свойств K-пространств. Среди них представление пространств посредством пространств непрерывных функций или спектральных функций, спектральная теорема Фрейденталя, спектральное интегрирование, функциональное исчисление в K-пространстве и т. д.

Выбор булевой алгебры B (скажем, фиксация алгебры измеримых множеств по модулю множеств нулевой меры, алгебры регулярных открытых множеств или алгебры проекторов в гильбертовом пространстве), положенной в основу булевозначной модели $\mathbb{V}^{(B)}$, предопределен соответствующими K-пространствами (пространством измеримых функций, пространством полунепрерывных функций или пространством самосопряженных операторов). На этом пути открывается замечательная возможность перенесения имеющихся знаний о числах на многие классические объекты современного анализа, которые, как это не парадоксально, служат булевозначными моделями поля вещественных чисел.

10.1. Векторные решетки

Здесь мы дадим эскиз основных понятий теории векторных решеток. Более детальное изложение можно найти в [7, 35, 72, 73, 185, 297, 367, 408].

10.1.1. Пусть $\mathbb{F}$ — линейно упорядоченное поле. Рассмотрим алгебраическую систему E, сигнатура которой содержит символы $+, 0, \leqslant, \lambda$, где λ пробегает поле $\mathbb{F}$, обозначая всякий раз одноместную операцию на E. Последнюю называют *растяжением вектора* в λ раз или умножением вектора на скаляр λ. Допустим, что для E выполнены условия:

(1) $(E, +, 0, \leqslant)$ — коммутативная упорядоченная группа;

(2) E — векторное пространство над $\mathbb{F}$;

(3) умножение на любой положительный скаляр $\lambda \in \mathbb{F}$ является положительным эндоморфизмом упорядоченной группы $(E, +, 0, \leqslant)$.

В рассматриваемой ситуации говорят, что задано *упорядоченное векторное пространство* E. Таким образом, упорядоченное векторное пространство можно определить как пару $(E, \leqslant)$, где E — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, а $\leqslant$ — *векторный порядок* в E, т. е. отношение порядка в E, согласованное со структурой векторного пространства. Последнее, неформально говоря, означает, что неравенства в E «можно складывать и умножать на положительные элементы поля $\mathbb{F}$». Формально говоря, отношение векторного порядка в E должно быть конусом в E^2 и одновременно отношением порядка в E. Задание векторного порядка в векторном пространстве E над полем $\mathbb{F}$ равносильно указанию множества — *положительного конуса* — $E^+ \subset E$ со свойствами: $E^+ + E^+ \subset E^+$; $\lambda E^+ \subset E^+$ $(0 \leqslant \lambda \in \mathbb{F})$; $E^+ \cap (-E^+) = 0$. При этом порядок $\leqslant$ и конус E^+ связаны соотношением

$$x \leqslant y \leftrightarrow y - x \in E^+ \quad (x, y \in E).$$

Всюду ниже, где поле $\mathbb{F}$ не указано явно, мы имеем в виду векторную решетку над линейно упорядоченным полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

10.1.2. Понятия и результаты теории упорядоченных групп применимы, разумеется, и к упорядоченным векторным пространствам. Ясно, например, что для упорядоченного векторного пространства понятия архимедовости, линейной упорядоченности, o-идеала и т. д. относятся к соответствующей упорядоченной группе.

Векторной решеткой называют упорядоченное векторное пространство, являющееся решеточно упорядоченной группой. Тем самым в векторной решетке E точные границы конечных множеств, положительная часть, отрицательная часть и модуль элемента имеют те же смысл и обозначения, что и в 8.4.3. *Порядковым идеалом* векторной решетки называют подпространство, являющееся порядковым идеалом соответствующей аддитивной группы (см. 8.4.3).

Дизъюнктность и связанные с ней понятия компоненты, порядкового проектора и базы векторной решетки вводят так же, как и в 8.4.4. Компоненту векторной решетки, следуя западной традиции, иногда называют *полосой.* Компоненту K вида $\{u\}^{\perp\perp}$ называют *главной.* Как и в случае решеточно упорядоченной группы, *база* $\mathfrak{B}(E)$ векторной решетки представляет собой полную булеву алгебру, причем булевы операции в ней имеют вид:

$$L \wedge K = L \cap K, \quad L \vee K = (L \cup K)^{\perp\perp}, \quad L^* = L^{\perp} \quad (L, K \in \mathfrak{B}(E)).$$

Всякая компонента является порядковым идеалом, но обратное неверно. Если идеал $J \subset E$ обладает свойством $J^{\perp\perp} = E$, то его называют *фундаментом* E или же *порядково плотным идеалом* E. Для произвольной компоненты K векторной решетки E прямая сумма $K \oplus K^{\perp}$ является фундаментом E. Если $E = K \oplus K^{\perp}$, то проектор на компоненту K параллельно $K^{\perp}$ называют *порядковым проектором.* Порядковый проектор на компоненту K, обозначаемый символом $[K]$, можно вычислять по формулам

$$x = \sup\{u \in K : 0 \leqslant u \leqslant x\} \quad (0 \leqslant x \in E),$$
$$[K]x = [K]x^+ - [K]x^- \quad (x \in E).$$

Можно показать, что линейный оператор $\pi : E \to E$ является порядковым проектором в том и только в том случае, если $\pi \circ \pi = \pi$ и $0 \leqslant \pi x \leqslant x$ $(0 \leqslant x \in E)$.

Множество проекторов на всевозможные компоненты E мы обозначим символом $\mathfrak{P}(E)$. Множество $\mathfrak{P}(E)$ всех порядковых проекторов, упорядоченное правилом $\pi \leqslant \rho \leftrightarrow \pi \circ \rho = \pi$, является булевой алгеброй. Булевы операции в $\mathfrak{P}(E)$ имеют вид

$$\pi \wedge \rho = \pi \circ \rho, \quad \pi \vee \rho = \pi + \rho - \pi \circ \rho, \quad \pi^* = I_E - \pi \quad (\pi, \rho \in \mathfrak{P}(E)).$$

Говорят, что векторная решетка *допускает проекции на компоненты* (на главные компоненты), если для всякой компоненты (главной компоненты) K определен оператор порядкового проектирования $[K]$.

Если векторная решетка E допускает проекции на компоненты и всякое дизъюнктное множество положительных элементов в E имеет супремум, то E называют *расширенной.*

10.1.3. (1) *Порядковым интервалом* в E называют множество вида $[a, b] := \{x \in E : a \leqslant x \leqslant b\}$, где $a, b \in E$. Любая векторная решетка обладает *декомпозиционным свойством Рисса*:

$$[0, x + y] = [0, x] + [0, y] \quad (x, y \in E^+).$$

В векторной решетке E имеет место также следующее утверждение, часто называемое *леммой о двойном разбиении.* Пусть $x, y, z \in E^+$ и $x = y + z$. Если $x = x_1 + \ldots + x_n$ для некоторых $x_1, \ldots, x_n \in E^+$, то существуют такие $y_k, z_k \in E^+$ $(k := 1, \ldots, n)$, что совместна система условий

$$x_k = y_k + z_k \quad (k := 1, \ldots, n),$$
$$y = y_1 + \ldots + y_n, \quad z = z_1 + \ldots + z_n.$$

(2) Элемент $\mathbb{1} \in E$ именуют (*слабой порядковой*) *единицей*, если $\{\mathbb{1}\}^{\perp\perp} = E$, т. е. если в E нет отличных от нуля элементов, дизъюнктных $\mathbb{1}$. Пусть для некоторого $0 \leqslant e \in E$ выполняется $e \wedge (\mathbb{1} - e) = 0$. Тогда говорят, что e — *единичный элемент* (относительно $\mathbb{1}$). Множество $\mathfrak{C}(\mathbb{1}) := \mathfrak{C}(E)$ всех единичных элементов с индуцированным из E порядком есть булева алгебра. Решеточные операции в $\mathfrak{C}(\mathbb{1})$ наследуются из E, а булево дополнение имеет вид $e^* = \mathbb{1} - e$ $(e \in \mathfrak{C}(\mathbb{1}))$.

(3) В порядковом идеале $I(u) := \bigcup_{n=1}^{\infty}[-nu, nu]$, порожденном элементом $0 \leqslant u \in E$, можно ввести полунорму

$$\|x\|_\infty := \|x\|_u := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : |x| \leqslant \lambda u\} \quad (x \in I(u)).$$

Если $I(u) = E$, то говорят, что u — *сильная единица*, а $I(u)$ — *векторная решетка ограниченных элементов*. Полунорма $\|\cdot\|_u$ будет нормой в том и только в том случае, если решетка $I(u)$ архимедова.

(4) Элемент $x \geqslant 0$ векторной решетки называют *дискретным*, если $[0, x] = [0, 1]x$, т. е. если из $0 \leqslant y \leqslant x$ следует, что $y = \lambda x$ для некоторого $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Векторную решетку E считают *дискретной*, если для каждого $0 < y \in E$ найдется такой дискретный элемент $x \in E$, что $0 < x \leqslant y$. В случае, когда E не имеет ненулевых дискретных элементов, говорят, что E — *непрерывная* решетка.

10.1.4. *Пространством Канторовича* или же *K-пространством* называют такую векторную решетку, в которой всякое непустое порядково ограниченное подмножество имеет точные границы. Порядковая ограниченность множества означает, что оно содержится в некотором порядковом интервале. Изредка вместо K-пространства используют более полный термин — условно порядково полная векторная решетка. Если в векторной решетке существуют точные границы непустых счетных порядково ограниченных множеств, то ее называют *K_σ-пространством.* Всякое K_σ-пространство, и тем более всякое K-пространство, архимедово.

Теорема. *Пусть E — произвольное K-пространство. Тогда проектирование на компоненты определяет изоморфизм $K \mapsto [K]$ булевых алгебр $\mathfrak{B}(E)$ и $\mathfrak{P}(E)$. Если в E имеется единица $\mathbb{1}$, то отображения $\pi \mapsto \pi\mathbb{1}$ из $\mathfrak{Pr}(E)$ в $\mathfrak{C}(E)$ и $e \mapsto \{e\}^{\perp\perp}$ из $\mathfrak{C}(E)$ в $\mathfrak{B}(E)$ также являются изоморфизмами булевых алгебр.*

10.1.5. Проектор $[u] := \pi_u$ на главную компоненту $\{u\}^{\perp\perp}$, где $0 \leqslant u \in E$, может быть найден по более простому правилу, нежели указано в 10.1.2:

$$\pi_u x = \sup\{x \wedge (nu) : n \in \mathbb{N}\} \quad (0 \leqslant x \in E).$$

В частности, в K_σ-пространстве существует проекция любого элемента на всякую главную компоненту.

Пусть E — это K_σ-пространство с единицей $\mathbb{1}$. Проекцию единицы на компоненту $\{x\}^{\perp\perp}$ называют *следом* элемента x и обозначают символом e_x. Таким образом, $e_x := \sup\{\mathbb{1} \wedge (n|x|) : n \in \mathbb{N}\}$. След e_x служит как единицей в $\{x\}^{\perp\perp}$, так и единичным элементом в E. Для каждого вещественного числа λ через e^x_λ обозначают след положительной части элемента $\lambda\mathbb{1} - x$, т. е. $e^x_\lambda := e_{(\lambda\mathbb{1}-x)^+}$. Возникающую при этом $\mathfrak{C}(\mathbb{1})$-значную функцию $\lambda \mapsto e^x_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ называют *спектральной функцией* или *характеристикой элемента x*.

10.1.6. Пусть E — алгебра над полем $\mathbb{F}$, наделенная таким отношением порядка, что E можно рассматривать как упорядоченное векторное пространство, конус положительных элементов которого замкнут относительно умножения. Тогда E называют *упорядоченной алгеброй* над полем $\mathbb{F}$ или, короче, *упорядоченной* $\mathbb{F}$*-алгеброй*. Можно сказать, что упорядоченная алгебра — это алгебраическая система E, сигнатура которой содержит символы $+$, 0, $\leqslant$, $\cdot$ и λ, где λ пробегает множество элементов поля $\mathbb{F}$, обозначая всякий раз одноместную операцию растяжения вектора в λ раз, причем соблюдены условия:

(1) E — упорядоченное векторное пространство;

(2) $(E, +, \mathbb{0}, \leqslant, \cdot\,)$ — упорядоченное кольцо.

Будем говорить, что E — *решеточно упорядоченная алгебра* (*f-алгебра*), если E — упорядоченная алгебра и соответствующее упорядоченное кольцо решеточно упорядочено (является f-кольцом). *Точной* называют такую f-алгебру, в которой для любых двух элементов x и y из $x \cdot y = 0$ следует $x \perp y$. Нетрудно показать, что f-алгебра является точной в том и только в том случае, если в ней нет ненулевых нильпотентных элементов. Точность f-алгебры равносильна также отсутствию в ней строго положительных элементов с нулевым квадратом.

10.1.7. *Комплексной векторной решеткой* принято называть *комплексификацию* $E_{\mathbb{C}} := E \oplus iE$ вещественной векторной решетки E, где, как обычно, символ i обозначает *мнимую* единицу. В это определение часто включают дополнительное требование существования *модуля*

$$|z| := \sup\{\mathrm{Re}(e^{i\theta} z) : 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$$

у любого элемента $z \in E \oplus iE$. Легко сформулировать требования к E, обеспечивающие автоматическое наличие модуля в $E \oplus iE$. Например, достаточно считать, что E — это K-пространство (или хотя бы K_σ-пространство). Таким образом, *комплексное K-пространство* — комплексификация вещественного K-пространства. Говоря о порядковых свойствах комплексной векторной решетки $E \oplus iE$, имеют в виду ее вещественную часть E. Понятия подрешетки, идеала, компоненты, проектора и т. п. естественно распространяются на случай комплексной векторной решетки путем надлежащей комплексификации и с использованием указанного выше модуля. Подробности см. в книге Х. Шефера [367].

10.1.8. Отношение порядка в векторной решетке порождает разные виды сходимости сетей и последовательностей. Пусть $(\mathrm{A}, \leqslant)$ — направленное множество. Сеть $(x_\alpha) := (x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ в E называют *возрастающей* (*убывающей*), если $x_\alpha \leqslant x_\beta$ (соответственно $x_\beta \leqslant x_\alpha$) при $\alpha \leqslant \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathrm{A})$. Будем говорить, что сеть (x_α) в векторной решетке E *порядково сходится* или *o-сходится* к $x \in E$, если существует убывающая сеть $(e_\beta)_{\beta \in \mathrm{B}}$ в E такая, что $\inf\{e_\beta : \beta \in \mathrm{B}\} = 0$, и для каждого $\beta \in \mathrm{B}$ существует индекс $\alpha(\beta) \in \mathrm{A}$, для которого $|x_\alpha - x| \leqslant e_\beta$ при всех $\alpha(\beta) \leqslant \alpha \in \mathrm{A}$. В этом случае элемент x называют *порядковым пределом* или *o-пределом* сети (x_α) и пишут $x = o\text{-}\lim_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha$ или $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$. Если сеть (x_α) убывает (возрастает) и o-сходится к x, то принято писать $x_\alpha \downarrow x$ (соответственно $x_\alpha \uparrow x$).

Если в этом определении сеть (e_β) заменить последовательностью $(\lambda_n e)_{n \in \mathbb{N}}$, где $0 \leqslant e \in E^+$, а $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — числовая последовательность с пределом $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$, то говорят, что сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *сходится с регулятором*, или, более точно, *сходится с регулятором* e к $x \in E$. Элементы e и x называют соответственно *регулятором сходимости* и *r-пределом* сети (x_α). При этом используют обозначения $x = r\text{-}\lim_{\alpha\in \mathrm{A}} x_\alpha$ и $x_\alpha \xrightarrow{(r)} x$.

Сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ называют o-фундаментальной (r-фундаментальной с регулятором e), если сеть $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{A}\times\mathrm{A}}$ o-сходится (соответственно r-сходится с регулятором e) к нулю. Векторную решетку называют *полной* относительно сходимости с регулятором или *r-полной*, если каждая r-фундаментальная последовательность в ней r-сходится.

Наличие порядковой сходимости в векторной решетке позволяет определить также сумму бесконечного семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Действительно, взяв $\theta := \{\xi_1,\dots,\xi_n\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$, положим $y_\theta := x_{\xi_1} + \ldots + x_{\xi_n}$. Тем самым возникает сеть $(y_\theta)_{\theta\in\Theta}$, где множество конечных подмножеств $\Theta := \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ упорядочено по включению. Если существует o-предел $x := o\text{-}\lim_{\theta\in\Theta} y_\theta$, то семейство (x_ξ) называют *порядково суммируемым* или *o-суммируемым.* Элемент x называют при этом *o-суммой* семейства (x_ξ) и пишут $x = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi$. Очевидно, если $x_\xi \geqslant 0$ ($\xi \in \Xi$), то для существования o-суммы семейства (x_ξ) необходимо и достаточно, чтобы существовала точная верхняя граница сети $(y_\theta)_{\theta\in\Theta}$. В этом случае $o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi = \sup_{\theta\in\Theta} y_\theta$. Если (x_ξ) — дизъюнктное семейство, то

$$o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi = \sup_{\xi\in\Xi} x_\xi^+ - \sup_{\xi\in\Xi} x_\xi^- .$$

10.1.9. K-пространство E будет *расширенным*, если в E любое непустое множество попарно дизъюнктных положительных элементов имеет супремум, см. 10.1.2. Для экономии места ограничимся вещественным случаем (за исключением примера (4)). Ключевой пример функционального K-пространства будет разобран в 10.5. Перечислим другие важные примеры расширенных K-пространств.

(1) Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой (см. 2.3.6.). Пространство классов эквивалентных почти всюду конечных измеримых функций на Ω с операциями и порядком, естественным образом индуцированными из $\mathbb{R}^\Omega$, обозначают через $M(\Omega,\Sigma,\mu)$ или $L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$. Измеримые функции f и g считают эквивалентными, если $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq g(\omega)\}$ — множество меры нуль. Пространство $L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ является не только векторной решеткой, но и расширенным K_σ-пространством. Векторная решетка $L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ будет расширенным K-пространством в том и только в том случае, когда пространство с мерой (Ω,Σ,μ) обладает свойством прямой суммы (см. 2.3.7). База K-пространства $L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ изоморфна алгебре измеримых множеств по модулю множеств нулевой меры (см. 2.3.6).

(2) Пусть Q — топологическое пространство. Обозначим символом $\mathscr{B}or(Q,\mathbb{R})$ множество всех борелевских функций из Q в $\mathbb{R}$ с поточечными операциями суммы и произведения, а также с поточечным отношением порядка. Ясно, что $\mathscr{B}or(Q,\mathbb{R})$ — это K_σ-пространство.

Обозначим через N множество таких борелевских функций $f \in \mathscr{B}or(Q,\mathbb{R})$, что $\{t \in Q : f(t) \neq 0\}$ — тощее множество (т. е. множество первой категории). Пусть $\mathrm{Bor}(Q,\mathbb{R})$ — фактор-пространство $\mathscr{B}or(Q,\mathbb{R})/N$ с индуцированными из $\mathscr{B}or(Q,\mathbb{R})$ операциями и порядком. Тогда $\mathrm{Bor}(Q,\mathbb{R})$ — это расширенное K-пространство, база которого изоморфна булевой алгебре борелевских подмножеств Q по модулю множеств первой категории (см. 2.3.4). Оба пространства

$\mathscr{B}or(Q, \mathbb{R})$ и $\mathrm{Bor}(Q, \mathbb{R})$ являются точными f-алгебрами. Заменив $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$, мы получим комплексное K-пространство $\mathrm{Bor}(Q, \mathbb{C})$.

(3) Пусть теперь $\mathrm{LSC}(Q)$ — множество (классов эквивалентности) полунепрерывных снизу функций $f : Q \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ таких, что $f^{-1}(-\infty)$ нигде не плотно, а внутренность множества $f^{-1}([-\infty, \infty))$ плотна в Q. Как и в (2), две функции считают эквивалентными, если их значения различаются лишь на тощем множестве. Сумму $f + g$ (произведение $f \cdot g$) элементов $f, g \in \mathrm{LSC}(Q)$ определим как полунепрерывную снизу регуляризацию поточечной суммы $t \mapsto f(t) + g(t)$ $(t \in Q_0)$ (поточечного произведения $t \mapsto f(t) \cdot g(t)$ $(t \in Q_0)$), где Q_0 — плотное подмножество Q, на котором конечны f и g. Тем самым $\mathrm{LSC}(Q)$ превращается в расширенное K-пространство и f-алгебру, причем база $\mathrm{LSC}(Q)$ изоморфна алгебре регулярных открытых множеств $\mathrm{RO}\,(Q)$ (см. 2.3.3). В частности, базы K-пространств $\mathrm{Bor}(Q, \mathbb{R})$ и $\mathrm{LSC}(Q)$ изоморфны в случае бэровского Q.

(4) Пусть H — комплексное гильбертово пространство и A — сильно замкнутая коммутативная алгебра самосопряженных ограниченных операторов в H. Обозначим $\mathfrak{P}(A)$ множество всех ортопроекторов в H, входящих в алгебру A (см. 2.3.8). Пусть A_∞ — множество всех плотно определенных самосопряженных операторов a в H таких, что спектральная функция $\lambda \mapsto e_\lambda^a$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ оператора a принимает свои значения в полной булевой алгебре $\mathfrak{P}(A)$. Пусть $\overline{A}_\infty$ — множество плотно определенных нормальных операторов a в H таких, что если $a = u|a|$ — полярное разложение a, то $|a| \in A_\infty$. В множества A_∞ и $\overline{A}_\infty$ естественно вводят структуру упорядоченного векторного пространства. Так, для a и $b \in A_\infty$ сумму $a + b$ и произведение $a \cdot b$ определяют как единственные самосопряженные расширения операторов $h \mapsto ah + bh$ и $h \mapsto a \cdot bh$ $(h \in \mathrm{dom}(a) \cap \mathrm{dom}(b))$, где $\mathrm{dom}(c)$ — область определения c. Кроме того, для $a \in A_\infty$ полагают $a \geqslant 0$ в том и только в том случае, если $\langle ah, h \rangle \geqslant 0$ для всех $h \in \mathrm{dom}(a)$. Операции и порядок в $\overline{A}_\infty$ получают путем комплексификации A_∞.

Множества A_∞ и $\overline{A}_\infty$ с указанными операциями и порядком представляют расширенное K-пространство и комплексное расширенное K-пространство с базой единичных элементов $\mathfrak{P}(A)$. При этом A — это K-пространство ограниченных элементов в A_∞.

10.2. Порядково ограниченные операторы

В этом параграфе будет изложена принципиальная схема порядкового исчисления операторов в векторных решетках и введены нужные нам для дальнейшего классы порядково ограниченных операторов.

10.2.1. Пусть E и F — векторные решетки над одним и тем же упорядоченным полем $\mathbb{F}$. Линейный оператор $T : E \to F$ называют: *положительным*, если $T(E^+) \subset F^+$; *регулярным*, если он допускает представление в виде разности двух положительных операторов; наконец, *порядково ограниченным* или *o-ограниченным*, если образ всякого o-ограниченного подмножества E относительно T есть o-ограниченное подмножество F. Говорят, что оператор $S \in L(E, F)$ является *мажорантой* оператора $T \in L(E, F)$, если $|Tx| \leqslant S(|x|)$ при всех $x \in E$. Оператор, имеющий положительную мажоранту, называют *мажорируемым*. Положительный оператор $T : E \to F$ служит мажорантой самого себя, т. е. $|Tx| \leqslant T(|x|)$ $(x \in E)$.

(1) *Линейный оператор, действующий в векторных решетках, мажорируем в том и только в том случае, когда он регулярен.*

$\lhd$ Действительно, если S — мажоранта T, то $T = S-(S-T)$, причем операторы $(S-T)$ и S положительны. Если же $T = S-R$ для некоторых положительных $S, R \in L(E,F)$, то $\pm Tx \leqslant |Sx| + |Rx| \leqslant (S+R)(|x|)$, т. е. $S+R$ будет мажорантой T. $\rhd$

Множества всех регулярных, порядково ограниченных и положительных операторов из E в F обозначают соответственно символами $L^r(E,F)$, $L^\sim(E,F)$ и $L^+(E,F) := L^\sim(E,F)^+$. Классы $L^r(E,F)$ и $L^\sim(E,F)$ являются векторными подпространствами векторного пространства $L(E,F)$ всех линейных операторов из E в F. Отношение порядка в пространствах регулярных и порядково ограниченных операторов вводят с помощью конуса положительных операторов $L^+(E,F)$, т. е. формулами $T \geqslant 0 \leftrightarrow T \in L^+(E,F)$ и $S \geqslant T \leftrightarrow S - T \geqslant 0$.

(2) *Регулярный оператор, действующий в векторных решетках, порядково ограничен.*

$\lhd$ Ясно, что каждый положительный оператор порядково ограничен. Значит, требуемое следует из (1). $\rhd$

Обратное к (2) утверждение в общем случае неверно, но справедливо в условиях порядковой полноты F. Последнее следует непосредственно из следующего основополагающего факта, в силу которого порядково ограниченный оператор S допускает представление $S = S^+ - S^-$, см. 8.4.3 (1). Всюду ниже полагаем $\mathbb{F} := \mathbb{R}$.

10.2.2. Теорема Рисса — Канторовича. *Пусть E — векторная решетка, а F — некоторое K-пространство. Тогда множество всех порядково ограниченных операторов $L^\sim(E,F)$, упорядоченное конусом положительных операторов $L^+(E,F)$, является K-пространством.*

$\lhd$ Несложное доказательство имеется, например, у К. Алипрантиса и О. Бёркиншо [185, теорема 1.13], Б. З. Вулиха [35, теорема VIII.2.1], А. Г. Кусраева [107, теорема 3.1.2], Г.-У. Шварца [370, теорема 5.12, предложение 5.15], Х. Шефера [367, предложения 1.2 и 1.3]. $\rhd$

10.2.3. Теорема Рисса — Канторовича предоставляет естественные формулы для представления решеточных операций в $L^\sim(E,F)$ посредством поточечных вычислений. Если E и F те же, что и выше, то для любых $x \in E^+$, $S, T \in L^\sim(E,F)$ и порядково ограниченного множества $\mathscr{T} \subset L^\sim(E,F)$ имеют место следующие формулы:

(1) $(S \vee T)x = \sup\{Sx_1 + Tx_2 :\ x_1, x_2 \geqslant 0, x = x_1 + x_2\}$;

(2) $(S \wedge T)x = \inf\{Sx_1 + Tx_2 :\ x_1, x_2 \geqslant 0, x = x_1 + x_2\}$;

(3) $S^+x = \sup\{Sy :\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$;

(4) $S^-x = \sup\{Sy :\ -x \leqslant y \leqslant 0\} = -\inf\{Sy :\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$;

(5) $|S|x = \sup\{|Sy| :\ |y| \leqslant x\}$;

(6) $|S|x = \sup\big\{\sum_{k=1}^n |Sx_k| :\ x_1, \dots, x_n \geqslant 0,\ x = \sum_{k=1}^n x_k,\ n \in \mathbb{N}\big\}$;

(7) $|Sx| \leqslant |S|(|x|)$ $(x \in E)$;

(8) $(\sup \mathscr{T})x = \sup\big\{\sum_{k=1}^n T_k x_k :\ T_1, \dots, T_n \in \mathscr{T},\ x_1, \dots, x_n \in E^+,\ x = \sum_{k=1}^n x_k,\ n \in \mathbb{N}\big\}$;

(9) $(\inf \mathscr{T})x = \inf\big\{\sum_{k=1}^n T_k x_k :\ T_1, \dots, T_n \in \mathscr{T},\ x_1, \dots, x_n \in E^+,\ x = \sum_{k=1}^n x_k,\ n \in \mathbb{N}\big\}$.

Совокупность формул (1)–(9) (и ее аналоги) принято называть *исчислением порядково ограниченных операторов* или, короче, *порядковым исчислением.*

10.2.4. Формулы 10.2.3 (1–9) дают возможность найти значения искомого оператора только на конусе E^+. Этого на самом деле достаточно, как видно из следующего вспомогательного утверждения, часто используемого в теории порядково ограниченных операторов.

Пусть E — векторная решетка, F — произвольное вещественное векторное пространство и пусть U — аддитивное и положительно однородное отображение из E^+ в F, т. е.

$$U(x+y) = Ux + Uy, \quad U(\lambda x) = \lambda Ux \quad (0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R};\ x, y \in E^+).$$

Тогда U имеет и притом единственное линейное продолжение T на всю векторную решетку E. Если, сверх того, F — векторная решетка и $U(E^+) \subset F^+$, то оператор T положителен.

$\lhd$ Единственность линейного продолжения очевидна из представления $x = x^+ - x^-$ (см. 8.4.3 (1)). Определим оператор T формулой $Tx := Ux^+ - Ux^-$ $(x \in E)$. Тогда T — искомое продолжение. В самом деле, для любого $z = x - y$, где $x, y \in E^+$, будет $z^+ - z^- = x - y$, или $z^+ + y = x + z^-$. Следовательно, из условия аддитивности U можно заключить, что $Uz^+ + Uy = Ux + Uz^-$. Поэтому $Tz = Uz^+ - Uz^- = Ux - Uy = Tx - Ty$. Теперь, учитывая доказанное, для произвольных $x, y \in E$ можно написать

$$Tx + Ty = (Tx^+ - Tx^-) + (Ty^+ - Ty^-) = T(x^+ + y^+ - x^- - y^-) = T(x+y)$$

и, стало быть, T аддитивен на E. В частности, $T(-x) = -Tx$ для любого $x \in E$, что вместе с положительной однородностью U влечет однородность T. $\rhd$

10.2.5. Оператор $T : E \to F$ называют *порядково непрерывным* (*порядково σ-непрерывным*), если сеть (Tx_α) порядково сходится к Tx для любой сети $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ (любой последовательности $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$) в E, порядково сходящейся к x. Множество всех порядково непрерывных регулярных операторов (всех порядково σ-непрерывных регулярных операторов) с индуцированной из $L^\sim(E,F)$ векторной и порядковой структурой обозначают символом $L_n^\sim(E,F)$ (соответственно $L_{n\sigma}^\sim(E,F)$). Если $F = \mathbb{R}$, то вместо $L_n^\sim(E,\mathbb{R})$ используют обозначение $E_n^\sim$.

(1) *Положительный оператор $T \in L^\sim(E,F)$ порядково непрерывен (порядково σ-непрерывен) в том и только в том случае, когда $Tx_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$ для каждой убывающей сети (последовательности) (x_α) в E такой, что $\inf_\alpha x_\alpha = 0$.*

$\lhd$ Пусть оператор $0 \leqslant T \in L^\sim(E,F)$ удовлетворяет указанному условию, а сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ порядково сходится к $x \in E$. Тогда существует убывающая к нулю сеть $(e_\beta)_{\beta \in \mathrm{B}}$, удовлетворяющая условию: для каждого $\beta \in \mathrm{B}$ найдется $\alpha(\beta) \in \mathrm{A}$ такой, что $|x_\alpha - x| \leqslant e_\beta$ при всех $\alpha(\beta) \leqslant \alpha \in \mathrm{A}$ (см. 10.1.8). Из положительности T вытекает $|Tx_\alpha - Tx| \leqslant T(|x_\alpha - x|) \leqslant Te_\beta$. По условию сеть $(Te_\beta)_{\beta \in \mathrm{B}}$ убывает к нулю. Следовательно, $o\text{-}\lim Tx_\alpha = Tx$ согласно определению из 10.1.8. Обратное утверждение очевидно. Аналогично рассматривается случай порядково σ-непрерывного оператора. $\rhd$

(2) *Пространства операторов $L_n^\sim(E,F)$ и $L_{n\sigma}^\sim(E,F)$ являются компонентами $L^\sim(E,F)$.*

$\lhd$ См. книги К. Алипрантиса и О. Бёркиншо [185, теорема 4.4], Б. З. Вулиха [35, теоремы VIII.4.3 и VIII.4.3], А. Г. Кусраева [107, теорема 3.2.3 (2)]. $\rhd$

10.2.6. Линейный оператор $T : E \to F$ называют *решеточным гомоморфизмом*, если выполнено одно из следующих соотношений (и в этом случае имеют место все остальные из этих соотношений):

$$T(x \vee y) = Tx \vee Ty \quad (x, y \in E),$$
$$T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty \quad (x, y \in E),$$
$$x \wedge y = 0 \ \to \ Tx \wedge Ty = 0 \quad (x, y \in E),$$
$$T(x^+) = (Tx)^+ \quad (x \in E),$$
$$T(|x|) = |Tx| \quad (x \in E).$$

Как видно, решеточный гомоморфизм сохраняет супремумы и инфимумы непустых конечных множеств, а также модуль, положительную и отрицательную части любого элемента. Инъективный решеточный гомоморфизм называют *решеточным* (точнее, *порядковым*) *мономорфизмом*, *изоморфным вложением* и даже *решеточным изоморфизмом* E в F. Если решеточный гомоморфизм $T : E \to F$ является биекцией, то говорят, что E и F *решеточно* (или *порядково*) *изоморфны* или что T осуществляет *порядковый изоморфизм* между E и F. Множество всех решеточных гомоморфизмов из E в F обозначают символом $\mathrm{Hom}(E, F)$. Говорят, что линейный оператор $T : E \to F$ *сохраняет дизъюнктность*, если $Tx \perp Ty$ при $x \perp y$. Как видно, решеточный гомоморфизм сохраняет дизъюнктность, а положительный оператор сохраняет дизъюнктность тогда и только тогда, когда он является решеточным гомоморфизмом.

10.2.7. Рассмотрим векторную решетку E и некоторую ее подрешетку $D \subset E$. Говорят, что линейный оператор T из D в E *сохраняет компоненты* или является *нерасширяющим*, если имеет место одно (а тогда и любое) из следующих соотношений:

$$Te \in \{e\}^{\perp\perp} \quad (e \in D),$$
$$e \perp f \ \to \ Te \perp f \quad (e \in D,\, f \in E),$$
$$T(K \cap D) \subset K \quad (K \in \mathfrak{B}(E)),$$

где дизъюнктные дополнения вычислены в E. Нерасширяющий оператор может не быть порядково ограниченным (см. ниже 10.7). Если π — порядковый проектор в E, то его ограничение на фундамент $D \subset E$, обозначаемое той же буквой π, является, конечно, порядковым проектором в D.

Пусть E — векторная решетка с главными проекциями, а T — линейный оператор из фундамента $D \subset E$ в E. Тогда следующие утверждения равносильны:

(1) *оператор T нерасширяющий*;

(2) $T\pi = \pi T\pi$ $(\pi \in \mathfrak{P}(E))$;

(3) $\pi T = \pi T\pi$ $(\pi \in \mathfrak{P}(E))$;

(4) $\pi T = T\pi$ $(\pi \in \mathfrak{P}(E))$.

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Предположим, что T — нерасширяющий оператор и возьмем произвольный порядковый проектор $\pi \in \mathfrak{P}(E)$. Если $K := \pi(E)$, то имеет место включение $T(K \cap D) \subset K$, из которого следует $T\pi x = \pi T\pi x$ для всех $x \in D$.

(2) $\to$ (3): Заменив в (2) π на $\pi^\perp$, мы приходим к соотношению $\pi Tx = \pi T\pi x$ $(x \in D)$.

(3) $\to$ (4): Точно так же, т. е. заменой π на $\pi^\perp$, из (3) выводится (2). Таким образом, (3) и (2) выполнены одновременно. Следовательно, $\pi T = T\pi$.

(4) $\to$ (1): Если выполнено (4) и $x \in K \cap D$ для некоторой компоненты $K \subset E$, то для порядкового проектора π на компоненту $\{x\}^{\perp\perp}$ будет $Tx = T\pi x = \pi Tx$, т. е. $Tx \in \pi(E) = \{x\}^{\perp\perp}$. Но $\{x\}^{\perp\perp} \subset K$ и поэтому $Tx \in K$. $\triangleright$

10.2.8. Множество всех порядково ограниченных нерасширяющих операторов из D в некоторую векторную подрешетку $D' \subset E$ обозначают символом $\mathrm{Orth}(D, D')$. Порядково ограниченный нерасширяющий оператор $\alpha : D \to E$, определенный на фундаменте $D \subset E$, именуют *расширенным ортоморфизмом* в E. Перечислим некоторые свойства ортоморфизмов. Подробности можно найти в книгах К. Алипрантиса и О. Бёркиншо [185], А. Г. Кусраева [107], В. Люксембурга и А. Цаанена [297].

(1) *Множество всех расширенных ортоморфизмов* $\mathrm{Orth}(D, E)$, *определенных на фиксированном порядково плотном идеале* D, *является векторной решеткой, причем решеточные операции в* $\mathrm{Orth}(D, E)$ *можно вычислять поточечно*:

$$(S \vee T)x = Sx \vee Tx, \quad (S \wedge T)x = Sx \wedge Tx \quad (x \in D^+).$$

В частности, расширенный ортоморфизм регулярен.

(2) *Каждый расширенный ортоморфизм в векторной решетке порядково непрерывен.*

(3) *Расширенные ортоморфизмы коммутируют.*

(4) *Если* E *— порядково полная векторная решетка, то* $\mathrm{Orth}(E) := \mathrm{Orth}(E, E)$ *совпадает с компонентой* $L^{\sim}(E)$, *порожденной тождественным оператором в* E.

(5) *Ядро расширенного ортоморфизма* $T \in \mathrm{Orth}(D, E)$ *является компонентой* D. *Если два расширенных ортоморфизма из* $\mathrm{Orth}(D, E)$ *совпадают на некотором подмножестве, то они совпадают на компоненте, порожденной этим множеством.*

10.2.9. Теперь можно определить пространство всех расширенных ортоморфизмов $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$ на векторной решетке E. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех пар (D, π), где D — фундамент E и $\pi \in \mathrm{Orth}(D, E)$. Элементы (D, π) и (D', π') в $\mathfrak{M}$ называют эквивалентными (в символах $(D, \pi) \sim (D', \pi')$), если ортоморфизмы π и π' совпадают на пересечении $D \cap D'$. Такое отношение в $\mathfrak{M}$ действительно будет эквивалентностью из-за 10.2.8 (2). Фактор-множество $\mathfrak{M}/\!\sim$ обозначают $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$. Множество $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$ относительно поточечного сложения, скалярного умножения и решеточных операций становится векторной решеткой. Это утверждение легко обосновать, привлекая 10.2.8 (2), так как множества $\mathrm{Orth}(D, E)$ являются векторными решетками. Элемент $\alpha \in \mathrm{Orth}^{\infty}(E)$, определенный на всем пространстве E, называют *ортоморфизмом.* Множество всех ортоморфизмов в E обозначают символом $\mathrm{Orth}(E)$.

В векторной решетке $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$ можно ввести структуры решеточно упорядоченной алгебры, используя для этой цели композицию. В самом деле, если (π, D_π) и (ρ, D_ρ) входят в $\mathfrak{M}$, то идеал $\pi^{-1}(D_\rho)$ будет фундаментом E и произведение $(\sigma, D_\sigma) := (\pi, D_\pi)(\rho, D_\rho)$ можно определить, полагая $D_\sigma := \pi^{-1}(D_\rho)$ и $\sigma x := \rho(\pi x)$. Так как решеточные операции в $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$ вычисляются поточечно на E^+, легко понять, что $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$ будет f-алгеброй.

Пусть $\mathscr{Z}(E)$ — это o-идеал, порожденный тождественным оператором I_E в $L^{\sim}(E)$. Пространство $\mathscr{Z}(E)$ часто называют *идеальным центром* векторной решетки E. Будем считать, что $\mathscr{Z}(E) \subset \mathrm{Orth}(E) \subset \mathrm{Orth}^{\infty}(E)$, сопоставив каждому ортоморфизму $\pi \in \mathrm{Orth}(E)$ соответствующий ему класс эквивалентности в $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$.

10.2.10. Пусть E и F — векторные решетки, причем F порядково полна. Рассмотрим положительный оператор $S : G \to F$, определенный на идеале $G \subset E$. Обозначим через $\mathscr{D}_m(T)$ множество таких $e \in E$, что множество $S([0,|e|] \cap G)$, где $[0,|e|] := \{x \in E : 0 \leqslant x \leqslant |e|\}$, порядково ограничено в F. Легко видеть, что $\mathscr{D}_m(T)$ — идеал E, и на нем можно определить

$$\widetilde{S}e := \sup\{Sg : \ g \in G,\, 0 \leqslant g \leqslant e\} := \sup\{S(g \wedge e) : \ g \in G\} \quad (e \in \mathscr{D}_m(T)^{+}).$$

Оператор $\widetilde{S} : E^{+} \to F$ аддитивен и положительно однороден. Стало быть, его можно продолжить на все $\mathscr{D}_m(T)$, как в 10.2.4. Полученный оператор, называемый *минимальным продолжением* оператора S на $\mathscr{D}_m(T)$, мы обозначим тем же символом $\widetilde{S}$.

(1) *Минимальное продолжение $\widetilde{S}$ — положительный оператор, совпадающий с S на идеале G и обращающийся в нуль на его дизъюнктном дополнении $G^{\perp} \subset \mathscr{D}_m(T)$.*

$\lhd$ Следует непосредственно из определения минимального продолжения. $\rhd$

(2) *Если положительный оператор S (секвенциально) порядково непрерывен, то его минимальное продолжение $\widetilde{S}$ также (секвенциально) порядково непрерывно.*

$\lhd$ Убедимся, что $\widetilde{S}$ — порядково непрерывный оператор, если таковым является S. Возьмем возрастающую сеть $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ в E^{+} с точной верхней границей $e := \sup_\alpha e_\alpha$. Тогда в силу порядковой непрерывности S и ассоциативности точных верхних границ можно написать

$$\sup_\alpha \widetilde{S}(e_\alpha) = \sup_\alpha \sup\{S(g \wedge e_\alpha : \ g \in G\} =$$
$$= \sup\{\sup_\alpha S(g \wedge e_\alpha) : \ g \in G\} = \sup\{S(g \wedge e) : \ g \in G\} = \widetilde{S}(e).$$

Значит, $\widetilde{S}(e_\alpha) \nearrow \widetilde{S}(e)$. Если же $e_\alpha \searrow 0$, то, заменив, если необходимо, e_α на $e_\alpha \wedge e_{\alpha_0}$ для некоторого фиксированного $\alpha_0 \in \mathrm{A}$, из доказанного выводим $\widetilde{S}(e_{\alpha_0} - e_\alpha) \nearrow \widetilde{S}(e_{\alpha_0})$, откуда $\widetilde{S}(e_\alpha) \searrow 0$. Аналогично рассматривается случай последовательностей. $\rhd$

10.2.11. *Нулевым идеалом* оператора $T \in L^{\sim}(E,F)$ именуют множество

$$\mathscr{N}_T := \mathscr{N}(T) := \{x \in E : \ |T|(|x|) = 0\},$$

которое и в самом деле является порядковым идеалом. Дизъюнктное дополнение нулевого идеала $\mathscr{N}(T)^{\perp}$ называют *носителем* оператора T и обозначают символом $\mathscr{C}_T$. Нулевой идеал является фундаментом $\mathscr{C}_T^{\perp}$. Следовательно, порядково непрерывный оператор T обращается в нуль на всей компоненте $\mathscr{C}_T^{\perp}$, т. е. нулевой идеал является компонентой. В этой ситуации носитель оператора называют также *компонентой существенной положительности.* В том случае, когда $\mathscr{N}(T)^{\perp} = E$, говорят, что T — *существенно положительный оператор.*

Если носители порядково ограниченных операторов дизъюнктны, то дизъюнктны сами эти операторы. Обратное утверждение в общем случае неверно, но имеет место для порядково непрерывных функционалов.

Два порядково непрерывных функционала $f, g \in L^{\sim}(E, \mathbb{R})$, определенные на K_σ-пространстве E, дизъюнктны в том и только в том случае, когда дизъюнктны их компоненты существенной положительности: $f \perp g \leftrightarrow \mathscr{C}_f \perp \mathscr{C}_g$.

$\lhd$ Доказательство см. у Б. З. Вулиха [35]. $\rhd$

10.3. Теорема Гордона

В этом параграфе будет установлено, что изображение поля вещественных чисел в булевозначной модели представляет собой расширенное пространство Канторовича. Этот замечательный факт позволяет по-новому взглянуть на такой древний объект математики, как числовая прямая.

10.3.1. Под *полем вещественных чисел* $\mathbb{R}$ мы понимаем алгебраическую систему, на которой выполнены аксиомы архимедова упорядоченного поля (с различными нулем и единицей) и аксиома полноты. Поле $\mathbb{R}$ определено с точностью до изоморфизма, причем изоморфная копия может быть построена отправляясь от множества натуральных чисел $\mathbb{N} := \omega \setminus \{0\}$. Рассмотрим также кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. В силу принципа переноса все построения, приводящие к этим объектам, могут быть осуществлены в любой булевозначной модели. Выясним, что при этом получается.

Имеют место следующие утверждения:

(1) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathbb{N}^\wedge$ — *множество натуральных чисел*»;

(2) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathbb{Z}^\wedge$ — *кольцо целых чисел*»;

(3) $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathbb{Q}^\wedge$ — *поле рациональных чисел*».

$\lhd$ В силу принципов переноса и максимума существуют такие элементы $\mathscr{N}$, $\mathscr{Z}$, $\mathscr{Q} \in \mathbb{V}^{(B)}$, что $[\![\mathscr{N}$ — множество натуральных чисел$]\!] = [\![\mathscr{Z}$ — кольцо целых чисел$]\!] = [\![\mathscr{Q}$ — поле рациональных чисел$]\!] = \mathbb{1}$. Нужно показать, что

$$[\![\mathscr{N} = \mathbb{N}^\wedge]\!] = [\![\mathscr{Z} = \mathbb{Z}^\wedge]\!] = [\![\mathscr{Q} = \mathbb{Q}^\wedge]\!] = \mathbb{1}.$$

Мы уже знаем, что $[\![\aleph_0 = (\omega_0)^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Поэтому, учитывая эквивалентность определения $\mathbb{N} := \omega \setminus \{0\}$ ограниченной ZF-формуле, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ можно написать

$$\mathscr{N} = \aleph_0 \setminus \{0\} = \omega^\wedge \setminus \{0\} = (\omega \setminus \{0\})^\wedge = \mathbb{N}^\wedge.$$

Пусть $\bar{\omega} = \{\dots, -n, \dots, -1, 0\}$ — изоморфная копия ω с «обратным» порядком: $-n \leqslant -m \leftrightarrow m \leqslant n$. Тогда множество целых чисел можно определить как прямую сумму $\mathbb{Z} := \bar{\omega} + \mathbb{N}$. Так как прямая сумма (см. 2.5.4) и $\bar{\omega}$ заданы ограниченными формулами, то, как и выше, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ можно написать:

$$\mathscr{Z} = \overline{\aleph_0} + \mathscr{N} = \mathscr{Z} = \overline{\omega^\wedge} + \mathbb{N}^\wedge = (\bar{\omega} + \mathbb{N})^\wedge = \mathbb{Z}^\wedge.$$

Определим, наконец, множество рациональных чисел как фактор-множество $\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{N}/{\sim}$, где класс эквивалентности пары (m, n) изображает рациональное число m/n, а эквивалентность пар (m, n) и (m', n') означает,что $mn' = nm'$. Это определение также можно записать ограниченной формулой и поэтому внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ мы получим:

$$\mathscr{Q} = \mathscr{Z} \times \mathscr{N}/{\sim} = \mathbb{Z}^\wedge \times \mathbb{N}^\wedge/{\sim} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}/{\sim})^\wedge = \mathbb{Q}^\wedge.$$

Из тех же соображений следует, что равенство множеств $\mathscr{Q} = \mathbb{Q}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ можно воспринимать и как совпадение соответствующих алгебраических систем, так как аксиомы кольца и поля выражены ограниченными формулами. $\triangleright$

10.3.2. Пусть $\mathbb{R}$ — линейно упорядоченное поле вещественных чисел, а $\mathbb{R}^\wedge$ — его образ при каноническом вложении класса всех множеств в универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. 4.2.7). Так как $\mathbb{R}$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma := (+, \cdot, 0, 1, \leqslant)$, то по следствию 7.4.5 $\mathbb{R}^\wedge$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Более того, для всякой формулы $\varphi(u_0, \dots, u_{n-1})$ сигнатуры σ и для любых $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ выполняется $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ в том и только в том случае, если $\varphi(x_0^\wedge, \dots, x_{n-1}^\wedge)$ выполнено внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. В частности, в качестве φ можно взять аксиомы архимедова линейно упорядоченного поля. Следовательно, $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathbb{R}^\wedge$ — архимедово линейно упорядоченное поле, содержащее поле рациональных чисел». Однако нельзя утверждать, что $\mathbb{R}^\wedge$ — поле вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Дело в том, что полнота поля вещественных чисел не может быть выражена ограниченной ZF-формулой. Вот одна из эквивалентных формулировок аксиомы полноты:

$$(\forall A)\,(A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \varnothing \wedge \pi_{\leqslant}(A) \neq \varnothing \to (\exists\, x \in \mathbb{R})(x = \sup(A))),$$

т. е. всякое непустое множество вещественных чисел, имеющее верхнюю границу, имеет и точную верхнюю границу. В этой аксиоме квантор общности пробегает множество всех подмножеств множества $\mathbb{R}$. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в 10.7.

10.3.3. Напомним два известных утверждения.

(1) *Существует, и притом единственное с точностью до изоморфизма, поле вещественных чисел* $\mathbb{R}$.

(2) *Если* $\mathbb{P}$ *— архимедово упорядоченное поле, то найдется изоморфное вложение* h *поля* $\mathbb{P}$ *в* $\mathbb{R}$ *такое, что образ* $h(\mathbb{P})$ *есть подполе* $\mathbb{R}$*, содержащее подполе рациональных чисел. В частности,* $h(\mathbb{P})$ *плотно в* $\mathbb{R}$.

Применив последовательно принципы переноса и максимума к утверждению (1), найдем элемент $\mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $[\![\, \mathscr{R}$ — поле вещественных чисел $]\!] = \mathbb{1}$. Более того, для любого элемента $\mathscr{R}' \in \mathbb{V}^{(B)}$, такого что $[\![\, \mathscr{R}'$ — поле вещественных чисел $]\!] = \mathbb{1}$, справедливо равенство $[\![$ упорядоченные поля $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}'$ изоморфны $]\!] = \mathbb{1}$. Иными словами, в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ существует поле вещественных чисел $\mathscr{R}$, единственное с точностью до изоморфизма.

«Пропустив» утверждение (2) через принцип переноса, заключаем, что $[\![\, \mathbb{R}^\wedge$ изоморфно плотному подполю поля $\mathscr{R} \,]\!] = \mathbb{1}$. На этом основании мы будем считать в дальнейшем, что $\mathscr{R}$ — поле вещественных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$, причем $\mathbb{R}^\wedge$ — его плотное подполе, содержащее поле рациональных чисел $\mathbb{Q}^\wedge$. Легко видеть при этом, что элементы $0 := 0^\wedge$ и $1 := 1^\wedge$ — соответственно нулевой и единичный элементы поля $\mathscr{R}$.

Рассмотрим теперь спуск $\mathscr{R}{\downarrow}$ алгебраической системы $\mathscr{R}$ (см. 7.3.3). Иными словами, спуск несущего множества системы $\mathscr{R}$ мы рассматриваем вместе со спущенными операциями и порядком. Если алгебраические операции и порядок в $\mathscr{R}$ временно обозначить символами $\oplus$, $\odot$, $\circledleq$, а в $\mathscr{R}{\downarrow}$ — обычными символами $+, \cdot, \leqslant$, то определения сложения, умножения и отношения порядка на множестве $\mathscr{R}{\downarrow}$ в более подробной записи будут выглядеть следующим образом:

$$z = x + y \leftrightarrow [\![\, z = x \oplus y \,]\!] = \mathbb{1},$$
$$z = x \cdot y \leftrightarrow [\![\, z = x \odot y \,]\!] = \mathbb{1},$$
$$x \leqslant y \leftrightarrow [\![\, x \circledleq y \,]\!] = \mathbb{1}$$
$$(x,\ y,\ z \in \mathscr{R}{\downarrow}).$$

Умножение элементов $\mathscr{R}{\downarrow}$ на вещественные числа можно определить правилом:

$$y = \lambda x \leftrightarrow y = \lambda^{\wedge} \odot x \leftrightarrow [\![\, y = \lambda^{\wedge} \odot x \,]\!] = \mathbb{1} \quad (x, y \in \mathscr{R}{\downarrow},\ \lambda \in \mathbb{R}).$$

В дальнейшем, если не оговорено иное, мы используем общепринятые символы $+, \cdot, \leqslant$ при каждом удобном случае.

10.3.4. Теорема Гордона. *Пусть $\mathscr{R}$ — поле вещественных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Алгебраическая система $\mathscr{R}{\downarrow}$ (т. е. множество $|\mathscr{R}|{\downarrow}$ со спущенными операциями и порядком) есть расширенное K-пространство. При этом существует (канонический) изоморфизм χ булевой алгебры B на булеву алгебру порядковых проекторов $\mathfrak{P}(\mathscr{R}{\downarrow})$ (или единичных элементов $\mathfrak{E}(\mathscr{R}{\downarrow})$) такой, что имеют место эквивалентности*

$$\chi(b)x = \chi(b)y \leftrightarrow b \leqslant [\![x = y]\!],$$
$$\chi(b)x \leqslant \chi(b)y \leftrightarrow b \leqslant [\![x \leqslant y]\!]$$

для всех $x, y \in \mathscr{R}{\downarrow}$ и $b \in B$.

$\lhd$ Доказательство этого результата содержится, по сути дела, в 8.3.1 и 8.5.1. В самом деле, согласно 8.5.1 (2, 4) $\mathscr{R}{\downarrow}$ — расширенное и порядково полное f-кольцо с единицей $\mathbb{1} := 1^{\wedge}$. Отображение $\lambda \mapsto \lambda^{\wedge} \cdot 1$ является изоморфизмом поля $\mathbb{R}$ в $\mathscr{R}{\downarrow}$. Полагая $\lambda x := \lambda^{\wedge} x$ ($x \in \mathscr{R}{\downarrow},\ \lambda \in \mathbb{R}$), получим требуемую векторную структуру на $\mathscr{R}{\downarrow}$. Значит, $\mathscr{R}{\downarrow}$ — расширенное K-пространство. Булев изоморфизм $\jmath : B \to \mathscr{B}$, определенный в 8.3.1, обозначим буквой χ, имея в виду, что новое обозначение относится к случаю, когда $\mathscr{B}$ совпадает с булевой алгеброй порядковых проекторов решетки $\mathscr{R}{\downarrow}$. $\rhd$

10.3.5. *Расширенное K-пространство $\mathscr{R}{\downarrow}$ является точной f-алгеброй с кольцевой единицей $1 := 1^{\wedge}$. Более того, для любого $b \in B$ проектор $\chi(b)$ действует как оператор умножения на осколок единицы $\chi(b)1$.*

$\lhd$ Мультипликативная структура в $\mathscr{R}{\downarrow}$ была определена в 10.3.3. Как и в 10.3.4, можно установить, что $\mathscr{R}{\downarrow}$ — точная f-алгебра. Возьмем $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ и $b \in B$. По определению проектора $\chi(b)$ из 8.3.1 будет $b \leqslant [\![\, \chi(b)u = u \,]\!]$ и $b^* \leqslant [\![\, \chi(b^*)u = 0 \,]\!]$. Применив эти соотношения к $u := 1$ и пользуясь определением умножения в $\mathscr{R}{\downarrow}$, получим $b \leqslant [\![\, x = x \odot 1 = x \odot \chi(b)1 \,]\!]$ и $b^* \leqslant [\![\, 0 = x \odot 0 = x \odot \chi(b)1 \,]\!]$. Значит,

$$[\![\, \chi(b)x = x \odot \chi(b)1 \,]\!] \geqslant [\![\, \chi(b)x = x \,]\!] \wedge [\![\, x = x \odot \chi(b)1 \,]\!] \geqslant b.$$

Аналогичным образом $b^* \leqslant [\![\, \chi(b)x = \chi(b)1 \odot x \,]\!]$. Следовательно, $[\![\, \chi(b)x = x \odot \chi(b)1 \,]\!] = \mathbb{1}$. Теперь из определения умножения в $\mathscr{R}{\downarrow}$ (см. 10.3.3) выводим $\chi(b)x = \chi(b) \cdot x$. $\rhd$

Как видно из доказанного, отображение $b \mapsto \chi(b)1$ ($b \in B$) служит изоморфизмом булевых алгебр B и $\mathfrak{E}(\mathscr{R}{\downarrow})$. Этот изоморфизм мы будем обозначать той же буквой χ. Таким образом, в зависимости от контекста, отображение $x \mapsto \chi(b)x$ — либо порядковый проектор, либо оператор умножения на осколок единицы $\chi(b)$.

В дальнейшем $\mathscr{R}$ обозначает поле вещественных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Используя те же обозначения, что и в 10.3.4, выясним смысл точных границ и порядковых пределов в K-пространстве $\mathscr{R}{\downarrow}$.

10.3.6. *Пусть $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в B и $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство в $\mathscr{R}{\downarrow}$. Тогда*

$$\operatorname*{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi) = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi}\chi(b_\xi)x_\xi.$$

$\lhd$ Если $x := \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi)$, то $b_\xi \leqslant [\![\, x = x_\xi \,]\!]$ $(\xi\in\Xi)$ (см. 4.3.3). Согласно 10.3.4 $\chi(b_\xi)x_\xi = \chi(b_\xi)x$ при всех $\xi\in\Xi$. Суммируя последние равенства по ξ, мы приходим к требуемому. $\rhd$

10.3.7. *Для любого множества $A\subset\mathscr{R}{\downarrow}$ и произвольных элементов $a\in\mathscr{R}$ и $b\in B$ имеют место следующие эквивалентности:*

$$b\leqslant [\![\, a=\sup(A{\uparrow})\,]\!] \;\leftrightarrow\; \chi(b)a = \sup\chi(b)(A),$$
$$b\leqslant [\![\, a=\inf(A{\uparrow})\,]\!] \;\leftrightarrow\; \chi(b)a = \inf\chi(b)(A).$$

$\lhd$ Докажем только первую эквивалентность. Заметим прежде всего, что равенство

$$\chi(b)a = \sup\{\chi(b)x :\ x\in A\}$$

верно в том и только в том случае, когда выполнены два условия: $b\leqslant [\![\, x\leqslant a\,]\!]$ для всех $x\in A$ и для каждого $y\in\mathscr{R}{\downarrow}$ соотношение $(\forall\, x\in A)\,(b\leqslant [\![\, x\leqslant y\,]\!])$ влечет $b\leqslant [\![\, a\leqslant y\,]\!]$ (см. 10.3.4). Используя правила вычисления булевых оценок для кванторов (см. 4.1.7), можно представить указанные два условия в следующей эквивалентной форме:

$$b\leqslant [\![\,(\forall\, x\in A{\uparrow})\, x\leqslant a\,]\!],$$
$$b\leqslant [\![\,(\forall\, y\in\mathscr{R})\,(A{\uparrow}\leqslant y\to a\leqslant y)\,]\!].$$

При этом легко видеть, что полученная система из двух неравенств равносильна формуле $b\leqslant [\![\, a=\sup(A{\uparrow})\,]\!]$. $\rhd$

10.3.8. *Пусть A — направленное вверх множество и $s:\mathrm{A}\to\mathscr{R}{\downarrow}$ — сеть в $\mathscr{R}{\downarrow}$. Тогда элементы $\mathrm{A}^{\wedge}$ и $\sigma := s{\Uparrow} : \mathrm{A}^{\wedge}\to\mathscr{R}$ представляют собой направленное вверх множество и сеть в $\mathscr{R}$ (внутри $\mathbb{V}^{(B)}$), причем*

$$b\leqslant [\![\, x=\lim\sigma\,]\!] \leftrightarrow \chi(b)x = o\text{-}\lim\chi(b)\circ s$$

для любых $x\in\mathscr{R}{\downarrow}$ и $b\in B$.

$\lhd$ Утверждение «A — направленное вверх множество» можно записать ограниченной формулой. В силу ограниченного принципа переноса 4.2.9 (2) будет $\mathbb{V}^{(B)}\models$«$\mathrm{A}^{\wedge}$ — направленное вверх множество». Равенство $\chi(b)x = o\text{-}\lim\chi(b)\circ s$ означает, что существует сеть $d:\mathrm{A}\to\mathscr{R}{\downarrow}$, для которой совместна система условий:

$$\alpha\leqslant\beta\to d(\alpha)\leqslant d(\beta)\quad (\alpha,\beta\in\mathrm{A}),\qquad \inf_{\alpha\in\mathrm{A}} d(\alpha)=0,$$
$$|\chi(b)x-\chi(b)s(\alpha)|\leqslant d(\alpha)\quad (\alpha\in\mathrm{A}).$$

Учитывая легко проверяемую формулу $[\![\, s(\mathrm{A}){\uparrow} = \sigma(\mathrm{A}^{\wedge})\,]\!] = \mathbb{1}$ и полагая $\delta := d{\Uparrow}$, видим, что указанная система условий равносильна системе неравенств

$$
\begin{gathered}
b \leqslant [\![\inf \sigma(\mathrm{A}^{\wedge}) = 0]\!], \\
b \leqslant [\![(\forall\, \alpha, \beta \in \mathrm{A}^{\wedge})\, (\alpha \leqslant \beta \to \sigma(\alpha) \leqslant \sigma(\beta))]\!], \\
b \leqslant [\![(\forall\, \alpha \in \mathrm{A}^{\wedge})\, (|x - \sigma(\alpha)| \leqslant \delta(\alpha))]\!],
\end{gathered}
$$

короткая запись которых как раз и есть соотношение $b \leqslant [\![x = \lim \sigma]\!]$. $\triangleright$

10.3.9. *Пусть элементы* A *и* σ *из* $\mathbb{V}^{(B)}$ *таковы, что* $[\![\mathrm{A}$ — *направленное вверх множество и* $\sigma : \mathrm{A} \to \mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}$. *Тогда множество* $\mathrm{A}{\downarrow}$ *направленно вверх и* $s := \sigma{\downarrow} : \mathrm{A}{\downarrow} \to \mathscr{R}{\downarrow}$ — *сеть в* $\mathscr{R}{\downarrow}$. *При этом*

$$
b \leqslant [\![x = \lim \sigma]\!] \leftrightarrow \chi(b)x = o\text{-}\lim \chi(b) \circ s
$$

для любых $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ *и* $b \in B$.

$\triangleleft$ Доказательство аналогично 10.3.8. $\triangleright$

10.3.10. *Пусть* f — *отображение из непустого множества* Ξ *в* $\mathscr{R}{\downarrow}$ *и* $g := f{\uparrow}$. *Тогда*

$$
b \leqslant \left[\!\!\left[\, x = \sum_{\xi \in \Xi^{\wedge}} g(\xi) \,\right]\!\!\right] \leftrightarrow \chi(b)x = o\text{-}\sum_{\xi \in \Xi} \chi(b) f(\xi)
$$

для любых $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ *и* $b \in B$.

$\triangleleft$ Сначала заметим, что требуемая эквивалентность выполняется для конечного множества $\Xi_0 \subset \Xi$. Затем применим 10.3.8 к сети $s : \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi) \to \mathscr{R}{\downarrow}$, где $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ — множество всех конечных подмножеств Ξ и $s(\theta) := \sum_{\xi \in \theta} f(\xi)$. При этом нужно использовать соотношение $[\![\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)^{\wedge} = \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi^{\wedge})]\!] = \mathbb{1}$ (см. 5.1.9). $\triangleright$

10.3.11. *Для любого элемента* $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ *выполнены соотношения*:

$$
e_x := \chi([\![x \neq 0]\!]), \quad e_\lambda^x = \chi([\![x < \lambda^{\wedge}]\!]) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).
$$

$\triangleleft$ Действительное число t отлично от нуля в том и только в том случае, когда супремум числового множества $\{1 \wedge (n|t|) : n \in \omega\}$ равен 1. Следовательно, для $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ в силу принципа переноса будет $b := [\![x \neq 0]\!] = [\![1 = \sup A]\!]$, где $A \in \mathbb{V}^{(B)}$ определен формулой $A := \{1 \wedge (n|x|) : n \in \omega^{\wedge}\}$. Если $C := \{1 \wedge (n|x|) : n \in \omega\}$, то, используя вторую формулу из 5.4.2 и представление $\omega^{\wedge} = (\iota\omega){\uparrow}$ из 5.7.7, несложно видеть, что $[\![C{\uparrow} = A]\!] = \mathbb{1}$. Итак, $[\![\sup(A) = \sup(C{\uparrow})]\!] = \mathbb{1}$. Привлекая 10.3.7, выводим:

$$
b = [\![\sup(C{\uparrow}) = 1]\!] = [\![\sup(C) = 1]\!] = [\![e_x = 1]\!].
$$

В то же время

$$
[\![e_x = 0]\!] = [\![\sup(C) = 0]\!] = [\![\sup(C{\uparrow}) = 0]\!] = [\![\sup(A) = 0]\!] = [\![x = 0]\!] = b^*.
$$

Теперь в соответствии с 10.3.4 можно записать

$$
\chi(b)e_x = \chi(b)1 = \chi(b), \quad \chi(b^*)e_x = 0 \to \chi(b)e_x = e_x,
$$

откуда $\chi(b) = e_x$.

Возьмем $\lambda \in \mathbb{R}$ и положим $y := (\lambda 1 - x)^+$. Поскольку $[\![\lambda^{\wedge} = \lambda 1]\!] = \mathbb{1}$, то будет $[\![y = (\lambda^{\wedge} - x)^+]\!] = \mathbb{1}$. Следовательно, $e_\lambda^x = e_y = \chi([\![y \neq 0]\!])$. Осталось заметить, что внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ число $y = (\lambda^{\wedge} - x) \vee 0$ отлично от нуля тогда и только тогда, когда $\lambda^{\wedge} - x > 0$, т. е. $[\![y \neq 0]\!] = [\![x < \lambda^{\wedge}]\!]$. $\triangleright$

10.3.12. *Пусть $\mathscr{C}$ — поле комплексных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда алгебраическая система $\mathscr{C}{\downarrow}$ представляет собой комплексификацию K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$. В частности, $\mathscr{C}{\downarrow}$ — расширенное комплексное K-пространство и одновременно комплексная инволютивная алгебра с единицей $\mathbb{1} := 1^{\wedge}$.*

$\lhd$ Так как равенство $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ эквивалентно ограниченной формуле, то $[\![\, \mathbb{C}^{\wedge} = \mathbb{R}^{\wedge} \oplus i\mathbb{R}^{\wedge} \,]\!] = \mathbb{1}$ (см. 4.2.9 (2)), где i — мнимая единица поля $\mathbb{C}$ и элемент $i^{\wedge}$ обозначен той же буквой i. Из 10.3.3 видно, что $[\![\, \mathbb{C}^{\wedge}$ — плотное подполе в поле $\mathscr{C} \,]\!] = \mathbb{1}$ и, в частности, $[\![\, i$ — мнимая единица поля $\mathscr{C} \,]\!] = \mathbb{1}$. Если $z \in \mathscr{C}{\downarrow}$, то z — комплексное число внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Следовательно,

$$[\![\, (\exists !\, x \in \mathscr{R})(\exists !\, y \in \mathscr{R})\, z = x + iy \,]\!] = \mathbb{1}.$$

Принцип максимума влечет существование единственной пары элементов $x, y \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что

$$[\![\, x, y \in \mathscr{R} \,]\!] = [\![\, z = x + iy \,]\!] = \mathbb{1}.$$

Значит, $x, y \in \mathscr{R}{\downarrow}$, $z = x + iy$ и, стало быть, $\mathscr{C}{\downarrow} = \mathscr{R}{\downarrow} \oplus i\mathscr{R}{\downarrow}$. Ссылка на 10.3.4 и 8.1.4 завершает доказательство. $\rhd$

10.4. Булевозначная реализация векторных решеток

В текущем параграфе мы покажем, что архимедовы векторные решетки могут быть реализованы как подгруппы аддитивной группы вещественных чисел в подходящей булевозначной модели. С помощью такой реализации удается вывести основные структурные свойства векторных решеток.

10.4.1. Теорема. *Пусть X — архимедова векторная решетка с базой $B := \mathfrak{B}(X)$. Пусть $\mathscr{R}$ — поле вещественных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда существует линейный и решеточный изоморфизм $\imath$ из X в расширенное K-пространство $\mathscr{R}{\downarrow}$ такой, что выполнены условия*:

(1) *изоморфизм $\imath$ сохраняет точные границы непустых ограниченных множеств*;

(2) *порядковый идеал $J(\imath(X))$, порожденный множеством $\imath(X)$, служит фундаментом $\mathscr{R}{\downarrow}$*;

(3) *для любого $y \in J(\imath(X))$ справедливы равенства*

$$\inf\{\imath(x) :\, x \in X,\, \imath(x) \geqslant y\} = y = \sup\{\imath(x) :\, x \in X,\, \imath(x) \leqslant y\};$$

(4) *для $x \in X$ и $b \in B$ выполняется $b \leqslant [\![\imath(x) = 0]\!]$ в том и только в том случае, если $x \in b^{\perp}$.*

$\lhd$ В теореме 8.5.5 было установлено, что существуют подгруппа $\mathscr{X}$ аддитивной группы поля вещественных чисел $\mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(B)}$, а также аддитивный и решеточный изоморфизм $\imath := \imath_X$ из X в $\mathscr{X}{\downarrow}$. Пусть e — ненулевой положительный элемент группы $\mathscr{X}$. Заменяя в случае необходимости $\mathscr{X}$ на изоморфную ей группу $e^{-1}\mathscr{X}$, можно считать, что $e = 1 \in \mathscr{X}{\downarrow}$. Заметим, что $X^{\wedge}$ — векторное пространство над полем $\mathbb{R}^{\wedge}$. Нетрудно понять, что фактор-отображение $\pi := \pi_X : X^{\wedge} \to \mathscr{X}$ из 5.7.2 в этой ситуации будет $\mathbb{R}^{\wedge}$-линейным. В частности, $[\![\pi((\lambda x)^{\wedge}) = \lambda^{\wedge}\pi(x^{\wedge})]\!] = \mathbb{1}$ $(\lambda \in \mathbb{R},\, x \in X)$. Отсюда $[\![\imath(\lambda x) = \lambda^{\wedge}\imath(x)]\!] = \mathbb{1}$ или $\imath(\lambda x) = \lambda\imath(x)$ (см. 10.3.3). Так как имеет место представление $1 = \mathrm{mix}(b_\xi \imath(e_\xi))$, $(e_\xi) \subset X$, то для $\lambda \in \mathbb{R}$ можно написать

$$b_\xi \leqslant [\![\lambda^{\wedge} = \lambda^{\wedge} \cdot \imath e_\xi]\!] \wedge [\![\lambda^{\wedge} \cdot \imath e_\xi = \imath(\lambda e_\xi)]\!] \wedge [\![\imath(\lambda e_\xi) \in \mathscr{X}\,]\!] \leqslant [\![\lambda^{\wedge} \in \mathscr{X}\,]\!].$$

Стало быть, $[\![\lambda^\wedge \in \mathscr{X}]\!] = \mathbb{1}$ и поэтому $[\![\mathbb{R}^\wedge \subset \mathscr{X} \subset \mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}$. Более того, $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{X}$ — векторная подрешетка поля $\mathscr{R}$, рассматриваемого со структурой векторной решетки над $\mathbb{R}^\wedge$». Но тогда $\mathscr{X}{\downarrow}$ — векторная подрешетка расширенного K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$, а $\imath$ можно считать вложением X в $\mathscr{R}{\downarrow}$. Осталось проверить (1)–(4).

(1): Возьмем такие $A \subset X$ и $a \in X$, что $a = \sup(A)$. Пусть $z = \sup(\imath(A))$, где супремум вычисляется в $\mathscr{R}{\downarrow}$.

Из очевидного соотношения $[\![\mathscr{X}$ минорантно в $\mathscr{R}\,]\!] = \mathbb{1}$ выводится без труда, что $\mathscr{X}{\downarrow}$ минорантно в $\mathscr{R}{\downarrow}$. Но тогда $\imath(X)$ также минорантно в $\mathscr{R}{\downarrow}$ (см. 8.5.5). Если $\imath(a) \geqslant z$, то для некоторого $0 \leqslant x \in X$ будет $\imath(x) \leqslant \imath(a) - z$ или $z \leqslant \imath(a - x)$. Это означает, что $a - x$ есть верхняя граница множества A и в силу равенства $a = \sup(A)$ должно быть $a - x \geqslant a$ или $x \leqslant 0$. Полученное противоречие показывает, что $z = \imath(a)$.

(2): Поскольку $\imath(X)$ минорантно в $\mathscr{R}{\downarrow}$, то $\mathscr{R}{\downarrow} = \imath(X)^{\perp\perp}$. Тем более выполнено равенство $\mathscr{R}{\downarrow} = J(\imath(X))^{\perp\perp}$, где $J(\imath(X))$ — порядковый идеал, порожденный множеством $\imath(X)$.

(3): Соотношение $[\![\mathbb{R}^\wedge \subset \mathscr{X} \subset \mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}$ позволяет заключить, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{X}$ — плотная подгруппа $\mathscr{R}$». Поэтому для любого $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ верно

$$\inf\{x' \in \mathscr{X} : x' \geqslant x\} = x = \sup\{x' \in \mathscr{X} : x' \leqslant x\}.$$

Привлекая 10.3.7, отсюда можно непосредственно заключить, что

$$\inf\{x' \in \mathscr{X}{\downarrow} : x' \geqslant x\} = x = \sup\{x' \in \mathscr{X}{\downarrow} : x' \leqslant x\}.$$

Осталось учесть минорантность $\imath(X)$ в $\mathscr{X}{\downarrow}$.

(4): Было обосновано в 8.5.5. $\rhd$

Отметим несколько следствий установленной реализационной теоремы.

10.4.2. *Пусть X — архимедова векторная решетка, база $\mathfrak{B}(X)$ которой изоморфна булевой алгебре B. Найдется элемент $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющий условиям:*

(1) *$\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{X}$ — векторная подрешетка поля вещественных чисел $\mathscr{R}$, рассматриваемого со структурой векторной решетки над $\mathbb{R}^\wedge$»;*

(2) *$X' := \mathscr{X}{\downarrow}$ — расширенная векторная решетка с проекциями, представляющая собой r-плотную подрешетку K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$;*

(3) *существует линейный и решеточный изоморфизм $\imath : X \to X'$ с сохранением точных границ, причем для $x \in X'$ имеются разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathfrak{P}(X')$ и семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в X такие, что*

$$x = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi \circ \imath(x_\xi).$$

$\lhd$ Все эти утверждения, по существу, содержатся в 10.4.1. Покажем, например, r-плотность X' в $\mathscr{R}{\downarrow}$. Если $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$, то $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «x — вещественное число и оно может быть аппроксимировано с любой точностью элементами $\mathscr{X}$». Иными словами, справедливо равенство

$$[\![(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^\wedge)(\varepsilon > 0 \to (\exists\, \lambda \in \mathscr{X})(|\lambda - x| < \varepsilon))]\!] = \mathbb{1}.$$

Расписывая булевы оценки истинности для кванторов, для любого $\varepsilon > 0$ найдем $\lambda \in X'$ такой, что $|\lambda - x| \leqslant \varepsilon\mathbb{1}$, а это и требовалось. $\rhd$

10.4.3. (1) *Если E — некоторое K-пространство, то $\mathscr{E} = \mathscr{R}$, $E' = \mathscr{R}{\downarrow}$ и $\iota(E) = J(\iota(E))$. При этом $\iota^{-1} \circ \chi(b) \circ \iota$ будет порядковым проектором на компоненту $\jmath(b)$ для любого $b \in B$.*

$\lhd$ Раз E порядково полно, то векторная решетка E' также порядково полна. Из 10.3.7 видно, что тогда порядково полным будет и пространство $\mathscr{E}$. Следовательно, $\mathscr{E} = \mathscr{R}$ и $E' = \mathscr{R}{\downarrow}$. Пусть $e \in E^+$, $y \in \mathscr{R}{\downarrow}$ и $|y| \leqslant \iota e$. Так как $\iota(E)$ — минорирующая подрешетка в $\mathscr{R}{\downarrow}$, то справедливо представление $y^+ = \sup \iota(A)$, где $A := \{x \in E^+ : \iota x \leqslant y^+\}$. Множество A ограничено в E элементом e. Стало быть, существует $\sup A \in E$ и $y^+ = \iota(\sup A) \in \iota(E)$. Аналогично, $y^- \in \iota(E)$ и, значит, $y \in \iota(E)$. $\rhd$

(2) *Образ $\iota(E)$ совпадает с $\mathscr{R}{\downarrow}$ в том и только в том случае, когда E — расширенное K-пространство.*

$\lhd$ Для расширенного K-пространства E будет $\mathrm{mix}(\iota(E)) = \iota(E)$. В то же время согласно (1) выполняется $\mathscr{E} = \mathscr{R}$ и поэтому $\mathscr{R}{\downarrow} = \mathscr{E}{\downarrow} = \mathrm{mix}(\iota(E))$. Обратное утверждение следует из теоремы Гордона. $\rhd$

(3) *Расширенные K-пространства порядково изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют изоморфные базы.*

$\lhd$ Действительно, если X и Y — расширенные K-пространства, а h — порядковый изоморфизм X на Y, то соответствие $K \mapsto h(K)$ $(K \in \mathfrak{B}(X))$ есть изоморфизм баз. Наоборот, если $\mathfrak{B}(X)$ и $\mathfrak{B}(Y)$ изоморфны булевой алгебре B, то ввиду (2) X и Y порядково изоморфны расширенному K-пространству $\mathscr{R}{\downarrow}$. $\rhd$

10.4.4. *Расширением* K-пространства X называют пару $(Y, \imath)$, где Y также K-пространство, а $\imath$ — изоморфизм X на некоторый фундамент Y.

В классе $\mathrm{Ext}(X)$ всех расширений K-пространства введем предпорядок следующим образом. Для $(Y, \imath)$ и $(Z, \jmath)$ из $\mathrm{Ext}(X)$ положим $(Y, \imath) \prec (Z, \jmath)$, если существует изоморфизм h пространства Y на некоторый фундамент Z такой, что $h \circ \imath = \jmath$. Максимальный элемент предупорядоченного класса $\mathrm{Ext}(X)$ называют *максимальным расширением* X и обозначают символом mX. Полагая $mX := \mathscr{R}{\downarrow}$, из 10.4.3 выводим такой результат.

Всякое K-пространство обладает максимальным расширением. Максимальное расширение единственно с точностью до порядкового изоморфизма и является расширенным K-пространством.

10.4.5. *Пусть X — расширенное K-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}$. Тогда в X можно, и притом единственным способом, определить умножение так, что X становится точным f-кольцом, а $\mathbb{1}$ — единицей умножения. Порядковый идеал $I(\mathbb{1})$, порожденный единицей, также будет точным f-кольцом с той же единицей.*

$\lhd$ В силу 10.4.3 (2) X изоморфно $\mathscr{R}{\downarrow}$ и при этом изоморфизме $\mathbb{1}$ переходит в $1^\wedge \in \mathscr{R}{\downarrow}$, ибо $[\![1^\wedge$ — единица поля $\mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}$. Поэтому можно считать без ограничения общности, что $X = \mathscr{R}{\downarrow}$. Спуск операции умножения в $\mathscr{R}$ доставляет искомую мультипликативную структуру. Если $\times : X^2 \to X$ — еще одно умножение в X, удовлетворяющее указанным условиям, то оно экстенсионально и его подъем $(\times){\uparrow}$ есть умножение в $\mathscr{R}$ с единицей 1. Ясно, что тогда $\times = \cdot$ в силу единственности мультипликативной структуры поля $\mathscr{R}$. Утверждение относительно идеала $I(\mathbb{1})$ следует из определений и соотношения $|xy| \leqslant |x| \cdot |y|$, справедливого в f-кольце X, см. 8.4.11. $\rhd$

10.4.6. (1) *Для любой архимедовой векторной решетки X существуют единственное с точностью до линейного и решеточного изоморфизма K-пространство*

oX, а также линейный изоморфизм $\jmath : X \to oX$, сохраняющий точные границы, такие, что

$$\sup\{\jmath(x) : x \in X, \jmath(x) \leqslant y\} = y = \inf\{\jmath(x) : x \in X, \jmath(x) \geqslant y\}$$

для каждого $y \in oX$.

$\lhd$ Пусть $\mathscr{R}$ и $J(\imath(X))$ те же, что и в 10.4.1. Тогда пара $(J(\imath(X)), \imath)$ удовлетворяет всем указанным условиям. Если $(Y, \jmath)$ — какая-либо пара с теми же свойствами, то базы $\mathfrak{B}(Y)$ и $\mathfrak{B}(\mathscr{R}{\downarrow})$ изоморфны между собой, а в силу 10.4.3 (3) изоморфными будут и K-пространства mY и $\mathscr{R}{\downarrow}$. Значит, можно считать, что $\imath(X) \subset Y \subset \mathscr{R}{\downarrow}$, причем Y — фундамент $\mathscr{R}{\downarrow}$. Тогда $J(\imath(X)) \subset Y$. Но для каждого $y \in Y$ должны существовать такие x' и $x'' \in X$, что $\imath(x') \leqslant y \leqslant \imath(x'')$, т. е. должно быть $Y \subset J(\imath(X))$. $\rhd$

Пусть F — это K-пространство и $A \subset F$. Обозначим через dA множество всех $x \in F$, представимых в виде $x = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi a_\xi$, где $(a_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset A$ и $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(F)$. Пусть rA — множество всех элементов $x \in F$ вида $x = r\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n$, где (a_n) — произвольная последовательность в A, сходящаяся с регулятором.

(2) *Для архимедовой векторной решетки X имеет место формула $oX = rdX$.*

$\lhd$ В силу 10.4.1 (2) можно считать oX фундаментом в $\mathscr{R}{\downarrow}$. Пусть $\mathscr{X}$ и X' — те же, что и в 10.4.2. Тогда для $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ и $x \in oX$ в соответствии с 10.4.2 (2) существует $x_\varepsilon \in X'$ такой, что $|x - x_\varepsilon| < \varepsilon|x|$. Но по 10.4.2 (3) имеет место представление $x_\varepsilon = o\text{-}\sum_\xi \pi_\xi \circ \imath(x_\xi)$, где $(x_\xi) \subset X$. Остается заметить, что $x_\varepsilon \in oX$, так как oX — идеал в $\mathscr{R}{\downarrow}$. $\rhd$

10.4.7. Теорема. *Пусть X — некоторое K_σ-пространство с единицей $\mathbb{1}$. Спектральная функция $\lambda \mapsto e^x_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ элемента $x \in X$ обладает следующими свойствами:*

(1) $(\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R})(\lambda \leqslant \mu \to e^x_\lambda \leqslant e^x_\mu)$;

(2) $e^x_{+\infty} := \bigvee\limits_{\mu\in\mathbb{R}} e^x_\mu = \mathbb{1}$, $e^x_{-\infty} := \bigwedge\limits_{\mu\in\mathbb{R}} e^x_\mu = \mathbb{0}$;

(3) $\bigvee\limits_{\mu<\lambda} e^x_\mu = e^x_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;

(4) $x \leqslant y \leftrightarrow (\forall\, \lambda \in \mathbb{R})\ (e^y_\lambda \leqslant e^x_\lambda)$;

(5) $e^{x+y}_\lambda = \bigvee\{e^x_\mu \wedge e^y_\nu :\ \mu, \nu \in \mathbb{R}, \mu + \nu = \lambda\}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;

(6) $e^{x\cdot y}_\lambda = \begin{cases} \bigvee\{e^x_\mu \wedge e^y_\nu :\ 0 < \mu, \nu \in \mathbb{R}, \mu\nu = \lambda\}, & \textit{если } \lambda > 0, \\ 0, \quad \textit{если } \lambda \leqslant 0\ (0 \leqslant x, y \in X); \end{cases}$

(7) $e^{-x}_\lambda = \bigvee\{\mathbb{1} - e^x_{-\mu} : \mu \in \mathbb{R}, \mu < \lambda\} = (\mathbb{1} - e^x_{-\lambda}) \wedge e_{(x+\lambda\mathbb{1})}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;

(8) $x = \inf(A) \leftrightarrow (\forall\, \lambda \in \mathbb{R})(e^x_\lambda = \bigvee\{e^a_\lambda : a \in A\})$;

(9) $e^{x\vee y}_\lambda = e^x_\lambda \wedge e^y_\lambda$, $e^{x\wedge y}_\lambda = e^x_\lambda \vee e^y_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;

(10) $e^{|x|}_\lambda = e^x_\lambda \wedge (\mathbb{1} - e^x_{-\lambda}) \wedge e_{(x+\lambda\mathbb{1})}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;

(11) $e^{\alpha x}_\lambda = \begin{cases} e^x_{\lambda/\alpha}, & \textit{если } 0 < \alpha \in \mathbb{R}, \\ e^{-x}_{-\lambda/\alpha}, & \textit{если } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha < 0\ (\lambda \in \mathbb{R}); \end{cases}$

$$\textbf{(12)}\ e_\lambda^{cx} = \begin{cases} (c \wedge e_\lambda^x) \vee c^*, & \textit{если } \lambda > 0, \\ c \wedge e_\lambda^x, & \textit{если } \lambda \leqslant 0\ (c \in \mathfrak{E}(X)). \end{cases}$$

При вычислении точных границ в (2), (3) *и* (5)–(7) *можно считать, что* μ *и* ν *пробегают некоторое плотное подполе* $\mathbb{P}$ *поля* $\mathbb{R}$.

$\triangleleft$ Предположим сначала, что X — это K-пространство. Пусть $\mathbb{P}$ — плотное подполе поля $\mathbb{R}$. Тогда $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathbb{P}^\wedge$ — плотное подполе поля $\mathscr{R}$». В силу теоремы 10.4.1, без ограничения общности можно считать, что $X = \mathscr{R}{\downarrow}$. Но тогда требуемые утверждения легко выводятся из 10.3.11 и свойств чисел. Докажем, например, (6), (7), (8) и (11).

Пусть $0 \leqslant x, y \in X$, $0 < \lambda \in \mathbb{P}$, и предположим, что существует произведение $x \cdot y$. Тогда x и y — неотрицательные числа внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. В силу 10.3.11 $e_\lambda^{x\cdot y} = \chi([\![x \cdot y < \lambda^\wedge]\!])$, $e_\lambda^x = \chi([\![x < \lambda^\wedge]\!])$ и $e_\lambda^y = \chi([\![y < \lambda^\wedge]\!])$. В то же время внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ выполнено

$$(\forall\, \lambda \in \mathbb{P})(\forall\, x \in \mathscr{R})(\forall\, y \in \mathscr{R})\big(x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \wedge \lambda > 0 \to (x \cdot y < \lambda \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists\, 0 < \mu,\, \nu \in \mathbb{P}^\wedge)(x < \mu) \wedge (y < \nu) \wedge (\lambda = \mu\nu))\big).$$

Следовательно,

$$[\![x \cdot y < \lambda^\wedge]\!] = \bigvee_{\substack{0<\mu,\nu\in\mathbb{P} \\ \lambda=\mu\nu}} \{[\![x < \mu^\wedge]\!] \wedge [\![y < \nu^\wedge]\!]\}.$$

Отсюда и вытекает требуемое при $\lambda > 0$. Если же $\lambda \leqslant 0$, то

$$[\![x \cdot y < \lambda^\wedge]\!] = [\![\lambda^\wedge \leqslant 0]\!] \wedge [\![x \cdot y \geqslant 0]\!] \wedge [\![x \cdot y < \lambda^\wedge]\!] \leqslant [\![0 \leqslant x \cdot y < \lambda^\wedge \leqslant 0]\!] = \mathbb{0}.$$

Формулу $-x < \lambda$ можно представить в двух эквивалентных формах:

$$-x < \lambda \leftrightarrow \neg(x \leqslant -\lambda) \leftrightarrow \neg(x < -\lambda \vee x = -\lambda) = \big(\neg(x < -\lambda)\big) \wedge (x + \lambda \neq 0);$$

$$-x < \lambda \leftrightarrow (\exists\, \mu \in \mathbb{P})(\mu < \lambda \wedge x \geqslant -\mu) \leftrightarrow (\exists\, \mu \in \mathbb{P})\big(\mu < \lambda \wedge \neg(x < -\mu)\big).$$

Вычисление булевых оценок при $\lambda := \lambda^\wedge$ приводит к соотношениям:

$$[\![-x < \lambda^\wedge]\!] = [\![x < -\lambda]\!]^* \wedge [\![x + \lambda^\wedge \neq 0]\!], \quad [\![-x < \lambda^\wedge]\!] = \bigvee_{\mu\in\mathbb{P},\, \mu<\lambda} [\![x < -\mu]\!]^*.$$

Применив к обеим частям этих равенств изоморфизм χ и используя 10.3.11, получим требуемые формулы из (7).

Возьмем теперь $A \subset X$ и допустим, что $x = \inf(A)$. Тогда $e_\lambda^x = \chi([\![x < \lambda^\wedge]\!]) = \chi([\![\inf(A{\uparrow}) < \lambda^\wedge]\!])$ в силу 10.3.7 и 10.3.11. Однако $A{\uparrow}$ — некоторое множество вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и поэтому

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \inf(A{\uparrow}) < \lambda^\wedge \leftrightarrow (\exists\, a \in A{\uparrow})(a < \lambda^\wedge).$$

Вычисляя булевы оценки истинности, находим

$$[\![x < \lambda^\wedge]\!] = \bigvee_{a\in A} [\![a < \lambda^\wedge]\!].$$

Следовательно,

$$e_\lambda^x = \bigvee\{\chi([\![a < \lambda^\wedge]\!]) : a \in A\} = \bigvee\{e_\lambda^a : a \in A\}.$$

Наоборот, допустим, что e^x_λ есть супремум множества $\{e^a_\lambda : a \in A\}$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$[\![x < \lambda^\wedge]\!] = [\![(\exists\, a \in A\uparrow)(a < \lambda^\wedge)]\!] = [\![\inf(A\uparrow) < \lambda^\wedge]\!]$$

для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$. Значит,

$$[\![(\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^\wedge)(x < \lambda \leftrightarrow \inf(A\uparrow) < \lambda)]\!] = \mathbb{1}.$$

Последнее влечет $[\![x = \sup(A\uparrow)]\!] = \mathbb{1}$ и, привлекая 10.3.7, получим $x = \inf(A)$.

Если $c \in \mathfrak{E}(X)$, то по теореме 10.3.4 $c = \chi(b)$ для некоторого $b \in B$. Стало быть, $[\![c = 0 \vee c = 1]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $\mathbb{V}^{(B)} \models c \in \{0, 1\}$. Но тогда внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ справедлива формула

$$cx < \lambda^\wedge \leftrightarrow (c = 1 \wedge x < \lambda^\wedge) \vee (c = 0 \wedge \lambda^\wedge > 0).$$

Вычислим булевы оценки в последней формуле:

$$[\![cx < \lambda^\wedge]\!] = ([\![c = 1]\!] \wedge [\![x < \lambda^\wedge]\!]) \vee ([\![c = 0]\!] \wedge [\![\lambda^\wedge > 0^\wedge]\!]).$$

Применив к этому равенству изоморфизм χ и принимая в расчет 10.3.11 и равенства

$$\begin{aligned} \chi([\![c = 1]\!]) &= c, \\ \chi([\![c = 0]\!]) &= c^*, \end{aligned} \qquad [\![\lambda^\wedge > 0]\!] = \begin{cases} \mathbb{1}, & \text{если } \lambda > 0, \\ \mathbb{0}, & \text{если } \lambda \leqslant 0, \end{cases}$$

получим требуемую формулу (11).

В том случае, когда X — это K_σ-пространство, можно считать $X \subset \mathscr{R}{\downarrow}$. Если в качестве поля $\mathbb{P}$ взять поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то точные границы во всех рассматриваемых формулах будут вычисляться по счетным множествам. Следовательно, точные границы в этих формулах, вычисленные в пространстве $\mathscr{R}{\downarrow}$ и булевой алгебре $\mathfrak{E}(\mathscr{R}{\downarrow})$, фактически принадлежат X и $\mathfrak{E}(X)$, стало быть, совпадают с соответствующими точными границами в X и $\mathfrak{E}(X)$. $\triangleright$

Интерпретируя понятие сходимости числового семейства внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и привлекая 10.3.8 и 10.4.3 (1), получим полезный критерий o-сходимости в K-пространстве E с единицей $\mathbb{1}$. Использование одного и того же символа $\mathbb{1}$ для обозначения единицы K-пространства E и булевой алгебры B оправдано тем, что B изоморфна $\mathfrak{E}(E)$ и не вызывает путаницы.

10.4.8. Теорема. *Пусть $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — порядково ограниченная сеть в E и $x \in E$. Эквивалентны следующие утверждения*:

(1) *сеть (x_α) o-сходится к элементу x;*

(2) *для любого числа $\varepsilon > 0$ сеть $(e^{y(\alpha)}_\varepsilon)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ осколков единицы, где $y(\alpha) := |x - x_\alpha|$, o-сходится к $\mathbb{1}$;*

(3) *для любого числа $\varepsilon > 0$ существует разбиение единицы $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ в булевой алгебре $\mathfrak{P}(E)$ такое, что*

$$\pi_\alpha |x - x_\beta| \leqslant \varepsilon \mathbb{1} \quad (\alpha, \beta \in \mathrm{A},\ \beta \geqslant \alpha);$$

(4) *для любого числа $\varepsilon > 0$ существует возрастающая сеть проекторов $(\rho_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}} \subset \mathfrak{P}(E)$ такая, что*

$$\rho_\alpha |x - x_\beta| \leqslant \varepsilon \mathbb{1} \quad (\alpha, \beta \in \mathrm{A},\ \beta \geqslant \alpha).$$

$\triangleleft$ Без ограничения общности можно предположить, что E — фундамент расширенного K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$ и $\mathbb{1} := 1^\wedge$ (см. 10.4.3 (1)).

(1) $\leftrightarrow$ (2): Достаточно рассмотреть случай $y_\alpha = x_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{A})$, т. е. $(x_\alpha) \subset E^+$ и $x_\alpha \overset{(o)}{\to} 0$. Пусть σ — модифицированный подъем отображения $s : \alpha \mapsto x_\alpha$ (см. 5.7.7). Тогда $[\![\sigma$ — сеть в $\mathscr{R}_+]\!] = \mathbb{1}$. В силу 10.3.8 $o\text{-}\lim s = 0$ тогда и только тогда, когда $[\![\lim \sigma = 0]\!] = \mathbb{1}$. Последнее соотношение можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\mathbb{1} = [\![(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{\wedge})(\varepsilon > 0 \to (\exists\, \alpha \in \mathrm{A}^{\wedge})(\forall\, \beta \in \mathrm{A}^{\wedge})\,(\beta \geqslant \alpha \to x_\beta < \varepsilon))]\!].$$

Вычисляя булевы оценки для кванторов по правилам 4.6.8, находим еще одну эквивалентную форму

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, (b_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}} \subset B)\ \Bigg(\bigvee_{\alpha \in \mathrm{A}} b_\alpha = \mathbb{1} \wedge (\forall\, \beta \in \mathrm{A})\ (\beta \geqslant \alpha \to [\![x_\beta < \varepsilon^{\wedge}]\!] \geqslant b_\alpha)\Bigg),$$

которая, в свою очередь, равносильна следующей формуле:

$$(\forall\, \varepsilon > 0) \bigvee_{\alpha \in \mathrm{A}} \bigwedge_{\substack{\beta \in \mathrm{A} \\ \beta \geqslant \alpha}} [\![x_\beta < \varepsilon^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}.$$

Поскольку $\chi([\![x_\beta < \varepsilon^{\wedge}]\!]) = e_\varepsilon^{x_\beta}$ (см. 10.3.11), то из сказанного вытекает, что $x_\alpha \overset{(o)}{\to} x$ в том и только в том случае, когда

$$\liminf_{\alpha \in \mathrm{A}} e_\varepsilon^{x_\alpha} = \bigvee_{\alpha \in \mathrm{A}} \bigwedge_{\substack{\beta \in \mathrm{A} \\ \beta \geqslant \alpha}} e_\varepsilon^{x_\beta} = \mathbb{1}$$

для любого $\varepsilon > 0$, т. е. $e_\varepsilon^{x_\alpha} \overset{(o)}{\to} \mathbb{1}$ для любого $\varepsilon > 0$.

(1) $\leftrightarrow$ (3): Рассуждая так же, как и выше, найдем, что условие $o\text{-}\lim x_\alpha = x$ эквивалентно следующему:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, (c_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}} \subset B)\Bigg(\bigvee_{\alpha \in \mathrm{A}} c_\alpha = \mathbb{1} \wedge (\forall\, \beta \in \mathrm{A})(\beta \geqslant \alpha \to c_\alpha \leqslant [\![|x_\alpha - x| \leqslant \varepsilon^{\wedge}]\!])\Bigg).$$

В соответствии с принципом исчерпывания для булевых алгебр существуют разбиение единицы $(d_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в B и отображение $\delta : \Xi \to \mathrm{A}$ такие, что $d_\xi \leqslant c_{\delta(\xi)}$ $(\xi \in \Xi)$. Положим $b_\alpha := \bigvee\{d_\xi : \alpha = \delta(\xi)\}$, если $\alpha \in \delta(\Xi)$ и $b_\alpha = 0$, если $\alpha \notin \delta(\Xi)$. Как видно, $(b_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — разбиение единицы $b_\alpha \leqslant c_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{A})$. Итак, если $x_\alpha \to x$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение единицы (b_α) такое, что

$$b_\alpha \leqslant [\![|x - x_\beta| \leqslant \varepsilon^{\wedge}]\!] \quad (\alpha, \beta \in \mathrm{A},\ \beta \geqslant \alpha).$$

Последнее согласно 10.3.4 означает, что

$$\pi_\alpha |x - x_\beta| \leqslant \varepsilon \mathbb{1} \quad (\alpha, \beta \in \mathrm{A},\ \beta \geqslant \alpha),$$

где $\pi_\alpha := \chi(b_\alpha)$. Поскольку (π_α) — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(E)$, то необходимость доказана.

Для доказательства достаточности заметим, что если выполнено (3) и $a := \limsup |x_\alpha - x|$, то

$$\pi_\alpha a \leqslant \bigvee_{\beta \geqslant \alpha} |x_\beta - x| \leqslant \varepsilon \pi_\alpha \mathbb{1}$$

для всех $\alpha \in \mathrm{A}$. Следовательно,

$$0 \leqslant a = \sum \pi_\alpha a \leqslant \varepsilon \sum \pi_\alpha 1 = \varepsilon \mathbb{1}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $a = 0$ и $o\text{-}\lim x_\alpha = x$.

(3) $\leftrightarrow$ (4): Нужно лишь в (3) положить $\rho_\alpha := \bigvee\{\pi_\beta : \ \beta \in \mathrm{A}, \ \alpha \leqslant \beta\}$. $\rhd$

10.5. Функциональные представления векторных решеток

В этом параграфе мы займемся представлением произвольной векторной решетки в виде решетки непрерывных функций, допускающих бесконечные значения на нигде не плотном множестве из области определения функции.

10.5.1. Сначала установим несколько вспомогательных фактов. Для функции $f : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ и произвольного числа $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ положим

$$\{f < \lambda\} := \{t \in Q : \ f(t) < \lambda\}, \quad \{f \leqslant \lambda\} := \{t \in Q : \ f(t) \leqslant \lambda\}.$$

Предположим, что Q — топологическое пространство, Λ — плотное множество в $\overline{\mathbb{R}}$ и $\lambda \mapsto U_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ — возрастающее отображение из Λ в упорядоченное по включению множество $\mathscr{P}(Q)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) *существует единственная непрерывная функция $f : Q \to \overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяющая соотношениям*

$$\{f < \lambda\} \subset U_\lambda \subset \{f \leqslant \lambda\} \quad (\lambda \in \Lambda);$$

(2) *для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ выполняется*

$$\lambda < \mu \ \to \ \mathrm{cl}(U_\lambda) \subset \mathrm{int}(U_\mu).$$

$\lhd$ Импликация (1) $\to$ (2) очевидна. Докажем (2) $\to$ (1). С этой целью положим $f(t) := \inf\{\lambda \in \Lambda : t \in U_\lambda\}$, где $t \in Q$. Легко видеть, что для определенной подобным образом функции $f : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ выполняется $\{f < \lambda\} \subset U_\lambda \subset \{f \leqslant \lambda\}$. Ясно также, что

$$\{f < \lambda\} = \bigcup\{U_\mu : \ \mu < \lambda, \ \mu \in \Lambda\}, \quad \{f \leqslant \lambda\} = \bigcap\{U_\nu : \ \lambda < \nu, \ \nu \in \Lambda\}.$$

Эти свойства f вытекают из монотонности отображения $\lambda \mapsto U_\lambda$.

Рассмотрим теперь два новых отображения

$$\lambda \mapsto V_\lambda := \mathrm{int}(U_\lambda), \quad \lambda \mapsto W_\lambda := \mathrm{cl}(U_\lambda) \quad (\lambda \in \Lambda).$$

Эти отображения также возрастают. Следовательно, существуют функции $g : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ и $h : Q \to \overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяющие условиям

$$\{g < \lambda\} \subset V_\lambda \subset \{g \leqslant \lambda\}, \quad \{h < \lambda\} \subset W_\lambda \subset \{h \leqslant \lambda\} \quad (\lambda \in \Lambda).$$

Из определения W_λ видно, что $U_\mu \subset W_\lambda$ при $\mu < \lambda$. Так как Λ плотно в $\mathbb{R}$, то для произвольных $t \in Q$ и $f(t) < \nu \in \mathbb{R}$ существуют $\lambda, \mu \in \Lambda$ такие, что $f(t) < \mu < \lambda < \nu$. Значит, $t \in U_\mu \subset W_\lambda$ и $h(t) < \lambda < \nu$. Устремив ν к $f(t)$, получим $h(t) \leqslant f(t)$. Последнее неравенство очевидным образом верно и при $f(t) = +\infty$. Рассуждая аналогично, можно записать $V_\mu \subset U_\lambda$ при $\mu < \lambda$. Стало быть, $f(t) \leqslant g(t)$ для всех $t \in Q$.

Записав условие (2) в виде $W_\mu \subset V_\lambda$ $(\mu < \lambda)$ и повторив еще раз приведенные выше рассуждения, можно заключить, что $g(t) \leqslant h(t)$ для всех $t \in Q$. Таким образом, $f = g = h$. Тот факт, что функция f непрерывна, следует из соотношений

$$\{f < \lambda\} = \{g < \lambda\} = \bigcup \{V_\mu : \ \mu < \lambda, \, \mu \in \Lambda\},$$

$$\{f \leqslant \lambda\} = \{h \leqslant \lambda\} = \bigcap \{W_\mu : \ \mu > \lambda, \, \mu \in \Lambda\},$$

так как V_μ открыто, а W_μ замкнуто для всех $\mu \in \Lambda$. $\rhd$

10.5.2. *Пусть Q — квазиэкстремальный компакт, а Q_0 — открытое плотное F_σ-множество в Q. Если $f : Q_0 \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, то существует единственная непрерывная функция $\bar{f} : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $f(t) = \bar{f}(t)$ $(t \in Q_0)$.*

$\lhd$ В самом деле, если выполнены указанные условия, то $\{f < \mu\}$ — множество типа F_σ, так как $\{f < \mu\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \leqslant \mu - 1/n\}$ и Q_0 — также F_σ-множество. В силу условия квазиэкстремальности множество $U_\mu := \mathrm{cl}(\{f < \mu\})$ открыто-замкнуто, а отображение $\mu \mapsto U_\mu$ $(\mu \in \mathbb{R})$ возрастает и удовлетворяет условию (2) из 10.5.1. Таким образом, существует единственная функция $\bar{f} : Q \to \overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяющая включениям $\{\bar{f} < \mu\} \subset U_\mu \subset \{\bar{f} \leqslant \mu\}$ $(\mu \in \mathbb{R})$. Понятно, что $\bar{f} \restriction Q_0 = f$, т. е. ограничение $\bar{f}$ на Q_0 совпадает с f. $\rhd$

10.5.3. Пусть $C(Q)$ обозначает множество всех непрерывных вещественных функций на Q. Для множества $A \subset Q$ положим

$$\pi(A) := \{f \in C(Q) : \ (\forall \, t \in A) \ f(t) = 0\}.$$

Ясно, что $\pi(A)$ — порядковый идеал $C(Q)$.

(1) *Пусть Q — компакт и J — замкнутый по норме порядковый идеал векторной решетки $C(Q)$. Тогда существует замкнутое множество $A \subset Q$ такое, что $J = \pi(A)$.*

$\lhd$ Доказательство см., например, в книге Г.-У. Шварца [370, предложение 10.1]. $\rhd$

(2) *Если A — замкнутое подмножество компакта Q, то в векторной решетке $C(Q)$ имеет место равенство*

$$\pi(A)^\perp = \pi(\mathrm{cl}(Q \setminus A)).$$

$\lhd$ Достаточно установить, что $\pi(A)^\perp \subset \pi(\mathrm{cl}(Q \setminus A))$, так как $\pi(A) \perp \pi(\mathrm{cl}(Q \setminus A))$. Возьмем $y \in \pi(A)^\perp$ и $t_0 \in Q \setminus A$. Компактное пространство Q нормально. Значит, по лемме Урысона (см. у Р. Энгелькинга [180]) существует непрерывная функция $z : Q \to [0, 1]$ такая, что $z(t_0) = 1$ и $z(t) = 0$ при всех $t \in A$. Значит, $z \in \pi(A)$ и $z \wedge |y| = 0$. В частности, $1 \wedge y(t_0) = 0$, т. е. $y(t_0) = 0$. Итак, $y(t) = 0$ для всех $t \in Q \setminus A$ и по непрерывности заключаем, что $y(t) = 0$ также и при всех $t \in \mathrm{cl}(Q \setminus A)$. Последнее равносильно включению $y \in \pi(\mathrm{cl}(Q \setminus A))$. $\rhd$

(3) *Пусть A — замкнутое подмножество компакта Q. Тогда $\pi(A)$ будет компонентой в $C(Q)$ в том и только в том случае, когда A — регулярное замкнутое множество.*

$\lhd$ Если $\pi(A)$ — компонента, то в силу (2) будет $A = \mathrm{cl}(G)$, где $G = Q \setminus \mathrm{cl}(Q \setminus A)$. Наоборот, если $A = \mathrm{cl}(G)$ для некоторого открытого $G \subset Q$, то из (2) вытекает $\pi(Q \setminus G)^\perp = \pi(\mathrm{cl}(G)) = \pi(A)$. $\rhd$

(4) *Отображение $A \mapsto \pi(A)$ осуществляет изоморфизм булевых алгебр* $\mathrm{RC}\,(Q)$ *и* $\mathfrak{P}(C(Q))$.

$\lhd$ Следует из (1) и (3). $\rhd$

(5) *Пусть $A \in \mathrm{RC}\,(Q)$. Компонента $\pi(A)$ допускает порядковый проектор в том случае, когда A — открыто-замкнутое множество.*

$\lhd$ Если A открыто-замкнуто, то $Q \setminus A$ также открыто-замкнуто и потому характеристическая функция $e := \chi_{Q\setminus A}$ непрерывна. Оператор $x \mapsto ex$ $(x \in C(Q))$ будет порядковым проектором на $\pi(A)$. Наоборот, пусть P — порядковый проектор на компоненту $\pi(A)$. Тогда $(I - P)1_Q$ — осколок функции 1_Q (тождественно равный единице на Q). Значит, $(I - P)1_Q = \chi_D$ для некоторого открыто-замкнутого множества D. В то же время $I - P$ — порядковый проектор на $\pi(A)^\perp$ и поэтому $\chi_D C(Q) = \pi(\mathrm{cl}(Q \setminus A))$, откуда следует, что $D = A$. $\rhd$

10.5.4. Пусть Q — квазиэкстремальный компакт. Обозначим через $C_\infty(Q)$ множество всех непрерывных функций $x : Q \to \overline{\mathbb{R}}$, принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах. Упорядочим $C_\infty(Q)$, полагая $x \leqslant y$ в том случае, если $x(t) \leqslant y(t)$ для всех $t \in Q$. Рассмотрим $x, y \in C_\infty(Q)$ и положим $Q_0 := \{|x| < +\infty\} \cap \{|y| < +\infty\}$. По определению каждое из множеств $\{|x| < +\infty\}$ и $\{|y| < +\infty\}$ открыто и плотно в Q. Значит, Q_0 открыто и плотно в Q. В соответствии с 10.5.2 существует единственная непрерывная функция $z : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $z(t) = x(t) + y(t)$ для $t \in Q_0$. Эту функцию z мы возьмем в качестве суммы элементов x и y, т. е. $x + y := z$.

Аналогично можно определить произведение xy элементов x и y из $C_\infty(Q)$. Если обозначить символом $\bar\lambda$ функцию, тождественно равную $\lambda \in \mathbb{R}$ на Q, то можно определить произведение $\lambda x \in C_\infty(Q)$ правилом $\lambda x := \bar\lambda x$.

Ясно, что пространство $C_\infty(Q)$ с определенными выше алгебраическими операциями и порядком является векторной решеткой и точной f-алгеброй. Функция $\mathbb{1}$, тождественно равная единице на Q, является кольцевой и порядковой единицей. Порядковый идеал, порожденный элементом $\mathbb{1}$, совпадает с пространством $C(Q)$ всех непрерывных числовых функций на Q.

10.5.5. *Пространство $C_\infty(Q)$ является расширенным K_σ-пространством.*

$\lhd$ Рассмотрим порядково ограниченную возрастающую последовательность (x_n) элементов $C_\infty(Q)$. Положим $V_\lambda := \bigcap_{n=1}^\infty \{x_n \leqslant \lambda\}$ и $U_\lambda := \mathrm{int}\, V_\lambda$. Тогда V_λ — замкнутое G_δ-множество и по предположению U_λ — открыто-замкнутое множество. В соответствии с 10.5.1 существует единственная непрерывная функция $x : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $\{x < \lambda\} \subset U_\lambda \subset \{x \leqslant \lambda\}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Несложно проверить, что $x = \sup_n x_n$. Итак, $C_\infty(Q)$ является K_σ-пространством.

Если (x_n) — дизъюнктная последовательность в $C_\infty(Q)^+$, то $\big(V_n := \mathrm{cl}(\{x_n > 0\})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ — дизъюнктная последовательность в $\mathrm{Clop}(Q)$ в силу наших предположений. Дополним эту последовательность до разбиения единицы, добавив открыто-замкнутое множество V_0. Теперь на открытом плотном F_σ-множестве $Q_0 := \bigcup_{n=0}^\infty V_n$ мы зададим функцию $y_0 : Q_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ правилом: $y_0(t) := x_n(t)$ $(t \in V_n)$, где $x_0 = 0$. В силу 10.5.1 существует продолжение $x \in C_\infty(Q)$ функции y_0. Ясно, что x — верхняя граница последовательности (x_n). $\rhd$

10.5.6. Рассмотрим некоторые порядковые свойства K_σ-пространства $C_\infty(Q)$.

(1) *База векторной решетки $C_\infty(Q)$ изоморфна булевой алгебре всех регулярных открытых (замкнутых) подмножеств Q.*

$\lhd$ Вытекает из 10.5.1 (4). $\rhd$

(2) *Пространство $C_\infty(Q)$ будет порядково полной векторной решеткой в том и только в том случае, когда компакт Q экстремален.*

$\triangleleft$ Если компакт Q экстремален, то порядковую полноту $C_\infty(Q)$ можно установить так же, как и в 10.5.5. Обратное следует из теоремы Огасавары 2.4.7, так как булевы алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$ и $\mathfrak{E}(\mathbb{1})$ изоморфны. $\triangleright$

Ясно, что в векторной решетке $C_\infty(Q)$ супремум и инфимум конечного числа функций вычисляются поточечно. Используя приведенные выше соображения, можно дать также явное описание точных границ бесконечных множеств в $C_\infty(Q)$.

(3) *Если (x_α) — порядково ограниченное семейство в $C_\infty(Q)$, то $x = \sup_\alpha x_\alpha$ в том и только в том случае, если существует котощее множество $Q_0 \subset Q$ такое, что $x(t) = \sup_\alpha x_\alpha(t)$ для всех $t \in Q_0$.*

10.5.7. В соответствии с 10.1.5, каждому элементу K_σ-пространства с порядковой единицей соответствует его спектральная функция. При этом соответствии операции над элементами преобразуются в определенные операции над спектральными функциями (см. 10.4.7). Это обстоятельство наводит на мысль, что произвольное K_σ-пространство с единицей может быть реализовано как пространство «абстрактных спектральных функций». Остановимся на этом подробнее.

Разложение единицы в булевой алгебре B определяют как отображение $e : \mathbb{R} \to B$, удовлетворяющее следующим трем условиям:

(1) $s \leqslant t \ \to\ e(s) \leqslant e(t) \quad (s, t \in \mathbb{R})$;

(2) $\bigvee\limits_{t\in\mathbb{R}} e(t) = \mathbb{1}, \qquad \bigwedge\limits_{t\in\mathbb{R}} e(t) = \mathbb{0}$;

(3) $\bigvee\limits_{s\in\mathbb{R}, s<t} e(s) = e(t) \quad (t \in \mathbb{R})$.

Пусть $\mathfrak{K}(B)$ — множество всех разложений единицы в B. Введем в $\mathfrak{K}(B)$ отношение порядка по формуле

$$e' \leqslant e'' \ \leftrightarrow\ (\forall\, t \in \mathbb{R})(e''(t) \leqslant e'(t)) \quad (e', e'' \in \mathfrak{K}(B)).$$

Предположим далее, что B — σ-алгебра, и рассмотрим счетное плотное подполе $\mathbb{P}$ поля $\mathbb{R}$. Из свойств (1) и (3) видно, что каждое разложение единицы однозначно определено своими значениями на $\mathbb{P}$.

Для данных $e', e'' \in \mathfrak{K}(B)$ можно определить новое отображение (ср. 10.4.7 (5))

$$e : t \mapsto \bigvee\{e'(r) \wedge e''(s) :\ r, s \in \mathbb{P},\ r + s = t\} \quad (t \in \mathbb{P}),$$
$$e : t \mapsto \bigvee\{e(s) :\ s \in \mathbb{P},\ s < t\} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

которое, как нетрудно проверить, служит разложением единицы в B. Можно ввести в $\mathfrak{K}(B)$ структуру коммутативной группы, полагая по определению $e' + e'' := e$. При этом $-e(t) = \bigvee\{\mathbb{1} - e(-s) :\ s \in \mathbb{P},\ s < t\}$, а нулевой элемент $\bar{\mathbb{0}}$ имеет вид: $\bar{\mathbb{0}}(t) := \mathbb{1}$, если $t > 0$ и $\bar{\mathbb{0}}(t) := \mathbb{0}$, если $t \leqslant 0$. Положим $\bar{\mathbb{1}}(t) := \mathbb{1}$, если $t > 1$, и $\bar{\mathbb{1}}(t) := \mathbb{0}$, если $t \leqslant 1$. Наконец, определим произведение элемента $e \in \mathfrak{K}(B)$ на вещественное число $\alpha \in \mathbb{R}$ по правилу (ср. 10.4.7 (11))

$$(\alpha e)(t) := e(t/\alpha) \quad (\alpha > 0,\ t \in \mathbb{R}),$$
$$(\alpha e)(t) := (-e)(-t/\alpha) \quad (\alpha < 0,\ t \in \mathbb{R}).$$

Каждому элементу $b \in B$ поставим в соответствие разложение единицы $\bar{b}$, определенное правилом: $\bar{b}(t) := \mathbb{1}$, если $t > 1$, $\bar{b}(t) := b^* := \mathbb{1} - b$, если $0 < t \leqslant 1$, и $\bar{b}(t) := \mathbb{0}$, если $t \leqslant 0$.

10.5.8. Теорема. *Пусть B — полная булева алгебра. Множество $\mathfrak{K}(B)$ с введенными выше операциями и порядком представляет собой расширенное K-пространство. Отображение, переводящее элемент $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ в спектральную функцию $\lambda \mapsto [\![x < \lambda^{\wedge}]\!]$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, является изоморфизмом K-пространств $\mathscr{R}{\downarrow}$ и $\mathfrak{K}(B)$.*

$\lhd$ Согласно 10.3.4, без ограничения общности можно считать, что B — база единичных элементов K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$. Элементу $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ поставим в соответствие его спектральную функцию $\lambda \mapsto e_\lambda^x$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. В результате мы получим инъективный решеточный гомоморфизм из $\mathscr{R}{\downarrow}$ в $\mathfrak{R}(B)$, как видно из теоремы 10.4.7. Нужно обосновать сюръективность этого гомоморфизма. Возьмем произвольное разложение единицы $e : \mathbb{R} \to B$. Пусть Σ — множество всех разбиений числовой прямой, т. е. $\sigma \in \Sigma$, если $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ — строго возрастающая функция, $\lim_{n\to\infty} \sigma(n) = \infty$ и $\lim_{n\to\infty} \sigma(-n) = -\infty$ (как обычно, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел). В расширенном K-пространстве $\mathscr{R}{\downarrow}$ существует сумма $x_\sigma := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sigma(n+1) b_{n\sigma}$, где $b_{n\sigma} := e(\sigma(n+1)) - e(\sigma(n))$. Положим $A := \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ и $x = \inf(A)$. Инфимум существует, ибо $x_\sigma \geqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\sigma}(n) b_{n\sigma}$ для фиксированного разбиения $\overline{\sigma} \in \Sigma$. Заметим также, что $x_\sigma = \operatorname{mix}(b_{n\sigma}\sigma(n+1)^{\wedge})$ и

$$[\![x_\sigma < \lambda^{\wedge}]\!] = \bigvee\{b_{n\sigma} : \sigma(n+1) < \lambda\} = \bigvee\{e(\sigma(n+1)) : \sigma(n+1) < \lambda\}.$$

Так как $[\![x = \inf(A{\uparrow})]\!] = \mathbb{1}$, то справедливы вычисления:

$$[\![x < \lambda^{\wedge}]\!] = [\![(\exists\, a \in A{\uparrow}) a < \lambda^{\wedge}]\!] = \bigvee_{a\in A} [\![a < \lambda^{\wedge}]\!] = \bigvee_{\sigma\in\Sigma} \bigvee_{\sigma(n+1)<\lambda} b_{n\sigma} =$$
$$= \bigvee_{\sigma\in\Sigma} \bigvee_{\sigma(n+1)<\lambda} e(\sigma(n)) = \bigvee_{\mu<\lambda} e(\mu) = e(\lambda).$$

Итак, e — спектральная функция элемента x. $\rhd$

10.5.9. Теорема. *Пусть Q — стоунов компакт полной булевой алгебры B, а $\mathscr{R}$ — поле вещественных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Векторная решетка $C_\infty(Q)$ служит расширенным K-пространством, линейно и решеточно изоморфным $\mathscr{R}{\downarrow}$. Изоморфизм можно установить сопоставлением элементу $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ функции $\widehat{x} : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ по формуле*

$$\widehat{x}(q) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : [\![x < \lambda^{\wedge}]\!] \in q\}.$$

$\lhd$ Мы уже убедились в 10.5.8, что K-пространство $\mathscr{R}{\downarrow}$ изоморфно пространству всех B-значных спектральных функций, причем элементу $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ соответствует функция $\lambda \mapsto [\![x < \lambda^{\wedge}]\!]$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Пусть элементу $[\![x < \lambda^{\wedge}]\!] \in B$ соответствует открыто-замкнутое множество U_λ стоунова компакта Q. Тогда в силу 10.5.1 каждому элементу $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ соответствует единственная непрерывная функция $\widehat{x} : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $\{\widehat{x} < \lambda\} \subset U_\lambda \subset \{\widehat{x} \leqslant \lambda\}$. Но тогда $\widehat{x}(q) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : q \in U_\lambda\} = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : [\![x < \lambda^{\wedge}]\!] \in q\}$. Из соотношений $\bigwedge\{[\![x < \lambda^{\wedge}]\!]\} = 0$ и $\bigvee\{[\![x < \lambda^{\wedge}]\!]\} = \mathbb{1}$ (см. 10.4.7 (2)) следует, что замкнутое множество $\bigcap\{U_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ имеет пустую внутренность, а открытое множество $\bigcup\{U_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ плотно в Q. Значит, функция $\widehat{x}$ может принимать значения $\pm\infty$ только на нигде не плотном множестве, а потому $\widehat{x} \in C_\infty(Q)$. Элементарную проверку того, что отображение $x \mapsto \widehat{x}$ есть линейный и решеточный изоморфизм, мы опускаем. $\rhd$

10.5.10. Отметим некоторые следствия доказанной теоремы.

(1) *Пусть X — это K-пространство и $\{e_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ — полное множество попарно дизъюнктных положительных элементов в X. Пусть Q — стоунов компакт булевой алгебры компонент $\mathfrak{B}(X)$. Тогда существует линейный и решеточный изоморфизм X на фундамент K-пространства $C_\infty(Q)$ такой, что e_ξ переходит в характеристическую функцию некоторого открыто-замкнутого множества $Q_\xi \subset Q$. Этот изоморфизм сопоставляет элементу $x \in X$ функцию $\widehat{x} : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ по правилу*

$$\widehat{x}(q) := \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R} : \{e_\lambda^\xi\}^{\perp\perp} \in q\right\} \quad (q \in Q_\xi),$$

где (e_λ^ξ) — характеристика проекции x на компоненту $\{e_\xi\}^{\perp\perp}$ относительно единицы e_ξ.

(2) *Пространство X является расширенным (K-пространством ограниченных элементов) в том и только в том случае, если его образом при указанном изоморфизме служит все $C_\infty(Q)$ (подпространство $C(Q)$ всех непрерывных конечных функций на компакте Q).*

(3) *Любая архимедова векторная решетка (f-алгебра) X линейно и решеточно изоморфна векторной подрешетке (и подалгебре) пространства $C_\infty(Q)$, где Q — стоунов компакт базы $\mathfrak{B}(X)$.*

10.5.11. Обозначим через $C_\infty(Q, S\mathbb{Z})$ подмножество функций из $C_\infty(Q)$, принимающих целые значения на открыто-замкнутом множестве S в Q. Понятно, что $C_\infty(Q, S\mathbb{Z})$ — расширенное f-кольцо.

(1) *Полная решеточно упорядоченная группа G изоморфна некоторому фундаменту расширенной решеточно упорядоченной группы $C_\infty(Q, S\mathbb{Z})$, где Q — стоунов компакт базы $\mathfrak{B}(G)$.*

$\triangleleft$ Если $\mathscr{G}$ — булевозначная реализация G, то $\mathscr{G}$ — полная линейно упорядоченная группа в силу 8.5.1 и 8.5.5. Но тогда либо $\mathscr{G}$ изоморфна $\mathscr{R}$, либо $\mathscr{G}$ — бесконечная циклическая группа. Следовательно, найдется такой $b \in B$, что $b = [\![\mathscr{G} \simeq \mathbb{Z}^\wedge]\!]$ и $b^* = [\![\mathscr{G} \simeq \mathscr{R}]\!]$. Так же, как и в 8.5.6, можно установить, что G разлагается в прямую сумму двух компонент, одна из которых реализуется как $\mathscr{R}$ в $\mathbb{V}^{([0,b^*])}$, а другая — как $\mathbb{Z}^\wedge$ в $\mathbb{V}^{([0,b])}$. Осталось привлечь теорему 10.5.9 и заметить, что $\mathbb{Z}^\wedge{\downarrow} \simeq B_0(\mathbb{Z}) \simeq C_\infty(S, S\mathbb{Z})$, где S — открыто-замкнутое множество в Q, соответствующее элементу $b \in B$. $\triangleright$

(2) *Любое f-кольцо o-изоморфно прямому произведению двух f-колец K_1 и K_2 таких, что K_1 — фундамент и подкольцо расширенного f-кольца $C_\infty(Q_1, S_1\mathbb{Z})$, а K_2 — фундамент расширенной группы $C_\infty(Q_2, S_2\mathbb{Z})$ с нулевым умножением, где Q_l — стоунов компакт алгебры $\mathfrak{B}(K_l)$ и $S_l \in$* Clop(Q_l), *где $l := 1, 2$.*

$\triangleleft$ Выводится аналогично с привлечением 8.5.6. $\triangleright$

10.6. Измеримое функциональное исчисление

В этом параграфе, используя технику булевозначных представлений, мы строим измеримое функциональное исчисление в произвольном K_σ-пространстве.

10.6.1. Начнем с некоторых замечаний, которые мы будем учитывать ниже без специальных оговорок. Возьмем K_σ-пространство E. По теореме 10.3.4 можно предположить, что E — подрешетка расширенного K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$, где, как обычно, $\mathscr{R}$ — поле вещественных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ и $B := \mathfrak{B}(E)$. При этом идеал $\widehat{E} := I(E)$, порожденный множеством E в $\mathscr{R}{\downarrow}$ служит фундаментом $\mathscr{R}{\downarrow}$ и одновременно o-пополнением E. Единица $\mathbb{1}$ решетки E (если таковая имеется) будет также единицей в $\mathscr{R}{\downarrow}$. Точные границы счетных множеств в E унаследованы из $\mathscr{R}{\downarrow}$. Точнее, если точная верхняя (нижняя) граница x последовательности $(x_n) \subset E$ существует в $\mathscr{R}{\downarrow}$, то x — также точная верхняя (нижняя) граница той же последовательности в E, при условии, что $x \in E$. Таким образом, вне зависимости от того в E или $\mathscr{R}{\downarrow}$, вычисляется o-предел (o-сумма) последовательности из E, результат принадлежит E. То же самое имеет место и для r-предела и r-суммы. В частности, мы можем утверждать, что если $x \in E$, то след e_x и спектральная характеристика $\lambda \mapsto e_\lambda^x$ элемента x, вычисленные в $\mathscr{R}{\downarrow}$, являются элементом $B := \mathfrak{E}(E)$ и отображением из $\mathbb{R}$ в B соответственно.

В частности, из приведенных соображений следует, что имеет место секвенциальный вариант теоремы 10.5.8: *если B — произвольная σ-полная булева алгебра, то множество $\mathfrak{K}(B)$ с введенными в* 10.5.7 *операциями и порядком представляет собой расширенное K_σ-пространство, изоморфное порядково плотной подрешетке $\mathscr{R}{\downarrow}$.*

10.6.2. Теперь мы определим интеграл относительно спектральной меры. Предположим, что (Ω, Σ) — измеримое пространство, т. е. Ω — непустое множество и Σ — фиксированная σ-алгебра подмножеств Ω. *Спектральной мерой* называют любой σ-непрерывный булев гомоморфизм μ из Σ в булеву σ-алгебру B. Точнее, отображение $\mu : \Sigma \to B$ является спектральной мерой, если $\mu(\Omega \setminus A) = \mathbb{1} - \mu(A)$ $(A \in \Sigma)$ и для любой последовательности (A_n) элементов Σ

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Пусть $B := \mathfrak{E}(E)$ — булева алгебра осколков единицы в K_σ-пространстве E с фиксированной единицей $\mathbb{1}$. В этом случае спектральную меру $\mu : \Sigma \to B$ можно рассматривать как счетно-аддитивную векторную меру $\mu : \Sigma \to E$, значениями которой служат осколки единицы.

Рассмотрим измеримую функцию $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Взяв некоторое разбиение числовой прямой

$$\beta := (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}, \quad \lambda_k < \lambda_{k+1}\ (k \in \mathbb{Z}), \quad \lim_{n\to\pm\infty} \lambda_n = \pm\infty,$$

положим $A_k := f^{-1}([\lambda_k, \lambda_{k+1}))$ и составим интегральные суммы

$$\underline{\sigma}(f,\beta) := o\text{-}\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k \mu(A_k), \quad \overline{\sigma}(f,\beta) := o\text{-}\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{k+1} \mu(A_k),$$

где o-суммы вычислены в E. Ясно, что

$$\underline{\sigma}(f,\beta) \leqslant o\text{-}\sum_{-\infty}^{\infty} f(t_k)\mu(A_k) \leqslant \overline{\sigma}(f,\beta)$$

при любом выборе $t_k \in A_k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Понятно также, что при измельчении разбиения β нижняя сумма $\underline{\sigma}(f,\beta)$ возрастает, а верхняя сумма $\overline{\sigma}(f,\beta)$ убывает. Если существует элемент $x \in E$ такой, что $\sup\{\underline{\sigma}(f,\beta)\} = x = \inf\{\overline{\sigma}(f,\beta)\}$, где точные границы взяты по всем разбиениям $\beta := (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ вещественной прямой, то мы будем говорить, что функция f *интегрируема относительно спектральной меры* μ и что существует *спектральный интеграл* $I_\mu(f)$. При этом пишут:

$$I_\mu(f) := \int_\Omega f d\mu := \int_\Omega f(t)d\mu(t) := x.$$

10.6.3. *Спектральный интеграл $I_\mu(f)$ существует для любой ограниченной измеримой функции f. Если E — расширенное K_σ-пространство, то всякая измеримая функция интегрируема относительно произвольной спектральной меры.*

$\triangleleft$ Заметим, что $A_k \cap A_l = \varnothing$ $(k \neq l)$ и $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k = \Omega$. Значит, $(\mu(A_k))_{k\in\mathbb{Z}}$ — разбиение единицы в булевой алгебре B. Полагая $\delta := \sup_{k\in\mathbb{Z}}\{\lambda_{k+1} - \lambda_k\}$, можно написать

$$0 \leqslant \overline{\sigma}(f,\beta) - \underline{\sigma}(f,\beta) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\mu(A_k) = \delta\mathbb{1}.$$

Следовательно, измеримая функция f интегрируема относительно μ тогда и только тогда, когда $\overline{\sigma}(f,\beta)$ и $\underline{\sigma}(f,\beta)$ существуют хотя бы для одного разбиения β. Если f ограничена, то суммы $\overline{\sigma}(f,\beta)$ и $\underline{\sigma}(f,\beta)$ содержат лишь конечное число ненулевых слагаемых. Если же E — расширенное K_σ-пространство, а измеримая функция f произвольна, то указанные суммы также имеют смысл, так как они содержат не более счетного числа попарно дизъюнктных слагаемых элементов. $\triangleright$

10.6.4. Теорема. *Пусть $E := \mathscr{R}{\downarrow}$ и μ — спектральная мера со значениями в $B := \mathfrak{E}(E)$. Тогда для любой измеримой функции f интеграл $I_\mu(f)$ — единственный элемент K-пространства E, удовлетворяющий условию*

$$[\![I_\mu(f) < \lambda^\wedge]\!] = \mu(\{f < \lambda\}) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

$\triangleleft$ Возьмем произвольное число $\lambda \in \mathbb{R}$ и такое разбиение вещественной прямой $\beta := (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, что $\lambda_0 = \lambda$. Если $b := [\![I_\mu(f) < \lambda^\wedge]\!]$, то

$$b = [\![(\exists\, t \in \mathbb{R}^\wedge)\, (I_\mu(f) < t \wedge t < \lambda^\wedge)]\!].$$

В силу принципа перемешивания существуют разбиение $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элемента b и семейство $(t_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathbb{R}$ такие, что $t_\xi < \lambda$ и $b_\xi \leqslant [\![I_\mu(f) \leqslant t_\xi^\wedge]\!]$ для всех ξ. Привлекая 10.3.4, выводим

$$b_\xi \underline{\sigma}(f,\beta) \leqslant t_\xi b_\xi < \lambda b_\xi \quad (\xi \in \Xi)$$

и далее

$$\lambda_k b_\xi \mu(A_k) \leqslant t_\xi b_\xi \mu(A_k) < \lambda b_\xi \mu(A_k) \quad (\xi \in \Xi,\ k \in \mathbb{Z}).$$

При $k \geqslant 1$ выполняется $\lambda_k > \lambda$ и поэтому $b_\xi \mu(A_k) = 0$ или $b_\xi \leqslant \mu(A_k)^*$. Отсюда мы выводим:

$$b = \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi \leqslant \bigwedge_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)^* = \mu\left(\Omega - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu(\{f < \lambda\}).$$

В то же время $b^* = [\![I_\mu(f) \geqslant \lambda^\wedge]\!]$ и, вновь привлекая 10.3.4, получим $\lambda b^* \leqslant b^* I_\mu(f) \leqslant b^* \overline{\sigma}(f,\beta)$ или

$$\lambda b^* \mu(A_k) \leqslant b^* \lambda_k \mu(A_k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

При $k < 0$ верно $\lambda_k < \lambda$ и поэтому $b^*\mu(A_k) = 0$ или $b^* \leqslant \mu(A_k)$. Следовательно,

$$b^* \leqslant \bigwedge_{k=-1}^{-\infty} \mu(A_k)^* = \mu\left(\Omega - \bigcup_{k=-1}^{-\infty} A_k\right) = \mu(\{f \geqslant \lambda\}).$$

Отсюда вытекает, что $b \geqslant \mu(\{f<\lambda\})$, и окончательно мы получаем: $b = \mu(\{f<\lambda\})$.

Предположим, что

$$[\![x < \lambda^\wedge]\!] = \mu(\{f < \lambda\}) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

для некоторого $x \in \mathscr{R}\!\downarrow$. Тогда в силу доказанного выше для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ будет $[\![x < \lambda^\wedge]\!] = [\![I_\mu(f) < \lambda^\wedge]\!]$. Это эквивалентно соотношению

$$[\![(\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^\wedge)\, (x < \lambda \leftrightarrow I_\mu(f) < \lambda]\!] = \mathbb{1}.$$

Учитывая плотность $\mathbb{R}^\wedge$ в $\mathscr{R}$, приходим к равенству $[\![x = I_\mu(f)]\!] = \mathbb{1}$ или $x = I_\mu(f)$. $\triangleright$

10.6.5. *Возьмем измеримую функцию $f : \Omega \to \mathbb{R}$ и спектральную меру $\mu : \Sigma \to B := \mathfrak{E}(E)$, где E — некоторое K-пространство. Если интеграл $I_\mu(f) \in E$ существует, то спектральная функция элемента $I_\mu(f)$ совпадает с отображением $\lambda \mapsto \mu(\{f < \lambda\})$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.*

$\triangleleft$ Нужно лишь сопоставить 10.6.4 и 10.3.11. $\triangleright$

10.6.6. Теорема. *Пусть E — расширенное K_σ-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}$ и $\mu : \Sigma \to B_0 := \mathfrak{E}(E)$ — спектральная мера. Спектральный интеграл $I_\mu(\cdot)$ представляет собой секвенциально o-непрерывный решеточный гомоморфизм из расширенного K_σ-пространства измеримых функций $\mathscr{M}(\Omega, \Sigma)$ в E. Если E наделить единственной мультипликативной структурой, для которой $\mathbb{1}$ служит кольцевой единицей, то $I_\mu(\cdot)$ будет также гомоморфизмом f-алгебр.*

$\triangleleft$ Без ограничения общности можно считать, что $E \subset \mathscr{R}\!\downarrow$ и $\mathscr{R}\!\downarrow$ — максимальное расширение E (см. 10.4.1). Здесь $\mathscr{R}$, как обычно, — поле вещественных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$, где B — пополнение булевой алгебры B_0. Очевидно, что оператор I_μ линеен и положителен. Докажем его секвенциальную o-непрерывность. Возьмем убывающую последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ измеримых функций такую, что $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$ для всех $t \in \Omega$ и положим $x_n := I_\mu(f_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Для произвольного $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ положим $A_n := \{t \in \Omega : f_n(t) < \varepsilon\}$ и заметим, что $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Ввиду предложения 10.6.5 можно написать

$$\underset{n\to\infty}{o\text{-}\lim}\, e_\varepsilon^{x_n} = \underset{n\to\infty}{o\text{-}\lim}\, \mu(A_n) = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mathbb{1}.$$

Применив критерий o-сходимости 10.4.8 (2), получим $o\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Далее, для произвольных измеримых функции $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ из 10.4.7 (9) и 10.6.5 выводим

$$e_\lambda^{I(f\vee g)} = \mu(\{f \vee g < \lambda\}) = \mu(\{f < \lambda\}) \wedge \mu(\{g < \lambda\}) = e_\lambda^{I(f)} \wedge e_\lambda^{I(g)} = e_\lambda^{I(f)\vee I(g)},$$

где для краткости $I := I_\mu$. Таким образом, $I(f \vee g) = I(f) \vee I(g)$, т. е. I_μ — решеточный гомоморфизм. Аналогично, для измеримых функций $f \geqslant 0$ и $g \geqslant 0$

из 10.4.7 (6) и 10.6.5 мы получаем

$$e_\lambda^{I(f\cdot g)} = \mu(\{f\cdot g<\lambda\}) = \mu\Bigg(\bigcup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q}^+\\ rs=\lambda}} \{f<r\}\cap\{g<s\}\Bigg) =$$

$$= \bigvee_{\substack{r,s\in\mathbb{Q}^+\\ rs=\lambda}} \mu(\{f<r\})\wedge\mu(\{g<s\}) = \bigvee_{\substack{r,s\in\mathbb{Q}^+\\ rs=\lambda}} e_r^{I(f)}\wedge e_s^{I(g)} = e_\lambda^{I(f)\cdot I(g)},$$

где λ — произвольное строго положительное рациональное число ($\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел). Значит, $I(f\cdot g) = I(f)\cdot I(g)$. Справедливость последнего равенства для произвольных функций f и g выводится из доказанных свойств спектрального интеграла:

$$I(f\cdot g) = I(f^+g^+) + I(f^-g^-) - I(f^+g^-) - I(f^-g^+) =$$

$$= I(f)^+I(g)^+ + I(f)^-I(g)^- - I(f)^+I(g)^- - I(f)^-I(g)^+ = I(f)\cdot I(g). \ \rhd$$

10.6.7. *Пусть $e_1,\dots,e_n:\mathbb{R}\to B$ — конечный набор спектральных функций со значениями в σ-алгебре B. Тогда существует единственная B-значная спектральная мера μ, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ такая, что*

$$\mu\left(\prod_{k=1}^n(-\infty,\lambda_k)\right) = \bigwedge_{k=1}^n e_k(\lambda_k)$$

для всех $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$.

$\lhd$ Не ограничивая общности, можно считать, что $B = \mathrm{Clop}(Q)$, где Q — стоунов компакт B. Согласно 10.5.1 существует непрерывная функция $x_k: Q\to\overline{\mathbb{R}}$ такая, что $e_k(\lambda) = \mathrm{cl}(\{x_k<\lambda\})$ для всех $\lambda\in\mathbb{R}$ и $k:=1,\dots,n$. Положим $f(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$, если все $x_k(t)$ конечны, и $f(t)=\infty$, если $x_k(t)=\pm\infty$ хотя бы для одного индекса k. Тем самым мы определили непрерывное отображение $f:Q\to\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$ (базу фильтра окрестностей точки ∞ составляют дополнения к всевозможным шарам с центром в нуле). Ясно, что функция f измерима относительно борелевских алгебр $\mathrm{Bor}(Q)$ и $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)$ и φ те же, что и в 2.4.9.

Определим отображение $\mu:\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)\to B$ формулой

$$\mu(A) := \varphi\big(f^{-1}(A)\big) \quad (A\in\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)).$$

Как видно, μ — спектральная мера. Если $A:=\prod_{k=1}^n(-\infty,\lambda_k)$, то

$$f^{-1}(A) = \bigcap_{k=1}^n\{x_k<\lambda_k\}.$$

Следовательно, $\mu(A) = e_1(\lambda_1)\wedge\ldots\wedge e_n(\lambda_n)$. Если ν — еще одна спектральная мера с теми же свойствами, что и μ, то множество $\mathscr{B}:=\{A\in\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n): \nu(A)=\mu(A)\}$ будет σ-алгеброй, содержащей все множества вида

$$\prod_{k=1}^n(-\infty,\lambda_k) \quad (\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}).$$

Отсюда непосредственно вытекает, что $\mathscr{B} = \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$. $\rhd$

10.6.8. Возьмем теперь упорядоченный набор $x_1, \dots, x_n$ элементов K_σ-пространства E с единицей $\mathbb{1}$. Пусть $e^{x_k} : \mathbb{R} \to B := \mathfrak{E}(\mathbb{1})$ — спектральная функция элемента x_k. Согласно 10.6.7 существует спектральная мера $\mu : \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n) \to B$ такая, что

$$\mu\left(\prod_{k=1}^{n}(-\infty, \lambda_k)\right) = \bigwedge_{k=1}^{n} e^{x_k}(\lambda_k).$$

Как видно, мера μ однозначно определена упорядоченным набором $\mathfrak{x} := (x_1, \dots, x_n) \in E^n$. На этом основании мы будем писать $\mu_{\mathfrak{x}} := \mu$ и говорить, что $\mu_{\mathfrak{x}}$ — спектральная мера набора $\mathfrak{x}$. Для интеграла измеримой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по спектральной мере $\mu_{\mathfrak{x}}$ приняты следующие обозначения:

$$\hat{\mathfrak{x}}(f) := f(\mathfrak{x}) := f(x_1, \dots, x_n) := I_\mu(f).$$

Если $\mathfrak{x} = (x)$, то пишут также $\hat{x}(f) := f(x) := I_\mu(f)$, а $\mu_x := \mu$ называют спектральной мерой элемента x. Напомним, что пространство $\mathscr{B}or(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ всех борелевских функций в $\mathbb{R}^n$ является расширенным K_σ-пространством и точной f-алгеброй.

10.6.9. Теорема. *Спектральная мера набора $\mathfrak{x} := (x_1, \dots, x_n)$ и элемент $f(\mathfrak{x})$ связаны соотношением*

$$\mu_{f(\mathfrak{x})} = \mu_{\mathfrak{x}} \circ f^{\leftarrow},$$

где $f^{\leftarrow} : \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ — гомоморфизм, действующий по правилу $A \mapsto f^{-1}(A)$. В частности,

$$(f \circ g)(\mathfrak{x}) = g(f(\mathfrak{x}))$$

для измеримых функций $f \in \mathscr{B}or(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ и $g \in \mathscr{B}or(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, если только существуют $f(\mathfrak{x})$ и $g(f(\mathfrak{x}))$.

$\triangleleft$ Стандартными рассуждениями теории меры можно установить, что совокупность борелевских множеств, на которых совпадают меры $\mu_f(\mathfrak{x})$ и $\mu_{\mathfrak{x}} \circ f^{\leftarrow}$, представляет собой σ-алгебру. В силу 10.6.5 для любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется

$$\mu_{f(\mathfrak{x})}(-\infty, t) = e_t^{f(\mathfrak{x})} = [\![f(\mathfrak{x}) < t]\!] = \mu_{\mathfrak{x}} \circ f^{-1}(-\infty, t).$$

Следовательно, спектральные меры $\mu_f(\mathfrak{x})$ и $\mu_{\mathfrak{x}} \circ f^{\leftarrow}$ совпадают на интервалах вида $(-\infty, t)$. Но тогда они совпадают на всем $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$. Для обоснования второй части достаточно заметить, что $(g \circ f)^{\leftarrow} = f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}$ и применить уже установленное дважды. $\triangleright$

10.6.10. Теорема. *Для любого упорядоченного набора $\mathfrak{x} := (x_1, \dots, x_n)$ элементов расширенного K_σ-пространства E отображение*

$$\hat{\mathfrak{x}} : f \mapsto \hat{\mathfrak{x}}(f) \quad (f \in \mathscr{B}or(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$$

представляет собой единственный секвенциально o-непрерывный гомоморфизм f-алгебры $\mathscr{B}or(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ в E, удовлетворяющий условиям

$$\hat{\mathfrak{x}}(dt_k) = x_k \quad (k := 1, \dots, n),$$

где $dt_k : (t_1, \dots, t_n) \mapsto t_k$ обозначает k-ю координатную функцию на $\mathbb{R}^n$.

$\triangleleft$ Как было показано в 10.6.6, отображение $f \mapsto \hat{\mathfrak{x}}(f)$ является секвенциально o-непрерывным гомоморфизмом f-алгебр. Из теоремы 10.6.8 вытекает равенство

$$\mu_{dt_k(\mathfrak{x})} = \mu_{\mathfrak{x}} \circ (dt_k)^{\leftarrow} = \mu_{x_k}.$$

Следовательно, элементы $\hat{\mathfrak{x}}(dt_k) = dt_k(\mathfrak{x})$ и x_k совпадают, так как они имеют одни и те же спектральные функции. Если $h : \mathscr{B}or(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to E$ — другой гомоморфизм указанных f-алгебр с теми же свойствами, что и $\hat{\mathfrak{x}}(\cdot)$, то h и $\hat{\mathfrak{x}}(\cdot)$ совпадают на всех полиномах. Но тогда h и $\hat{\mathfrak{x}}(\cdot)$ совпадают на всем $\mathscr{B}or(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ввиду o-непрерывности. $\triangleright$

10.6.11. Теорема. *Элемент $x \in E$ имеет вид $x = f(\mathfrak{x})$ для некоторых $\mathfrak{x} \in E^n$ и $f \in \mathscr{B}or(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ в том и только в том случае, если $\operatorname{im}(\mu_x) \subset \operatorname{im}(\mu_{\mathfrak{x}})$.*

$\triangleleft$ Необходимость следует из 10.6.8. Доказательство достаточности мы оставляем читателю в качестве упражнения. $\triangleright$

10.6.12. Спектральная теорема Фрейденталя. *Пусть E — произвольное K_σ-пространство с единицей $\mathbb{1}$. Каждый элемент $x \in E$ допускает представление*

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda^x,$$

где интеграл понимают как предел относительно сходимости с регулятором $\mathbb{1}$ интегральных сумм

$$x(\beta) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_n (e_{t_{n+1}}^x - e_{t_n}^x), \quad t_n < \tau_n < t_{n+1},$$

соответствующих разбиениям числовой прямой

$$\beta := (t_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad t_n < t_{n+1}, \quad \lim_{n \to \infty} t_n = \infty, \quad \lim_{n \to -\infty} t_n = -\infty$$

при $\delta(\beta) := \sup_{n \in \mathbb{Z}} (t_{n+1} - t_n) \to 0$.

$\triangleleft$ Можно предположить, что $\mathscr{R}{\downarrow}$ служит максимальным расширением E и $E \subset \mathscr{R}{\downarrow}$. Пусть $x \in E$, $\beta := (t_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — разбиение числовой прямой $\mathbb{R}$ и $t_n < \tau_n < t_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Обозначим $b_n := e_{t_{n+1}} - e_{t_n}$. Тогда

$$\begin{aligned} b_n = [\![t_n^\wedge \leqslant x < t_{n+1}^\wedge]\!] \wedge [\![t_n^\wedge \leqslant \tau_n^\wedge < t_{n+1}^\wedge]\!] \wedge \\ \wedge [\![t_{n+1}^\wedge - t_n^\wedge \leqslant \delta(\beta)^\wedge]\!] \leqslant [\![|x - \tau_n^\wedge| \leqslant \delta(\beta)^\wedge]\!]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенство $x(\beta) := \operatorname{mix}_{n \in \mathbb{Z}} (b_n \tau_n^\wedge)$, выводим $[\![|x - x(\beta)| \leqslant \delta(\beta)^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ или, что то же самое, $|x - x(\beta)| \leqslant \delta(\beta)\mathbb{1}$. Осталось вспомнить замечания из 10.6.1. $\triangleright$

10.7. Нерасширяющие операторы

В этом параграфе мы выясним условия, при которых имеет место довольно редкое событие: стандартное имя поля вещественных чисел служит булевозначным полем вещественных чисел.

10.7.1. Всюду в этом параграфе буквой G мы обозначаем расширенное K-пространство $\mathscr{R}{\downarrow}$. Напомним, что G — также и точное f-кольцо с единицей $\mathbb{1} := 1^\wedge$.

Пусть $\operatorname{End}_N(G)$ — множество всех нерасширяющих линейных операторов в G, см. 10.2.7. Ясно, что $\operatorname{End}_N(G)$ — векторное пространство. Более того, $\operatorname{End}_N(G)$ будет точным унитарным модулем над кольцом G, если определить оператор gT

формулой $gT : x \mapsto g \cdot Tx$ $(x \in G)$. Это следует из того, что умножение на элемент G представляет собой нерасширяющий оператор и композиция нерасширяющих операторов есть нерасширяющий оператор. Обозначим символом $\mathrm{End}_{\mathbb{R}^\wedge}(\mathscr{R})$ элемент $\mathbb{V}^{(B)}$, изображающий пространство всех $\mathbb{R}^\wedge$-линейных отображений из $\mathscr{R}$ в $\mathscr{R}$. Тогда $\mathrm{End}_{\mathbb{R}^\wedge}(\mathscr{R})$ — векторное пространство над полем $\mathscr{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а $\mathrm{End}_{\mathbb{R}^\wedge}(\mathscr{R}){\downarrow}$ — точный унитарный модуль над G.

10.7.2. (1) *Линейный оператор в K-пространстве G будет нерасширяющим в том и только в том случае, когда он экстенсионален.*

$\triangleleft$ Как видно из теоремы Гордона, экстенсиональность произвольного оператора $T : G \to G$ означает, что для любых $x, y \in G$ и $\pi \in \mathfrak{P}(G)$ из равенства $\pi x = \pi y$ следует $\pi T x = \pi T y$. Ввиду линейности T последнее равносильно условию $\pi x = 0 \ \to \ \pi T x = 0$ $(x \in G, \pi \in \mathfrak{P}(G))$. Если взять $x := \pi^{\perp} y$, то получим $\pi T \pi^{\perp} = 0$ или, что то же, $\pi T = \pi T \pi$. Значит, оператор T нерасширяющий согласно 10.2.7 (3). Наоборот, для нерасширяющего оператора T ввиду 10.2.7 (4) будет $\pi T = T \pi$, откуда видно, что из $\pi x = 0$ следует $\pi T x = 0$. $\triangleright$

(2) *Модули $\mathrm{End}_N(G)$ и $\mathrm{End}_{\mathbb{R}^\wedge}(\mathscr{R}){\downarrow}$ изоморфны. Изоморфизм можно установить путем сопоставления нерасширяющему оператору его подъема.*

$\triangleleft$ Оператор $T \in \mathrm{End}_N(G)$ экстенсионален ввиду (1), а по теореме 5.5.6 он имеет подъем $\tau := T{\uparrow}$, который представляет собой единственную функцию из $\mathscr{R}$ в $\mathscr{R}$, удовлетворяющую условию $[\![\tau(x) = Tx]\!] = \mathbb{1}$ $(x \in G)$. Используя это условие и определения из 10.1.3, можно написать

$$\tau(x \oplus y) = T(x + y) = Tx + Ty = \tau(x) \oplus \tau(y) \quad (x, y \in G),$$
$$\tau(\lambda^\wedge \odot x) = T(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot Tx = \lambda^\wedge \odot \tau(x) \quad (x \in G, \ \lambda \in \mathbb{R}).$$

Отсюда видно, что $[\![\tau : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ — $\mathbb{R}^\wedge$-линейная функция$]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $[\![\tau \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}^\wedge}(\mathscr{R})]\!] = \mathbb{1}$. Если $\tau \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}^\wedge}(\mathscr{R}){\downarrow}$, то по 5.3.4 спуск $\tau{\downarrow} : G \to G$ — экстенсиональное отображение. В точности те же соображения, что и выше, убеждают, что $\mathbb{R}^\wedge$-линейность τ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ влечет линейность оператора $\tau{\downarrow}$. С учетом (1) заключаем, что $\tau{\downarrow}$ — нерасширяющий оператор. Из правил сокращения стрелок 5.5.7 (2, 3) вытекает биективность модулей $\mathrm{End}_N(G)$ и $\mathrm{End}_{\mathbb{R}^\wedge}(\mathscr{R}){\downarrow}$. Эта биекция является модульным изоморфизмом, что легко усматривается из следующих равенств:

$$(S + T){\uparrow}x = (S + T)x = Sx + Tx = S{\uparrow}x \oplus T{\uparrow}x = (S{\uparrow} \oplus T{\uparrow})x \quad (x \in G);$$
$$(\alpha \cdot S){\uparrow}x = (\alpha \cdot S)x = \alpha \cdot (Sx) = \alpha \odot (S{\uparrow}x) = (\alpha \odot S{\uparrow})x \quad (\alpha, x \in G).$$

В этих соотношениях символами $\oplus$ и $\odot$ обозначены как кольцевые операции в $\mathbb{R}^\wedge$, так и модульные операции в $\mathrm{End}_{\mathbb{R}^\wedge}(\mathscr{R}){\downarrow}$. То же относится и к использованию символов $+$ и $\cdot$ в G и $\mathrm{End}_N(G)$. $\triangleright$

10.7.3. В предложении 10.7.2 (2) мы столкнулись с ситуацией, в которой в поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ выделено упорядоченное подполе $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$. При этом $\mathbb{R}$ является векторным пространством над полем $\mathbb{P}$ и, значит, имеет какой-нибудь базис Гамеля $\mathscr{E}$. Множество всех $\mathbb{P}$-линейных функций в $\mathbb{R}$ мы обозначим символом $\mathrm{End}_{\mathbb{P}}(\mathbb{R})$.

(1) *Общая форма $\mathbb{P}$-линейной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дается формулой*

$$f(x) = \sum_{e \in \mathscr{E}} x_e \varphi(e), \quad x = \sum_{e \in \mathscr{E}} x_e e,$$

где вторая формула выражает разложение x по базису Гамеля $\mathscr{E}$, а $\varphi : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, принимающая лишь конечное число ненулевых значений.

$\lhd$ Выводится непосредственно из определения и свойств базиса Гамеля. $\rhd$

(2) *Пусть $\mathbb{P}$ — плотное подполе поля $\mathbb{R}$. Произвольная $\mathbb{P}$-линейная функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ допускает представление $f(x) = cx$ $(x \in \mathbb{R})$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда она ограничена сверху или снизу на некотором интервале $]a, b[\subset \mathbb{R}$, $a < b$.*

$\lhd$ Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности этого несложного утверждения предположим, что функция f ограничена сверху числом M на интервале $]a, b[$. Тогда открытое множество $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 :\ a < s < b,\ M < t\}$ не имеет общих точек с графиком f. Следовательно, график f не может быть плотным в $\mathbb{R}^2$. Поэтому нам осталось установить, что если функция f не допускает требуемого представления, то ее график плотен в $\mathbb{R}^2$.

Итак, пусть для некоторых ненулевых чисел x_1 и x_2 равенство $f(x_1)/x_1 = f(x_2)/x_2$ нарушается. Тогда векторы $\mathbf{p}_1 := (x_1, f(x_1))$ и $\mathbf{p}_2 := (x_2, f(x_2))$ линейно независимы и служат базисом для $\mathbb{R}^2$ (над полем $\mathbb{R}$). В силу плотности $\mathbb{P}$ произвольный вектор из $\mathbb{R}^2$ можно приблизить вектором вида $r_1\mathbf{p}_1 + r_2\mathbf{p}_2$ с коэффициентами $r_1, r_2 \in \mathbb{P}$. В то же время имеют место соотношения

$$r_1\mathbf{p}_1 + r_2\mathbf{p}_2 = r_1(x_1, f(x_1)) + r_2(x_2, f(x_2)) = (r_1x_1 + r_2x_2, f(r_1x_1 + r_2x_2)),$$

из которых видно, что множество $\{(x, f(x)) :\ x = r_1x_1 + r_2x_2,\ (r_1, r_2) \in \mathbb{P}^2\}$, содержащееся в графике функции f, плотно в $\mathbb{R}^2$. $\rhd$

10.7.4. Теперь приведем два следствия для нерасширяющих операторов, которые получаются из 10.7.2 (2) и булевозначной интерпретацией 10.7.3 (2).

(1) *Нерасширяющий оператор $T \in \operatorname{End}_N(G)$ порядково ограничен в том и только в том случае, когда T имеет представление $Tx = g \cdot x$ $(x \in G)$ для некоторого фиксированного $g := g_T \in G$.*

$\lhd$ Нужно лишь заметить, что подъем в 10.7.2 (2) сохраняет свойство порядковой ограниченности, и применить 10.7.3 (2) внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. $\rhd$

(2) *Для того чтобы каждый нерасширяющий линейный оператор в $G := \mathscr{R}{\downarrow}$ был порядково ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{R} = \mathbb{R}^{\wedge}{\downarrow}$.*

$\lhd$ $\leftarrow$: Если $\mathbb{R}^{\wedge}$ совпадает с полем вещественных чисел $\mathscr{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то $\operatorname{End}_{\mathbb{R}^{\wedge}}(\mathscr{R})$ — множество всех линейных функций в $\mathscr{R}$. Но линейная функция в $\mathscr{R}$ имеет вид $f(x) = cx$ $(x \in \mathscr{R})$. Значит, $\operatorname{End}_N(G)$ состоит из порядково ограниченных операторов согласно (1).

Наоборот, если $\mathbb{R}^{\wedge} \neq \mathscr{R}$, то каждый базис Гамеля $\mathscr{E}$ векторного пространства $\mathscr{R}$ над полем $\mathbb{R}^{\wedge}$ содержит хотя бы два различных элемента $e_1 \neq e_2$. Определив функцию $f_0 : \mathscr{E} \to \mathscr{R}$ так, чтобы $f_0(e_1)/e_1 \neq f_0(e_2)/e_2$, можно продолжить ее до линейной функции $f : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$, которая не может быть ограниченной в соответствии с 10.7.3 (2). Но тогда спуск доставляет нерасширяющий линейный оператор, который не будет порядково ограниченным (см. 10.7.2 (2)). $\rhd$

10.7.5. Элемент $e \in G^+$ именуют *локально постоянным относительно* $f \in G^+$, если $e = \sup_{\xi\in\Xi} \lambda_\xi \pi_\xi f$ для некоторого числового семейства $(\lambda_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и семейства $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов в G. Расширенное K-пространство G называют *локально одномерным*, если все элементы G^+

являются локально постоянными относительно $\mathbb{1}$. Как видно, G будет локально одномерным в том и только в том случае, когда все элементы G^+ являются локально постоянными относительно произвольной порядковой единицы $e \in G$. В самом деле, достаточность очевидна, а для обоснования необходимости нужно заметить, что для произвольного $x \in G^+$ можно выбрать разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ так, чтобы элементы $\pi_\xi x$ и $\pi_\xi e$ были ненулевыми кратными элемента $\pi_\xi \mathbb{1}$, если только $\pi_\xi x$ отличен от нуля. Но тогда $\pi_\xi x$ будет кратным элемента $\pi_\xi e$.

(1) *Для того чтобы K-пространство $G := \mathscr{R}{\downarrow}$ было локально одномерно, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{R} = \mathbb{R}^\wedge$.*

$\lhd$ Согласно 5.2.3 (3) равенство $[\![\mathscr{R} = \mathbb{R}^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ имеет место лишь в том случае, когда $G = \mathbb{R}^\wedge{\downarrow}$. Значит, нужно только убедиться, что локальная одномерность G равносильна равенству $G = \mathbb{R}^\wedge{\downarrow}$. Напомним (см. 5.1.1), что $\mathbb{R}^\wedge{\downarrow}$ состоит из всех перемешиваний вида $\operatorname{mix}_{t\in\mathbb{R}}(b_t t^\wedge)$, где $(b_t)_{t\in\mathbb{R}}$ — разбиение единицы в B. Отсюда с учетом 10.3.6 вытекает эквивалентность равенства $G = \mathbb{R}^\wedge{\downarrow}$ возможности представления каждого элемента $x \in G$ в виде $o\text{-}\sum_{t\in\mathbb{R}} \chi(b_t)t\mathbb{1}$ для подходящего разбиения единицы $(b_t)_{t\in\mathbb{R}}$ в B. Последнее же равносильно условию локальной одномерности G, так как, полагая $\pi_t := \chi(b_t)$, указанное представление можно записать в виде

$$x = \sum_{t\in\mathbb{R},\, t>0} t\pi_t\mathbb{1} + \sum_{t\in\mathbb{R},\, t<0} t\pi_t\mathbb{1} = \sup_{t\in\mathbb{R},\, t>0} t\pi_t\mathbb{1} - \sup_{t\in\mathbb{R},\, t<0} (-t)\pi_t\mathbb{1},$$

причем $x^+ = \sup\{t\pi_1\mathbb{1} : t \in \mathbb{R},\, t > 0\}$ и $x^- = \sup\{-t\pi_1\mathbb{1} : t \in \mathbb{R},\, t < 0\}$. $\rhd$

(2) *Расширенное K-пространство G локально одномерно в том и только в том случае, когда любой линейный нерасширяющий оператор в нем порядково ограничен.*

$\lhd$ Следует из (1) и 10.7.4 (2). $\rhd$

10.7.6. Теорема. *Для произвольной полной булевой алгебры B равносильны следующие утверждения*:

(1) $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{R} = \mathbb{R}^\wedge$;

(2) *B является σ-дистрибутивной*;

(3) *K-пространство $B(\mathbb{R}) := \mathscr{R}{\downarrow}$ локально одномерно*;

(4) *в K-пространстве $B(\mathbb{R}) := \mathscr{R}{\downarrow}$ каждый нерасширяющий линейный оператор порядково ограничен.*

$\lhd$ Эквивалентности (1) $\leftrightarrow$ (3) и (1) $\leftrightarrow$ (4) были установлены в 10.7.4 (2) и 10.7.5 (1). Докажем (1) $\leftrightarrow$ (2).

(2) $\to$ (1): Допустим что булева алгебра B является σ-дистрибутивной. Тогда на основании 9.2.6 $\mathscr{P}(\omega^\wedge) = \mathscr{P}(\omega)^\wedge$. Согласно 10.3.1 (3) верно также $\mathscr{P}(\mathbb{Q}^\wedge) = \mathscr{P}(\mathbb{Q})^\wedge$. Заметим далее, что для любых двух множеств $a \subset \mathbb{Q}$ и $\bar{a} \subset \mathbb{Q}$ имеет место эквивалентность:

$$(a, \bar{a}) \text{ — дедекиндово сечение } \leftrightarrow [\![(a^\wedge, \bar{a}^\wedge) \text{ — дедекиндово сечение}]\!] = \mathbb{1}.$$

В самом деле, ограничена формула $\varphi(a, \bar{a}, \mathbb{Q})$, утверждающая, что множества $a \subset \mathbb{Q}$ и $\bar{a} \subset \mathbb{Q}$ образуют сечение, и поэтому можно применить 4.2.9 (2).

Докажем, что

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{R} \subset \mathbb{R}^\wedge.$$

В силу 4.3.8 для этого нужно лишь показать, что если $[\![t \in \mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}$, то $[\![t \in \mathbb{R}^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Пусть $[\![t \in \mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}$, т. е. t — дедекиндово сечение внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда внутри $\mathbb{V}^{(B)}$

справедлива формула:

$$(\exists\, a \in \mathscr{P}(\mathbb{Q}^\wedge))(\exists\, \bar a \in \mathscr{P}(\mathbb{Q}^\wedge))\varphi(a, \bar a, \mathbb{Q}^\wedge) \wedge t = (a, \bar a).$$

Вычисление булевой оценки этой формулы с учетом отмеченного выше соотношения $\mathscr{P}(\mathbb{Q}^\wedge) = \mathscr{P}(\mathbb{Q})^\wedge$ и правил 4.6.8 и 5.1.2 дает

$$\mathbb{1} = \bigvee_{a\subset\mathbb{Q}} \bigvee_{\bar a\subset\mathbb{Q}} [\![\varphi(a^\wedge, \bar a^\wedge, \mathbb{Q}^\wedge)]\!] \wedge [\![t = (a, \bar a)^\wedge]\!].$$

Подберем разбиение единицы $(b_\xi) \subset B$ и два семейства (a_ξ) и $(\bar a_\xi)$ в $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$ так, чтобы

$$b_\xi \leqslant [\![\varphi(a_\xi^\wedge, \bar a_\xi^\wedge, \mathbb{Q}^\wedge)]\!] \wedge [\![t = (a_\xi, \bar a_\xi)^\wedge]\!].$$

Отсюда следует, что $t = \operatorname{mix}_\xi b_\xi (a_\xi, \bar a_\xi)^\wedge$ и $b_\xi \leqslant [\![\varphi(a_\xi^\wedge, \bar a_\xi^\wedge, \mathbb{Q}^\wedge)]\!]$. Если $b_\xi \neq \mathbb{0}$, то в силу 4.2.3 (2) будет $[\![\varphi(a_\xi^\wedge, \bar a_\xi^\wedge, \mathbb{Q}^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$, так как для ограниченной формулы $\psi(v_1, \dots, v_n)$ булева оценка $[\![\psi(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge]\!] \in B$ при любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ принимает лишь два значения $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$ ввиду правил преобразования булевых оценок относительно полных булевых гомоморфизмов 4.2.3 (2). Согласно 4.2.9 (2) справедлива $\varphi(a_\xi, \bar a_\xi, \mathbb{Q})$, т. е. $(a_\xi, \bar a_\xi)$ — дедекиндово сечение. Теперь ясно, что $b_\xi \leqslant [\![t = (a_\xi, \bar a_\xi)^\wedge \in \mathbb{R}^\wedge]\!]$ и поэтому $[\![t \in \mathbb{R}^\wedge]\!] = \mathbb{1}$.

(1) $\to$ (2): Предположим, что $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{R} = \mathbb{R}^\wedge$. Положим

$$\mathbb{I} := \{t \in \mathbb{R} :\ 0 < t < 1,\ t \text{ иррационально}\},$$
$$\mathscr{I} := \{t \in \mathscr{R} :\ 0 < t < 1,\ t \text{ иррационально}\}.$$

В силу нашего предположения внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ выполняется $\mathscr{I} = \mathbb{I}^\wedge$.

Известно, что существует биекция $\lambda : \mathbb{I} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, которая сопоставляет числу t последовательность неполных частных $\lambda(t) = a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ его разложения в цепную дробь:

$$t = \cfrac{1}{a(1) + \cfrac{1}{a(2) + \cfrac{1}{a(3) + \dots}}}.$$

Для последовательностей $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $s : \mathbb{N} \to \mathbb{I}$ рассмотрим ограниченную формулу $\varphi(a, s, t, \mathbb{N})$, утверждающую, что $s(1) = t^{-1}$ и при всех $n \in \mathbb{N}$ имеют место соотношения

$$a(n) = \left[\frac{1}{s(n)}\right], \quad s(n+1) = \frac{1}{s(n)} - a(n),$$

где $[\alpha]$ — целая часть числа $0 < \alpha \in \mathscr{R}$, выражаемая ограниченной формулой $\psi(\alpha, [\alpha], \mathbb{N})$:

$$[\alpha] \in \mathbb{N} \wedge [\alpha] \leqslant \alpha \wedge (\forall\, n \in \mathbb{N})(n \leqslant \alpha \to n \leqslant [\alpha]).$$

Тогда равенство $\lambda(t) = a$ означает существование последовательности $s : \mathbb{N} \to \mathbb{I}$, для которой выполняется $\varphi(a, s, t, \mathbb{N})$. Биекцию λ мы назовем *разложением в цепную дробь*. По принципу переноса внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ существует разложение в цепную дробь $\tilde\lambda : \mathscr{I} \to (\aleph_0)^{\aleph_0}$. Покажем, что ограничение $\tilde\lambda$ на $\mathbb{I}^\wedge$ совпадает с $\lambda^\wedge$, т. е. внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ выполняется $(\forall\, t \in \mathbb{I}^\wedge)\tilde\lambda(t) = \lambda^\wedge(t)$. Последнее верно лишь тогда, когда для каждого $t \in \mathbb{I}$ справедливо $\tilde\lambda(t^\wedge) = \lambda(t)^\wedge$. В силу данного выше определения биекции $\tilde{\lambda}$ нужно обосновать справедливость внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ формулы: $(\exists\, s \in \mathscr{I}^{\mathbb{N}^\wedge})\varphi(\lambda(t)^\wedge, s, t^\wedge, \mathbb{N}^\wedge)$.

По определению λ существует последовательность $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{I}$, для которой выполнено $\varphi(\lambda(t), \sigma, t, \mathbb{N})$. Ввиду ограниченности формулы φ выполняется также $\mathbb{1} = [\![\varphi(\lambda(t)^\wedge, \sigma^\wedge, t^\wedge,\ \mathbb{N}^\wedge)]\!]$. Заметим, что $\sigma^\wedge : \mathbb{N}^\wedge \to \mathbb{I}^\wedge \subset \mathscr{I}$, т. е. $[\![\sigma^\wedge \in \mathscr{I}^{\mathbb{N}^\wedge}]\!] = \mathbb{1}$. Суммируя сказанное, можно написать

$$[\![(\exists\, s \in \mathscr{I}^{\mathbb{N}^\wedge})\varphi(\lambda(t)^\wedge, s, t^\wedge, \mathbb{N}^\wedge)]\!] \geqslant [\![\varphi(\lambda(t)^\wedge, \sigma^\wedge, t^\wedge, \mathbb{N}^\wedge)]\!] = \mathbb{1}.$$

Таким образом, $\tilde{\lambda}$ и $\lambda^\wedge$ — биекции, $\lambda^\wedge$ продолжает $\tilde{\lambda}$ и образы у них совпадают. Ясно, что тогда совпадают и области определения (и вообще $\tilde{\lambda} = \lambda^\wedge$). Значит, $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\wedge = (\mathbb{N}^\wedge)^{\mathbb{N}^\wedge}$. Отсюда вытекает σ-дистрибутивность B в силу 9.2.6. $\triangleright$

10.7.7. В связи с теоремой 10.7.6 возникает естественный вопрос: существуют ли безатомные локально одномерные расширенные пространства Канторовича? Разумеется, он равносилен вопросу о существовании безатомной σ-дистрибутивной полной булевой алгебры. В следующих двух пунктах такая алгебра будет построена.

Булеву алгебру B называют *σ-индуктивной*, если любая убывающая последовательность ненулевых элементов B имеет ненулевую нижнюю границу. Напомним, что подалгебру B_0 булевой алгебры B называют *плотной* или *минорантной*, если множество $B_0\backslash\{0\}$ коинициально в $B\backslash\{0\}$ (или, что эквивалентно, множество $B_0\backslash\{1\}$ конфинально $B\backslash\{1\}$), т. е. для любого ненулевого элемента $b \in B$ существует ненулевой элемент $b_0 \in B_0$ такой, что $b_0 \leqslant b$.

(1) *Произвольная σ-полная булева алгебра B является σ-дистрибутивной в том и только в том случае, если в любую последовательность счетных покрытий B можно вписать некоторое* (*возможно несчетное*) *покрытие.*

$\triangleleft$ См. 9.2.3. $\triangleright$

(2) *Если σ-полная булева алгебра содержит σ-индуктивную плотную подалгебру, то она σ-дистрибутивна.*

$\triangleleft$ Пусть B — некоторая σ-полная булева алгебра и B_0 — ее σ-индуктивная плотная подалгебра. Рассмотрим произвольную последовательность $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ счетных покрытий алгебры B. Обозначим буквой C множество всех элементов B, вписанных в каждое из покрытий $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, и предположим, вопреки доказываемому, что C не является покрытием алгебры B. Тогда существует ненулевой элемент $b \in B$, дизъюнктный всем элементам из C.

Построим по индукции последовательности $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ следующим образом. Пусть c_1 — такой элемент C_1, что $b \wedge c_1 \neq \mathbb{0}$. В силу плотности B_0 имеется элемент $b_1 \in B_0$, удовлетворяющий неравенствам $\mathbb{0} < b_1 \leqslant b \wedge c_1$. Предположим, что элементы b_n и c_n построены. Пусть c_{n+1} — такой элемент C_{n+1}, что $b_n \wedge c_{n+1} \neq \mathbb{0}$. В качестве b_{n+1} мы возьмем произвольный элемент B_0, удовлетворяющий неравенствам $\mathbb{0} < b_{n+1} \leqslant b_n \wedge c_{n+1}$.

Значит, построены такие последовательности $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что $b_n \in B_0$, $b_n \leqslant c_n \in C_n$ и $\mathbb{0} < b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Ввиду условия σ-индуктивности алгебры B_0 в ней имеется такой ненулевой элемент b_0, что $b_0 \leqslant b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу неравенств $b_0 \leqslant c_n$ элемент b_0 вписан в каждое покрытие из последовательности $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, т. е. принадлежит множеству C. В то же время $b_0 \leqslant b$, что противоречит дизъюнктности b всем элементам из C. $\triangleright$

10.7.8. Как известно, для любой булевой алгебры B существует полная булева алгебра $\overline{B}$, содержащая B как плотную подалгебру. Алгебра $\overline{B}$ единственна с точностью до изоморфизма и ее называют пополнением алгебры B (см. 2.2.8). Очевидно, пополнение безатомной алгебры безатомно. Кроме того, в силу 10.7.7 пополнение σ-индуктивной алгебры σ-дистрибутивно. Поэтому для доказательства существования безатомной σ-дистрибутивной полной булевой алгебры достаточно указать произвольную безатомную σ-индуктивную булеву алгебру. Приведем одну из наиболее простых конструкций, приводящую к такой алгебре.

Пусть B — булева алгебра всех подмножеств $\mathbb{N}$, а I — идеал B, состоящий из всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$. Тогда фактор-алгебра B/I (см. 2.2.4) безатомна и σ-индуктивна.

$\lhd$ Безатомность алгебры B/I очевидна. Для доказательства σ-индуктивности этой алгебры достаточно рассмотреть произвольную убывающую последовательность $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ бесконечных подмножеств $\mathbb{N}$ и построить такое бесконечное множество $b \subset \mathbb{N}$, что разность $b\backslash b_n$ конечна для всех $n \in \mathbb{N}$. Такое множество $b = \{m_n : n \in \mathbb{N}\}$ легко построить посредством индукции, положив $m_1 := \min b_1$ и $m_{n+1} := \min\{m \in b_{n+1} : m > m_n\}$. $\rhd$

10.8. Комментарии

10.8.1. (1) В истории математики возникновение теории упорядоченных векторных пространств связывают с именами Г. Биркгофа, Л. В. Канторовича, М. Г. Крейна, Х. Накано, Ф. Рисса, Г. Фрейденталя и др. Теория упорядоченных векторных пространств составляет важное математическое направление, став одним из основных разделов современного функционального анализа. Теории векторных решеток — основному разделу теории упорядоченных векторных пространств — и ее многочисленным приложениям посвящено большое количество монографий (см., например, книги Г. П. Акилова и С. С. Кутателадзе [7], К. Алипрантиса и О. Бёркиншо [184, 185], Й.-Ч. Вонга и К.-Ф. Нга [402], Б. З. Вулиха [35], Г. Джеймсона [253], Е. де Йонга и А. ван Ружа [261], Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [72], Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера [73], М. А. Красносельского [86], М. А. Красносельского, Е. А. Лифшица и А. В. Соболева [87], А. Г. Кусраева [97], А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [115, 116], С. С. Кутателадзе и А. М. Рубинова [129], Й. Линденштраусса и Л. Цафрири [292], Э. Лэси [281], В. Люксембурга и А. Цаанена [297], П. Мейер-Ниберга [311], Д. Фремлина [229], Г.-У. Шварца [370], Х. Шефера [367], А. Цаанена [408, 409]. Отметим также обзорные статьи А. В. Бухвалова [24], А. В. Бухвалова, А. И. Векслера и В. А. Гейлера [25], А. В. Бухвалова, А. И. Векслера и Г. Я. Лозановского [26], в каждой из которых имеется богатая библиография.

(2) Порядково (дедекиндово) полные векторные решетки, т. е. K-пространства, выделил и начал изучать Л. В. Канторович. Это было сделано в его самой первой основополагающей работе на эту тему [66], где он писал: «*В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы*». Здесь Л. В. Канторович сформулировал важную методологическую установку — *эвристический принцип переноса*, согласно которому элементы K-пространства — суть обобщенные числа.

(3) Принцип Л. В. Канторовича нашел многочисленные подтверждения как в его собственных исследованиях, так и в работах его учеников и последователей (см. монографии Б. З. Вулиха [35], а также Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера [73]). Уже в начальный период развития теории K-пространств предпринимались попытки формализации имеющихся эвристических соображений. На этом пути возникли так называемые *теоремы о сохранении соотношений,* которые утверждают, что если какое-то предложение, включающее конечное число функциональных соотношений, доказано для вещественных чисел, то аналогичный факт автоматически верен и для элементов каждого K-пространства (см. [35] и [73]). В то же время долгие годы оставались совершенно неясными внутренний механизм, управляющий феноменом сохранения соотношений, и границы его применимости, равно как и общие причины аналогий и параллелей между теорией векторных решеток и классической теорией вещественных функций. Глубина и универсальность принципа Канторовича получили полное разъяснение только в рамках булевозначного анализа (см. книги Е. И. Гордона [45], А. Г. Кусраева [97], А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [111]).

10.8.2. (1) Основы теории регулярных операторов в K-пространствах были заложены в работе Л. В. Канторовича [67]. В этой же работе впервые появилась теорема Рисса — Канторовича (см. 10.2.2). Ф. Рисс [360] в своем знаменитом докладе на Международном математическом конгрессе в Болонье в 1928 году сформулировал аналогичное утверждение для пространства непрерывных линейных функционалов на векторной решетке $C[a, b]$, вписав тем самым свое имя в число основателей теории упорядоченных векторных пространств.

(2) Ю. А. Абрамович [2] развил вариант исчисления регулярных операторов (см. 10.2.3), в котором супремумы и инфимумы взяты по разбиениям аргумента на дизъюнктные части. Для модуля регулярного оператора этот факт был установлен независимо В. Люксембургом и А. Цааненом [298], см. также работы К. Алипрантиса и О. Бёркиншо [185], А. В. Бухвалова, В. Б. Короткова, А. Г. Кусраева, С. С. Кутателадзе и Б. М. Макарова [27], А. Цаанена [408].

(3) Теорему 10.2.5 (2) установили Р. Кристеску, Т. Огасавара и А. Г. Пинскер, см. у К. Алипрантиса и О. Бёркиншо [185], Б. З. Вулиха [35]. Основные свойства решеточных гомоморфизмов собраны в книге [185].

(4) Теория ортоморфизмов восходит к Х. Накано [321]. Ортоморфизмы изучались многими авторами под различными именами: *дилататоры* (Х. Накано [321]), *существенно положительные операторы* (Г. Биркгоф [16]), *эндоморфизмы, сохраняющие поляры* (П. Конрад и Дж. Дием [205]), *операторы умножения* (Р. Бак [200] и Э. Викстед [401]) и *стабилизаторы* (М. Мейер [310]). Основные этапы становления теории ортоморфизмов отражены в книгах К. Алипрантиса и О. Бёркиншо [185], А. Бигарда, К. Кеймела и С. Вольфенштейна [195], А. Цаанена [408]; см. также обзор А. В. Бухвалова [24]. Результаты об ортоморфизмах, приведенные в настоящей книге, заимствованы из [185, 408].

(5) Оператор минимального продолжения из 10.2.10 и его свойства хорошо известны (см., например, [185]).

10.8.3. (1) Булевозначный статус понятия K-пространства установлен теоремой Гордона 10.3.4, полученной в [41]. Этот факт можно переформулировать и так: *Расширенное K-пространство есть интерпретация поля вещественных чисел в подходящей булевозначной модели.* При этом оказывается, что любая теорема о вещественных числах (в рамках теории ZFC) имеет свой аналог для соответствующего K-пространства. Перевод одних теорем в другие можно осуществить посредством точно определенных процедур: *подъем*, *спуск*, *каноническое вложение*, т. е., по сути дела, алгоритмически. Тем самым установка Канторовича «элементы K-пространства — суть обобщенные числа» обретает в булевозначном анализе четкую математическую формулировку. При этом эвристический принцип переноса, игравший вспомогательную наводящую роль во многих исследованиях в добулевозначной теории K-пространств, с помощью техники булевозначных моделей превращается в точный и строгий исследовательский метод.

(2) Приложения булевозначных моделей теории множеств к функциональному анализу начались с работ Е. И. Гордона [41, 42] и Г. Такеути [384]–[386]. Фундаментальный вклад этих авторов в булевозначный анализ отражен в публикациях [41]–[45] и [384]–[390]. Если в 10.3.4 B — это алгебра измеримых множеств по модулю множеств ненулевой меры μ, то $\mathscr{R}{\downarrow}$ изоморфно расширенному K-пространству измеримых функций $L^0(\mu)$. Этот факт (для лебеговой меры на отрезке) был известен еще Д. Скотту и Р. Соловею (см. [377]). Если B — полная булева алгебра проекторов в гильбертовом пространстве, то $\mathscr{R}{\downarrow}$ изоморфно пространству тех самосопряженных операторов, у которых спектральная функция действует в B. Указанные два частных случая теоремы Гордона интенсивно и плодотворно эксплуатировал Г. Такеути (см. [384] и библиографию в [107]). Объект $\mathscr{R}{\downarrow}$ для общих булевых алгебр изучал также Т. Йех [255]–[257], переоткрыв по существу теорему Гордона. Отличие состоит в том, что в [160] (комплексное) расширенное K-пространство с единицей определено другой системой аксиом и названо полной стоуновой алгеброй. Различные приложения булевозначных моделей в функциональном анализе см. в обзорах А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [276]–[279] (см. также работу С. С. Кутателадзе [280]).

(3) Взаимосвязи свойств числовых объектов и соответствующих объектов в K-пространстве $\mathscr{R}{\downarrow}$, приведенные в 10.3.6–10.3.11, с несущественными модификациями были получены Е. И. Гордоном [41, 42].

10.8.4. (1) Теоремы о булевозначной реализации векторной решетки (10.4.1 и 10.4.2) получены А. Г. Кусраевым [99]. Близкий результат (в других терминах) установил также Т. Йех в работе [257], где развита техника булевозначной интерпретации линейно упорядоченных множеств. Следствия 10.4.3 (3), 10.4.4, 10.4.5 хорошо известны, см. книги Б. З. Вулиха [35], Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера [73].

(2) Понятие максимального расширения K-пространства другим способом было введено А. Г. Пинскером (см. [73]). Им было установлено, в частности, существование максимального расширения у каждого K-пространства.

(3) Теорема 10.4.6 (1) была установлена А. И. Юдиным, см. [35]. Формула $oX = rdX$ из 10.4.6 (2) была получена А. И. Векслером [29].

(4) Критерии 10.4.8 $(2, 4)$ для o-сходимости (в случае последовательностей) были получены Л. В. Канторовичем и Б. З. Вулихом (см. [73]). Как видно из 10.4.8, эти критерии являются всего лишь булевозначной интерпретацией свойств сходящихся числовых сетей (последовательностей).

(5) Как уже было отмечено в (1), первоначальные попытки формализации принципа Канторовича приводили к теоремам о сохранении соотношений (см. монографии Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера [73] и Б. З. Вулиха [35]). Современные формы теорем о сохранении соотношений на основе техники булевозначных моделей можно найти в работах Е. И. Гордона [43] и Т. Йеха [256] (см. также монографии А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [111, 113]).

10.8.5. (1) Пространство непрерывных функций $C(Q) := C(Q,\mathbb{R})$ на компакте Q является векторной решеткой и кольцом одновременно. В $C(Q)$ всякий порядковый идеал будет кольцевым идеалом, но обратное не имеет места. Для более близкого знакомства с теорией пространств $C(Q)$ можно рекомендовать монографии Л. Гильмана и М. Джерисона [234], З. Семадени [372]. Подробнее о пространстве $C_\infty(Q)$ см. у Б. З. Вулиха [35]. Содержание пункта 10.5.3 имеется у Г.-У. Шварца [370].

(2) Тот факт, что соответствующим образом структурированное множество $\mathfrak{K}(B)$ всех разложений единицы полной булевой алгебры B представляет собой расширенное K-пространство, база которого изоморфна B (см. 10.5.7 и 10.5.8), установил Л. В. Канторович [73]. Из 10.4.1, 10.4.3 (1) и 10.5.8 вытекает следующий факт, впервые полученный А. Г. Пинскером (см. [73]): *если E — это K_σ-пространство с порядковой единицей $\mathbb{1}$ и $B := \mathfrak{E}(\mathbb{1})$, то отображение, переводящее элемент $x \in E$ в спектральную функцию $\lambda \mapsto e^x_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, является изоморфизмом E на порядково плотный идеал $\mathfrak{K}(B)$. Если E — расширенное K_σ-пространство, то E и $\mathfrak{K}(B)$ изоморфны.* Представление произвольного K-пространства в виде фундамента $C_\infty(Q)$ (см. 10.5.10) установлено независимо Б. З. Вулихом и Т. Огасаварой (см. [35, 73]).

10.8.6. (1) Из 10.6.7 вытекает следующее: *Для любого разложения единицы $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ со значениями в σ-алгебре B существует единственная спектральная мера $\mu : \mathscr{B}or(\mathbb{R}) \to B$ такая, что $\mu((-\infty,\alpha)) = e_\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.* Этот факт впервые указал В. И. Соболев в [162]. Однако в [162] предполагалось, что такую меру можно получить методом продолжения Каратеодори. Как показал Д. А. Владимиров [32], для полной булевой алгебры счетного типа продолжение по Каратеодори возможно лишь в том случае, когда она регулярна. Итак, метод продолжения, приводящий к 10.6.7, существенно отличается от продолжения по Каратеодори и основан на представлении Люмиса — Сикорского булевых σ-алгебр. Дальнейшие сведения о продолжении мер со значениями в векторных решетках см. у А. Г. Кусраева [107], А. Г. Кусраева и С. А. Малюгина [117].

(3) Борелевские функции от элементов произвольного K-пространства с единицей, по всей видимости, впервые были рассмотрены В. И. Соболевым (см. [35, 162]). Теоремы 10.6.9 и 10.6.10 в приведенной общности получены в работах А. Г. Кусраева и С. А. Малюгина [117, 119]. В частности, в [119] построено борелевское функциональное исчисление (счетных и несчетных) наборов элементов произвольного K-пространства. Булевозначное доказательство теоремы 10.6.10 приведено также у Т. Йеха в [160]. Дальнейшие детали можно найти в книгах А. Г. Кусраева [107], А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [111].

(4) Понятия порядковой единицы, осколка, спектральной функции элемента были введены Г. Фрейденталем. Он же установил теорему 10.6.12 (см. книги Б. З. Вулиха [35], Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера [73]).

10.8.7. (1) Так как внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ пространство $\mathbb{R}^\wedge$-линейных функций в $\mathscr{R}$ допускает полное описание через базис Гамеля, то и пространство $\mathrm{End}_N(\mathscr{R}{\downarrow})$ может быть полностью описано с использованием строгого локального базиса Гамеля. Однако при этом обычно возникают некоторые проблемы с однозначностью.

(2) Размерность $\delta(\mathscr{R})$ векторного пространства $\mathscr{R}$ над полем $\mathbb{R}^\wedge$ является кардиналом внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Объект $\delta(\mathscr{R})$ содержит важную информацию о связи булевой алгебры и множества вещественных чисел. Ввиду свойств булевозначных ординалов имеет место представление $\delta(\mathscr{R}) = \mathrm{mix}_\xi(b_\xi \alpha_\xi^\wedge)$, где (b_ξ) — разбиение единицы в булевой алгебре B, а (α_ξ) — некоторое семейство стандартных кардиналов. Это представление своего рода «декомпозиционный ряд» булевой алгебры B, причем главные идеалы $[\mathbb{0}, b_\xi]$ α_ξ-однородны в определенном смысле.

(3) Если класс линейных нерасширяющих операторов заменить на класс аддитивных нерасширяющих операторов, то эквивалентность (1) $\leftrightarrow$ (4) в теореме 10.7.6 уже не выполняется. Более того, в любом расширенном K-пространстве существуют нерасширяющие аддитивные неограниченные операторы. Это связано с тем, что ни в какой булевозначной модели неверно $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{R} = \mathbb{Q}^{\wedge}$.

(4) Свойство функции λ, установленное в конце доказательства теоремы 10.7.6, принято называть *абсолютным.* Е. И. Гордон [125] называет непрерывную функцию *абсолютно определимой*, если она обладает аналогичным свойством. Абсолютно определимыми являются функции e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$. В частности, эти же функции существуют внутри булевозначного универсума, как функции из $\mathscr{R}$ в $\mathscr{R}$, и служат продолжениями по непрерывности соответствующих функций $\exp^{\wedge}(\cdot)$, $\ln^{\wedge}(\cdot)$, $\sin^{\wedge}(\cdot)$ и $\cos^{\wedge}(\cdot)$, действующих из $\mathbb{R}^{\wedge}$ в $\mathbb{R}^{\wedge}$. Практически все функции, имеющие конструктивное определение, абсолютно определимы.

(5) Нелинейный оператор $S : E \to E$ назовем нерасширяющим, если для любых, $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ и $x, y \in E$ равенство $\pi x = \pi y$ влечет $\pi S(x) = \pi S(y)$. Если $E = \mathscr{R}{\downarrow}$, то оператор S будет нерасширяющим лишь в том случае, если он экстенсионален, см. теорему 10.3.4. Рассмотрим нерасширяющий оператор $S : \mathscr{R}{\downarrow} \to \mathscr{R}{\downarrow}$, удовлетворяющий экспоненциальному функциональному уравнению Коши $S(x + y) = S(x)S(y)$ для любых $x, y \in \mathscr{R}{\downarrow}$. Если, кроме того, S удовлетворяет условию $S(\lambda x) = S(x)^\lambda$ при любых $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$, то мы будем говорить, что оператор S экспоненциален. Если σ — подъем S, то σ экспоненциален внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Значит, в классе функций, ограниченных сверху на ненулевом интервале, либо $\sigma = 0$, либо $\sigma(x) = e^{cx}$ $(x \in \mathscr{R})$ для некоторого $c \in \mathscr{R}$. Отсюда видно, что условия (1–4) теоремы 10.7.6 равносильны также следующему:

Любой нерасширяющий экспоненциальный оператор в $B(\mathbb{R}) := \mathscr{R}{\downarrow}$ *порядково ограничен (и, следовательно, имеет вид* $S(x) = e^{cx}$ $(x \in \mathscr{R}{\downarrow})$ *при некотором* $c \in \mathscr{R}{\downarrow}$).

(6) Аналогичная ситуация возникает, если отображение S удовлетворяет логарифмическому функциональному уравнению Коши $S(xy) = S(x) + S(y)$ для любых $0 \ll x, y \in \mathscr{R}{\downarrow}$ и условию $S(x^\lambda) = \lambda S(x)$ при любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$. (Соотношение $0 \ll x$ означает, что $0 \leqslant x$ и $x^{\perp\perp} = \mathscr{R}{\downarrow}$.) Такое отображение называют логарифмическим. Тем самым еще одно эквивалентное условие можно сформулировать так:

Любой нерасширяющий логарифмический оператор в $B(\mathbb{R}) := \mathscr{R}{\downarrow}$ *порядково ограничен (и, следовательно, имеет вид* $S(x) = c \ln x$ $(0 \ll x \in \mathscr{R}{\downarrow})$ *при некотором* $c \in \mathscr{R}{\downarrow}$).

(7) Вопрос о том, всякий ли нерасширяющий линейный оператор в расширенном пространстве Канторовича автоматически порядково ограничен, был поставлен Э. В. Викстедом в статье [401]. Первый пример неограниченного нерасширяющего линейного оператора был анонсирован Ю. А. Абрамовичем, А. И. Векслером и А. В. Колдуновым в [3, теорема 1]. Хотя в формулировке этого результата речь шла о недискретном расширенном K-пространстве, доказательство, опубликованное в [4] проведено фактически для расширенных K-пространств, не являющихся локально одномерными. Позже те же авторы [4, теорема 2.1], а также

П. Т. Н. Макполин и Э. В. Викстед [299, теорема 3.2] показали, что все нерасширяющие операторы в расширенном K-пространстве автоматически порядково ограничены в том и только в том случае, если это K-пространство локально одномерно. Тем самым, проблема Э. В. Викстеда была сведена к строению локально одномерных K-пространств. В этой связи в возник вопрос, сформулированный Э. В. Викстедом: не совпадают ли класс локально одномерных K-пространств и класс дискретных K-пространств? Отрицательный ответ, содержащийся в 10.7.6 (см. эквивалентность (2) $\leftrightarrow$ (3)) и 10.7.7, найден А. Е. Гутманом в [240] (см. также [49, 241]). Булевозначный подход к этой проблеме, представленный в 10.7, взят из статьи А. Г. Кусраева [108].

Глава 11
Анализ решеточно нормированных пространств

В этой главе мы рассмотрим строение и свойства векторного пространства с нормой, принимающей свои значения в некоторой векторной решетке. Подобное векторное пространство называют *решеточно нормированным*. Наиболее важные особенности таких пространств связаны со свойством разложимости. Последнее позволяет, в частности, указать полную булеву алгебру линейных проекторов в решеточно нормированном пространстве, которая изоморфна булевой алгебре порядковых проекторов нормирующей решетки. В анализе наиболее распространены решеточно нормированные пространства, составленные из непрерывных или измеримых вектор-функций.

Подобно тому как многие структурные свойства пространства Канторовича — суть свойства поля вещественных чисел в подходящей булевозначной модели, основные свойства решеточно нормированных пространств возникают как булевозначные интерпретации свойств нормированных пространств. Важнейшие взаимосвязи отражены в следующих трех фактах. Во-первых, произвольное банахово пространство внутри булевозначной модели при внешней расшифровке представляет собой расширенное пространство Банаха — Канторовича. Во-вторых, произвольное решеточно нормированное пространство может быть реализовано как плотное подпространство некоторого банахова пространства в подходящей булевозначной модели. В-третьих, банахово пространство X получается из некоторого банахова пространства в булевозначной модели посредством процедуры ограниченного спуска в том и только в том случае, если X содержит полную булеву алгебру проекторов единичной нормы, обладающей свойством цикличности. Последнее равносильно тому, что X — пространство Банаха — Канторовича и норма в X является смешанной. Именно этот факт положен в основу подхода к изучению инволютивных алгебр, который будет представлен в следующей главе.

11.1. Основные определения

Функциональные пространства часто допускают естественную нормировку посредством элементов векторной решетки. Это обстоятельство является определяющим для некоторых структурных свойств изучаемых пространств.

11.1.1. Рассмотрим векторное пространство X и вещественную векторную решетку E. Все рассматриваемые векторные решетки мы считаем архимедовыми. Отображение $\lvert\cdot\rvert : X \to E^{+}$ именуют *векторной* (E*-значной*) *нормой*, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

(1) $\lvert x\rvert = 0 \leftrightarrow x = 0 \quad (x \in X)$;

(2) $|\lambda x| = |\lambda||x| \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ x \in X)$;

(3) $|x+y| \leqslant |x| + |y| \quad (x, y \in X)$.

Отображение $|\cdot|$ называют *разложимой нормой* или *нормой Канторовича*, если кроме (1)–(3) выполнена *аксиома разложимости*:

(4) для любых $e_1, e_2 \in E^+$ и $x \in X$, удовлетворяющих соотношению $|x| = e_1 + e_2$, существуют $x_1, x_2 \in X$ такие, что $x = x_1 + x_2$ и $|x_k| = e_k$ $(k := 1, 2)$.

В том случае, когда условие (4) справедливо лишь для дизъюнктных $e_1, e_2 \in E^+$, норму называют *дизъюнктно разложимой* или, короче, *d-разложимой*.

Тройку $\big(X, |\cdot|, E\big)$ $\big($или, проще, (X, E), $\big(X, |\cdot|\big)$ или X, опуская подразумеваемые параметры$\big)$ называют *решеточно нормированным пространством* (*над* E), если $|\cdot|$ — это E-значная норма на векторном пространстве X. При этом E называют *нормирующей решеткой* пространства X. Если норма $|\cdot|$ разложима (d-разложима), то эпитет разложимое (d-разложимое) относят и к пространству $\big(X, |\cdot|\big)$.

11.1.2. Если $|x| \wedge |y| = 0$, то элементы $x, y \in X$ называют *дизъюнктными* и пишут $x \perp y$.

(1) *Если элементы $x, y \in X$ дизъюнктны, то*

$$|x+y| = |x| + |y|.$$

$\lhd$ В самом деле, из соотношений $|x| \wedge |y| = 0$ и $|x| \leqslant |x+y| + |y|$ выводим:

$$|x| \leqslant \big(|x+y| + |y|\big) \wedge |x| \leqslant |x+y| \wedge |x| \leqslant |x+y|.$$

Аналогично $|y| \leqslant |x+y|$ и поэтому

$$|x| + |y| = |x| \vee |y| \leqslant |x+y|. \rhd$$

(2) *Для любых дизъюнктных элементов $e_1, e_2 \in E$ существует не более одной пары элементов $x_1, x_2 \in X$ со свойствами $x = x_1 + x_2$, $|x_1| = e_1$ и $|x_2| = e_2$.*

$\lhd$ Допустим, что $|x_1| = |y_1| = e_1$, $|x_2| = |y_2| = e_2$ и $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, причем $e_1 \perp e_2$. Тогда $x_1 - y_1 \perp y_2 - x_2$, так как $|x_1 - y_1| \leqslant |x_1| + |y_1| = 2e_1$ и $|x_2 - y_2| \leqslant 2e_2$. В силу (2) выполняется $0 = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ и, следовательно, $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$. $\rhd$

Как и в случае векторной решетки, множество вида $M^\perp := \{x \in X : (\forall\, y \in M)\ x \perp y\}$ мы будем называть *дизъюнктным дополнением* множества M. Без труда можно проверить, что операция взятия дизъюнктного дополнения в решеточно нормированном пространстве обладает свойствами 7.2.10 (1–4), справедливыми для любой дизъюнктности. Множество $M \subset X$ именуют *компонентой* пространства X, если $M = M^{\perp\perp}$. Символ $\mathscr{B}(X)$ обозначает множество всех компонент в X, упорядоченное по включению. Скажем, что $K \in \mathscr{B}(X)$ допускает проектор, если $K \oplus K^\perp = X$. Проектор $h(\pi)$ на компоненту K параллельно компоненте $K^\perp$ называют *порядковым проектором*. Говорят, что X — решеточно нормированное пространство *с проекциями*, если всякая компонента X допускает порядковый проектор. Для единообразия мы часто пишем $\mathfrak{B}(X)$ вместо $\mathscr{B}(X)$ и, допуская вольность, используем терминологию из теории векторных решеток. Однако если X одновременно является и векторной решеткой, то следует проявлять бдительность и избегать возможной путаницы (см. 11.4.1–11.4.3).

Всюду в дальнейшем под *булевой алгеброй проекторов* в векторном пространстве X мы понимаем множество $\mathscr{B}$ коммутирующих идемпотентных линейных операторов, действующих в X, в котором роль нуля и единицы играют соответственно нулевое и тождественное отображения, а булевы операции имеют вид:

$$\pi \wedge \rho := \pi \circ \rho = \rho \circ \pi, \quad \pi \vee \rho = \pi + \rho - \pi \circ \rho, \quad \pi^* = I_X - \pi \quad (\pi, \rho \in \mathscr{B}).$$

11.1.3. Для множеств $L \subset E$ и $M \subset X$ положим по определению

$$h(L) := \{x \in X : |x| \in L\}, \quad |M| := \{|x| : x \in M\}.$$

Ясно, что $|h(L)| \subset L \cap |X|$ и $M \subset h(|M|)$. Имеет место следующее предложение.

Предположим, что всякая ненулевая компонента векторной решетки $E_0 := |X|^{\perp\perp}$ содержит норму некоторого ненулевого элемента. Тогда $\mathscr{B}(X)$ — полная булева алгебра и отображение $L \mapsto h(L)$ осуществляет изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{B}(|X|^{\perp\perp})$ и $\mathscr{B}(X)$.

$\lhd$ Прежде всего покажем, что $h(L^\perp) = h(L)^\perp$ для произвольного $L \in \mathfrak{B}(|X|^{\perp\perp})$. Включение $h(L^\perp) \subset h(L)^\perp$ очевидно из определений. Если $0 \neq x \in h(L)^\perp$, то $|x|$ дизъюнктен всем элементам из L вида $|y|$. В то же время соотношение $x \notin h(L^\perp)$ влечет, что $e \leqslant |x|$ для подходящего $0 < e \in L^+$. Но тогда в компоненте $\{e\}^{\perp\perp}$ нет ненулевых элементов вида $|y|$, что противоречит допущению $x \notin h(L^\perp)$.

Из доказанного следует, в частности, что $h(L) = h(L)^{\perp\perp}$ и, следовательно, $h(L) \in \mathscr{B}(X)$ для любой компоненты L векторной решетки E_0. Далее, непосредственно из определений видно, что h сохраняет пересечение любого непустого множества компонент. Но в упорядоченном множестве $\mathscr{B}(X)$ точная нижняя граница произвольного семейства совпадает с пересечением ввиду соотношения $\left(\bigcup M_\alpha\right)^\perp = \bigcap M_\alpha^\perp$ (см. 7.2.10 (4)). Значит, отображение h сохраняет точные нижние границы и (как мы установили ранее) дизъюнктные дополнения. Допустим, что $h(L_1) = h(L_2)$ для некоторых компонент L_1 и L_2 векторной решетки E_0. Если $|x| \in L_1 \cap L_2^\perp$, то $x \in h(L_1)$ и $x \in h(L_2^\perp) = h(L_2)^\perp$. Значит, $x = 0$. В силу наших предположений отсюда можно вывести, что компонента $L_1 \cap L_2^\perp$ нулевая, т. е. $L_1 \subset L_2$. Аналогично можно установить включение $L_2 \subset L_1$. Стало быть, отображение h инъективно. Сюръективность h следует из легко проверяемого соотношения $M^\perp = h(|M|^\perp)$. Заметим также, что $h(\{0\}) = \{0\}$ и $h(E_0) = X$. Таким образом, h — изоморфизм упорядоченных множеств $\mathfrak{B}(E_0)$ и $\mathscr{B}(X)$. Так как первое множество является дистрибутивной решеткой с нулем и единицей, то второе обладает такой же квалификацией. Осталось заметить, что в $\mathscr{B}(X)$ дизъюнктное дополнение совпадает с булевым дополнением, поскольку это утверждение верно в $\mathfrak{B}(E_0)$ и h сохраняет дизъюнктное дополнение. $\rhd$

11.1.4. *Допустим, что $E_0 := |X|^{\perp\perp}$ — решетка с проекциями, а пространство X d-разложимо. Тогда X — пространство с проекциями. Более того, существуют изоморфизм h из $\mathfrak{P}(E_0)$ на булеву алгебру порядковых проекторов $\mathscr{P}(X)$ в X такой, что*

$$b|x| = |h(b)x| \quad \bigl(b \in \mathfrak{P}(E_0),\ x \in X\bigr).$$

$\lhd$ В силу условия d-разложимости и предложения 11.1.2 (2) для произвольного $x \in X$ найдется единственная пара элементов $x_1, x_2 \in X$ такая, что $x = x_1 + x_2$, $|x_1| = \pi|x|$ и $|x_2| = \pi^\perp|x|$. Это означает, что X есть прямая сумма компонент K и $K^\perp$. Пусть $h(\pi)$ — проектор на компоненту K параллельно $K^\perp$. По определению изоморфизма h имеем $h(\pi)x \in K = h(\pi E_0)$, т. е. $[h(\pi)x] \in \pi E_0$. Значит,

$\pi^{\perp}|h(\pi)x| = 0$ или $\pi|h(\pi)x| = |h(\pi)x|$. Элементы $h(\pi)x$ и $h(\pi^{\perp})x$ дизъюнктны и поэтому, используя 11.1.2 (1), можно написать

$$\pi|x| = \pi\big(|h(\pi)x| + |h(\pi^{\perp})x|\big) = \pi|h(\pi)x|.$$

Следовательно, $\pi|x| = \pi|h(\pi)x| = |h(\pi)x|$. Если K' — произвольная компонента X, то согласно 11.1.3 $K' = h(L')$ для некоторого $L' \in \mathfrak{B}(E_0)$. Для $x \in K'$ будет $|h(\pi)x| = \pi|x| \leqslant |x| \in L$, значит, $|h(\pi)x| \in L'$ и $h(\pi)x \in K'$.

Ненулевая компонента $L \in \mathfrak{B}(E_0)$ не может быть дизъюнктной к множеству $|X|$. Стало быть, $|x| \notin L^{\perp}$ для некоторого $x \in X$. Если π — порядковый проектор на L, то элемент $\pi|x|$ отличен от нуля. Ввиду d-разложимости X, для некоторого $x_0 \in X$ выполняется $|x_0| = \pi|x| \in L$. Следовательно, можно применить 11.1.3. Каждая компонента $K \in \mathfrak{B}(X)$ допускает проектор π_K параллельно $K^{\perp}$. Положим $\mathscr{P} := \{\pi_K : K \in \mathfrak{B}(X)\}$. Ясно, что $\mathscr{P}$ — полная булева алгебра проекторов. Порядковому проектору $\rho \in \mathfrak{P}(E_0)$ поставим в соответствие проектор π_K, где $K := h(\rho E_0)$. Полученное таким образом отображение мы обозначим той же буквой h. Тогда h — изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{P}(E_0)$ и $\mathscr{P}$. $\triangleright$

В дальнейшем булевы алгебры $\mathfrak{P}(E_0)$ и $\mathscr{P}(X) := \mathscr{P}$ отождествляем и пишем $\pi|x| = |\pi x|$ $\big(x \in X,\ \pi \in \mathfrak{P}(E_0)\big)$.

11.1.5. Сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ называют *bo-сходящейся* к элементу $x \in X$ и пишут $x = bo\text{-}\lim x_\alpha$, если существует убывающая сеть $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в E такая, что $\inf_{\gamma\in\Gamma} e_\gamma = 0$ и для любого $\gamma \in \Gamma$ найдется индекс $\alpha(\gamma) \in \mathrm{A}$, для которого $|x - x_\alpha| \leqslant e_\gamma$ при всех $\alpha \geqslant \alpha(\gamma)$. Пусть для некоторого $e \in E^+$ выполнено условие: для любого числа $\varepsilon > 0$, существует индекс $\alpha(\varepsilon) \in \mathrm{A}$ такой, что $|x - x_\alpha| \leqslant \varepsilon e$ при всех $\alpha \geqslant \alpha(\varepsilon)$. Тогда говорят, что сеть (x_α) является *br-сходящейся* (или *сходящейся с регулятором* e) к элементу x и пишут $x = br\text{-}\lim x_\alpha$. Сеть (x_α) называют *bo-фундаментальной* (*br-фундаментальной*), если сеть $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}\times\mathrm{A}}$ является bo-сходящейся (br-сходящейся) к нулю. Решеточно нормированное пространство называют *bo-полным* (*br-полным*), если всякая bo-фундаментальная (br-фундаментальная) сеть в нем bo-сходится (br-сходится) к элементу этого пространства.

Возьмем семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и свяжем с ним сеть $(y_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$, где $\mathrm{A} := \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ — упорядоченное по включению множество всех конечных подмножеств множества Ξ и $y_\alpha := \sum_{\xi\in\alpha} x_\xi$. Если существует элемент $x := bo\text{-}\lim y_\alpha$, то семейство (x_ξ) называют *bo-суммируемым* и объявляют элемент x его *суммой*. При этом принято писать $x = bo\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi$.

Множество $M \subset X$ называют *ограниченным по норме,* если множество $|M|$ ограничено в E, т. е. если существует такой элемент $e \in E^+$, что $|x| \leqslant e$ для всех $x \in M$. Пространство X называют *дизъюнктно полным* или *d-полным*, если в нем bo-суммируемо всякое ограниченное по норме множество, состоящее из попарно дизъюнктных элементов.

11.1.6. Разложимое bo-полное решеточно нормированное пространство принято называть *пространством Банаха — Канторовича* (или, сокращенно, *BK-пространством*). Если пространство Банаха — Канторовича одновременно является векторной решеткой и векторная норма монотонна, то его называют *решеткой Банаха — Канторовича.* Пусть (X, E) — пространство Банаха — Канторовича, причем $E = |X|^{\perp\perp}$. Согласно 11.1.4 булевы алгебры $\mathfrak{P}(E)$ и $\mathscr{P}(X)$ можно отождествить. С учетом этого мы понимаем соотношение $\pi|x| = |\pi x|$ $\big(\pi \in \mathfrak{P}(E),\ x \in X\big)$.

Для каждого ограниченного семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в X и любого разбиения единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathfrak{P}(X)$ существует сумма $x := bo\text{-}\sum_{\xi\in\Xi}\pi_\xi x_\xi$. Более того, x — единственный элемент в X, удовлетворяющий условиям $\pi_\xi x = \pi_\xi x_\xi \quad (\xi\in\Xi)$.

$\lhd$ Если $e := \sup|x_\xi|$ и $y_\gamma := \sum_{\xi\in\gamma}\pi_\xi x_\xi$, то для произвольных $\alpha,\beta\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ будет

$$|y_\alpha - y_\beta| = \left|\sum_{\xi\in\alpha\triangle\beta}\pi_\xi x_\xi\right| \leqslant \left(\sum_{\xi\in\alpha\triangle\beta}\pi_\xi\right)e \leqslant e,$$

где $\alpha\triangle\beta$ — как обычно, симметрическая разность множеств α и β. Отсюда ясно, что сеть (y_α) является bo-фундаментальной. Следовательно, существует элемент $x := bo\text{-}\lim y_\alpha$. $\rhd$

11.1.7. Элемент x из 11.1.6 (1) часто называют *перемешиванием* семейства (x_ξ) относительно разбиения единицы (π_ξ) и обозначают символом $\mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(\pi_\xi x_\xi)$. Значит, в пространстве Банаха — Канторовича (X,E) существует перемешивание любого ограниченного семейства относительно любого разбиения единицы.

Из приведенного предложения следует также d-полнота пространства Банаха — Канторовича (X,E). Вместе с тем из определения (X,E) непосредственно видна br-полнота (X,E). Таким образом, пространство (X,E) является d-полным и br-полным одновременно. Стало быть, $E = |X|^{\perp\perp}$ и $E^+ = |X|$ (см. [107, 2.1.7 (3)]). Значит, можно считать, что нормирующая решетка E служит K-пространством.

(1) Теорема. *Разложимое решеточно нормированное пространство bo-полно в том и только в том случае, когда оно дизъюнктно полно и br-полно.*

$\lhd$ Доказательство см. у А. Г. Кусраева [107, теорема 2.2.3]. Булевозначное обоснование см. ниже в 11.3.6. $\rhd$

Расширенным называют такое пространство Банаха — Канторовича, у которого нормирующей решеткой служит расширенное K-пространство.

(2) *Пространство Банаха — Канторовича будет расширенным в том и только в том случае, когда в нем каждое семейство имеет перемешивание относительно любого разбиения единицы.*

$\lhd$ Необходимость вытекает из 11.1.6. Достаточность см. у А. Г. Кусраева [107, 2.2.1]. $\rhd$

11.1.8. Под *максимальным расширением* решеточно нормированного пространства (X,E) мы понимаем расширенное пространство Банаха — Канторовича (Y,mE) вместе с линейным изометрическим вложением $\imath : X \to Y$ такие, что любое расширенное bo-полное подпространство (Y,mE), содержащее $\imath X$, совпадает с Y. Здесь, как и раньше, mE обозначает максимальное расширение K-пространства oE. Более того, мы предполагаем, что $E \subset mE$. Максимальное расширение X мы будем обозначать символом mX.

11.1.9. Введем понятие мажорируемого оператора в решеточно нормированном пространстве. Рассмотрим решеточно нормированные пространства (X,E) и (Y,F) над векторными решетками E и F соответственно. Линейный оператор $T : X \to Y$ называют *мажорируемым* или, реже, *доминируемым*, если существует положительный оператор $S : E \to F$ такой, что выполнено соотношение

$$|Tx| \leqslant S\big(|x|\big) \quad (x\in X).$$

При этом говорят, что S *мажорирует* или *доминирует* T или что S является *мажорантой* или *доминантой* оператора T. Множество всех мажорируемых операторов из X в Y обозначают символом $M(X,Y)$.

Если в множестве всех мажорант оператора T имеется наименьший элемент относительно порядка пространства $L^{\sim}(E,F)$, то его называют *точной мажорантой* или *наименьшей мажорантой* оператора T и обозначают символом $\lvert T\rvert$. Таким образом, точная мажоранта $\lvert T\rvert$ — положительный оператор из E в F

$$\lvert Tx\rvert \leqslant \lvert T\rvert(\lvert x\rvert) \quad (x \in X).$$

Если решеточно нормированное пространство X разложимо, а векторная решетка F порядково полна, то каждый мажорируемый оператор $T: X \to Y$ имеет точную мажоранту $\lvert T\rvert$.

11.1.10. Теорема. *Пусть X — разложимое решеточно нормированное пространство, а Y — пространство Банаха — Канторовича. Тогда пространство $M(X,Y)$ также пространство Банаха — Канторовича.*

$\lhd$ Доказательство имеется у А. Г. Кусраева [107, теорема 4.2.6]. $\rhd$

11.1.11. Выделим два частных класса мажорируемых операторов, играющих особую роль в этой книге.

(1) Возьмем $E := \mathbb{R}$ и $Y := F$. Тогда X — нормированное пространство, а мажорируемость оператора $T: X \to F$ означает, что множество

$$\{Tx: \ x \in X, \ \|x\| \leqslant 1\}$$

порядково ограничено в F. Точную верхнюю границу этого множества называют *абстрактной нормой оператора* T и обозначают $\lvert T\rvert$. (Это обозначение согласуется с введенным выше, если отождествить пространства F и $L^{\sim}(\mathbb{R},F)$.) В этой ситуации говорят также, что T — *оператор с абстрактной нормой.* Обозначим через $L_A(X,E)$ пространство операторов с абстрактной нормой из X в E.

(2) Пусть теперь E и F — фундаменты одного и того же K-пространства. Оператор $T \in M(X,Y)$ называют *ограниченным*, если $\lvert T\rvert \in \mathrm{Orth}(E,F)$. Обозначим символом $L_b(X,Y)$ пространство всех ограниченных операторов. Понятно, что $T \in L_b(X,Y)$ тогда и только тогда, когда существует $c \in mE = mF$ такой, что $c \cdot E \subset F$ и $q(Tx) \leqslant cp(x)$ $(x \in X)$, где имеется в виду мультипликативная структура в mE, однозначно определяемая выбором единицы (см. [107, 5.2.5 (5)]).

11.2. Примеры

В этом параграфе мы рассмотрим важные примеры пространств непрерывных, слабо непрерывных, измеримых, слабо измеримых вектор-функций, допускающих естественную норму со значениями в векторной решетке.

11.2.1. Начнем с простейших крайних случаев, а именно векторных решеток и нормированных пространств.

(1) Если $X = E$, то модуль элемента можно принять за его векторную норму: $\lvert x\rvert := |x| = x \vee (-x)$ $(x \in E)$. Разложимость этой нормы легко следует из леммы о двойном разбиении (см. 10.1.3). Действительно, если $|x| = e_1 + e_2$ для некоторых $e_1, e_2, x \in E^+$, то $e_1 + e_2 = x^+ + x^-$ и в силу 10.1.3 (1) найдутся $u_1, u_2 \in E^+$ и $v_1, v_2 \in E^+$ такие, что $e_1 = u_1 + v_1$, $e_2 = u_2 + v_2$, $x^+ = u_1 + u_2$,

$x^- = v_1 + v_2$. При этом $u_k \perp v_l$ $(k, l := 1, 2)$. Положим $x_1 := u_1 - v_1$ и $x_2 := u_2 - v_2$. Тогда $x_1 + x_2 = x^+ - x^- = x$, $|x_1| = u_1 + v_1 = e_1$ и $|x_2| = u_2 + v_2 = e_2$.

(2) Если $E = \mathbb{R}$, то X — нормированное пространство. В этом случае мы будем использовать общепринятое обозначение для нормы $\|\cdot\|$ и опускать упоминание о порядковой структуре нормирующей решетки.

11.2.2. Рассмотрим пространство всюду определенных непрерывных вектор-функций. Пусть Q — топологическое пространство, а Y — нормированное пространство. Пусть $X := C_b(Q, Y)$ — пространство ограниченных непрерывных вектор-функций из Q в Y. Положим $E := C_b(Q, \mathbb{R})$. Векторную норму $[\![f]\!]$ функции $f \in X$ мы определим соотношением $[\![f]\!] : t \mapsto \|f(t)\|$ $(t \in Q)$. Тогда $[\![\cdot]\!]$ — разложимая норма. Действительно, допустим, что $[\![f]\!] = e_1 + e_2$ для некоторых $e_1, e_2 \in E^+$. Зададим вектор-функцию $f_1 : Q \to Y$ условиями: $f_1(t) := e_1(t) f(t)/\|f(t)\|$ при $f(t) \neq 0$ и $f_1(t) := 0$ при $f(t) = 0$. Тогда $f_1 \in X$ и $f_2 := f - f_1 \in X$. Более того, $[\![f_k]\!] = e_k$ $\ (k := 1, 2)$. Пространство X будет br-полным в том и только в том случае, когда Y — банахово пространство.

11.2.3. Пусть Q — экстремальный компакт, а E — фундамент расширенного K-пространства $C_\infty(Q)$. Обозначим символом $C_\infty(Q, X)$ множество классов эквивалентности непрерывных вектор-функций u, действующих из котощих множеств $\mathrm{dom}(u) \subset Q$ в нормированное пространство X. Напомним, что множество в топологическом пространстве называют *котощим*, если его дополнение является тощим множеством. Подробнее, обозначим символом $\mathscr{C}(Q, X)$ множество вектор-функций $u : \mathrm{dom}(u) \to X$, удовлетворяющих условиям: а) $\mathrm{dom}(u)$ — котощее подмножество Q и б) отображение u непрерывно. Введем отношение эквивалентности $\sim$ в $\mathscr{C}(Q, X)$ следующим образом: вектор-функции u и v считают эквивалентными, если они совпадают на общей части своих областей определения, т. е. $u \sim v$ означает, что $u(t) = v(t)$ при всех $t \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v)$. Фактор-множество $\mathscr{C}(Q, X)/{\sim}$ обозначают символом $C_\infty(Q, X)$.

Множество $C_\infty(Q, X)$ можно естественным образом снабдить структурой модуля над кольцом $C_\infty(Q)$. Пусть $\tilde{u}$ обозначает класс эквивалентности вектор-функции $u \in \mathscr{C}(Q, X)$. Возьмем $u, v \in \mathscr{C}(Q, X)$ и $a \in C_\infty(Q)$. Положим

$$
\begin{aligned}
w(t) &:= u(t) + v(t) \quad (t \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v)),\\
z(t) &:= a(t) u(t) \quad (t \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{Dom}(a)),
\end{aligned}
$$

где $\mathrm{Dom}(a) := \{t \in Q : |a(t)| < +\infty\}$. Примем по определению $\tilde{u} + \tilde{v} := \tilde{w}$ и $a \cdot \tilde{u} := \tilde{z}$. Корректность этих определений видна без труда. Не вызывают сомнений и аксиомы модуля над кольцом $C_\infty(Q)$. Более того, непрерывное продолжение поточечной нормы определяет разложимую норму на $C_\infty(Q, X)$ со значениями в $C_\infty(Q)$. В самом деле, для $z \in C_\infty(Q, X)$ существует единственная функция $x_z \in C_\infty(Q)$ такая, что $\|u(t)\| = x_z(t)$ $\big(t \in \mathrm{dom}(u)\big)$ для каждого представителя u класса эквивалентности z. Положим $[\![z]\!] := x_z$ и заметим, что так определенное отображение $[\![\cdot]\!] : C_\infty(Q, X) \to C_\infty(Q)$ удовлетворяет аксиомам 11.1.1 (1–3). Более того, $[\![ax]\!] = |a| [\![x]\!]$ для всех $a \in C_\infty(Q)$ и $x \in C_\infty(Q, X)$. Введем теперь пространство

$$
E(X) := \big\{z \in C_\infty(Q, X) : [\![z]\!] \in E\big\}
$$

и снабдим его индуцированной векторной нормой. Разложимость этой нормы можно показать так же, как и в 11.2.1 (1).

Если X — банахово пространство, то $E(X)$ — пространство Банаха — Канторовича, максимальным расширением которого служит $C_\infty(Q, X)$.

$\lhd$ Это утверждение можно без труда вывести из 11.1.7 (1). $\rhd$

11.2.4. Обозначим символом $C_\#(Q, X)$ часть пространства $C_\infty(Q, X)$, состоящую из классов z, для которых $|z| \in C(Q)$. Таким образом, $C_\#(Q, X) := E(X)$, где $E := C(Q)$. Заметим, что $C_\#(Q, X)$ — также пространство Банаха — Канторовича, тогда как пространство $C(Q, X)$ всюду определенных непрерывных вектор-функций из Q в X, будучи решеточно нормированным пространством над $C(Q)$ (см. 11.2.2), не будет, вообще говоря, d-полным (см. [107, 2.4.8 (2, 3)]). В частности, пространства $C(Q, X)$ и $C_\#(Q, X)$ не совпадают, если только Q не конечно или X не конечномерно (см. [107, 2.4.8 (5)]).

11.2.5. Введем теперь пространство слабо непрерывных вектор-функций, аналогичное $E(X)$. Предположим, что X — нормированное пространство, а $Z \subset X'$ — *нормирующее подпространство,* т. е.

$$\|x\|_X = \sup\{|\langle x, z\rangle| : z \in Z,\ \|z\| \leqslant 1\} \quad (x \in X).$$

Здесь, как обычно, X' — сопряженное пространство, а $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ — каноническая билинейная форма двойственности $X \leftrightarrow X'$ (см., например, у С. С. Кутателадзе [128]).

Обозначим буквой $\mathscr{M}$ множество $\sigma(X, Z)$-непрерывных вектор-функций $u : \operatorname{dom}(u) \to X$ таких, что $\operatorname{dom}(u)$ — котощее множество в Q. Рассмотрим фактор-множество $C_\infty(Q, X|Z) := \mathscr{M}/{\sim}$, где $u \sim v$ означает, что $u(t) = v(t)$ $(t \in \operatorname{dom}(u) \cap \operatorname{dom}(v))$. Множество $C_\infty(Q, X|Z)$ можно естественным образом превратить в векторное пространство: если $\widetilde{u}$ — класс эквивалентности вектор-функции $u \in \mathscr{M}$, то под линейной комбинацией $\lambda\widetilde{u} + \mu\widetilde{v}$ понимают класс эквивалентности поточечной линейной комбинации $\lambda u(t) + \mu v(t)$, $t \in \operatorname{dom}(u) \cap \operatorname{dom}(v)$. Для $a \in C_\infty(Q)$ вектор-функция $t \mapsto a(t)u(t)$, $t \in \operatorname{dom}(a) \cap \operatorname{dom}(u)$, входит в $\mathscr{M}$ и, стало быть, определяет класс эквивалентности $a\widetilde{u}$. Взяв $u \in \mathscr{M}$ и $z \in Z$, мы обозначим символом $\langle u, z\rangle$ продолжение по непрерывности функции $t \mapsto \langle u(t), z\rangle$ $(t \in \operatorname{dom}(u))$ на все пространство Q. Если $u \sim v$, то очевидным образом $\langle u, z\rangle = \langle v, z\rangle$. Следовательно, для $w \in C_\infty(Q, X|Z)$ и произвольного $u \in w$ можно положить $\langle w, z\rangle := \langle u, z\rangle$. Множество $R(u) := \{\langle u, z\rangle : z \in Z, \|z\| \leqslant 1\}$ порядково ограничено в $C_\infty(Q)$, так как оно поточечно ограничено на котощем множестве $\operatorname{dom}(u)$. Таким образом, для произвольного $u \in w$ можно положить

$$|w| := |u| := \sup\bigl\{\langle u, z\rangle : z \in Z,\ \|z\| \leqslant 1\bigr\},$$

где супремум вычисляется в $C_\infty(Q)$. Заметим, что функция $\|u(\cdot)\| : t \mapsto \|u(t)\|$ $(t \in \operatorname{dom}(u))$ является поточечным супремумом того же множества $R(u)$. Поэтому функции $|u|$ и $\|u(\cdot)\|$ совпадают на котощем подмножестве Q. Тем не менее эти функции могут различаться на $\operatorname{dom}(u)$.

Легко видеть, что $|\cdot|$ — разложимая норма со значениями в $C_\infty(Q)$. Более того, $C_\infty(Q, X|Z)$ естественным образом наделяется структурой точного модуля над кольцом $C_\infty(Q)$, причем $|au| = |a||u|$ для $a \in C_\infty(Q)$ и $u \in C_\infty(Q, X|Z)$. Положим

$$E_w(X, Z) := \bigl\{u \in C_\infty(Q, X|Z) : |u| \in E\bigr\}.$$

Выделим важный частный случай $E_w(X') := E_w(X', X)$, возникающий при $X := X'$ и $Z := X \subset X''$.

Если X — банахово пространство, то для каждого фундамента $E \subset C_\infty(Q)$ множество $E_w(X, Z)$ с алгебраическими операциями и E-значной нормой $\lvert\cdot\rvert$, индуцированными из $C_\infty(Q, X|Z)$, является пространством Банаха — Канторовича над E, а $C_\infty(Q, X|Z)$ будет его максимальным расширением. В частности, $E_w(X')$ — пространство Банаха — Канторовича над E.

11.2.6. Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство со свойством прямой суммы, E — фундамент $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ и X — нормированное пространство. Пусть $L^0(\mu, X) := L^0(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ — пространство классов эквивалентности μ-измеримых по Бохнеру вектор-функций, действующих из Ω в X. Как обычно, вектор-функции эквивалентны, если они принимают равные значения почти всюду на Ω. Если $\widetilde{u} \in L^0(\mu, X)$ — класс эквивалентности измеримой вектор-функции $u : \Omega \to X$, то скалярная функция $t \mapsto \|u(t)\|$ $(t \in \Omega)$ измерима. При этом соответствующий класс эквивалентности мы обозначим символом $\lvert\widetilde{u}\rvert \in L^0(\mu)$. Положим по определению

$$E(X) := \{u \in L^0(\mu, X) : \lvert u\rvert \in E\}.$$

Тогда $\big(E(X), E\big)$ — решеточно нормированное пространство с разложимой нормой. Очевидно, что $L^p(\mu, X)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ совпадает с $E(X)$, где $E = L^p(\mu)$.

Если X — банахово пространство, то $E(X)$ — пространство Банаха — Канторовича, максимальное расширение которого изоморфно $L^0(\mu, X)$.

$\triangleleft$ Утверждение можно доказать, используя 11.1.7 (1). $\triangleright$

11.2.7. Введем теперь измеримый вариант пространства $E_w(X)$. Возьмем те же E и X, что и в 11.2.6, а также нормирующее подпространство $Z \subset X'$ (см. 11.2.5). Вектор-функцию $u : \Omega \to X$ называют *$\sigma(X, Z)$-измеримой*, или проще *Z-измеримой,* если для каждого $z \in Z$ измерима функция $t \mapsto \langle u(t), z\rangle$ $(t \in \Omega)$. Класс эквивалентности последней мы обозначим символом $\langle u, z\rangle$, так что $\langle u, z\rangle \in L^0(\mu)$. Пусть $\mathscr{M}(\Omega, X|Z)$ — множество всех Z-измеримых вектор-функций $u : \Omega \to X$. Будем говорить, что Z-измеримые вектор-функции u, v являются *Z-эквивалентными,* и писать $u \simeq v$, если для каждого $z \in Z$ измеримые функции $\langle u, z\rangle$ и $\langle v, z\rangle$ равны почти всюду. Рассмотрим фактор-множество $L^0(\mu, X|Z) := L^0(\Omega, \Sigma, \mu, X|Z) := \mathscr{M}(\Omega, X|Z)/\simeq$ и зададим в нем структуру векторного пространства, считая, что $\alpha\widetilde{u} + \beta\widetilde{v} := (\alpha u + \beta v)^\sim$. Взяв класс эквивалентности $\widetilde{u} \in L^0(\mu, X|Z)$ вектор-функции $u \in \mathscr{M}(\Omega, X|Z)$, положим $\langle \widetilde{u}, z\rangle := \langle u, z\rangle$.

Заметим, что множество $R(\widetilde{u}) := \big\{\langle \widetilde{u}, z\rangle : z \in Z, \|z\| \leqslant 1\big\}$ порядково ограничено в $L^0(\mu)$. В противном случае можно подобрать неограниченную сверху последовательность (f_n) в $R(\tilde{u})$. Это, однако, противоречие, так как функция $f(t) := \sup_n f_n(t)$ измерима и $|f(t)| \leqslant \|u(t)\|_X < \infty$ $(t \in \Omega)$. Взяв $\widetilde{u} \in \mathscr{M}/\!\sim$, положим

$$\lvert u\rvert := \sup\big\{\langle u, z\rangle : z \in Z,\ \|z\| \leqslant 1\big\},$$

где супремум вычислен в пространстве $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Если $a : \Omega \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, то произведение $\tilde{a} \cdot \tilde{u}$ определяют как класс эквивалентности вектор-функции $t \mapsto a(t)u(t)$ $(t \in \Omega)$. Тем самым $L^0(\mu, X|Z)$ становится унитарным модулем над кольцом $L^0(\mu)$. При этом, как несложно проверить, выполнено равенство $\lvert ax\rvert = |a|\lvert x\rvert$ для $a \in L^0(\mu)$ и $x \in L_0(\mu, X|Z)$. Теперь видно, что $L^0(\mu, X|Z)$ — разложимое решеточно нормированное пространство над $L^0(\mu)$. Введем множество

$$E_w(X, Z) := \big\{u \in L^0(\mu, X|Z) : \lvert u\rvert \in E\big\}.$$

Так же, как и в 11.2.5, укажем важный частный случай, когда X — сопряженное банахово пространство ($X := X'$), а Z — его предсопряженное пространство ($Z := X \subset X''$). При этом принято обозначение $E_w(X') := E_w(X', X)$.

(1) *Для каждого фундамента $E \subset L^0(\mu)$ множество $E_w(X')$ с операциями и E-значной нормой $[\![\cdot]\!]$, индуцированными из $L^0(\Omega, \Sigma, \mu, X'|X)$, представляет собой пространство Банаха — Канторовича над $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$, максимальное расширение которого совпадает с $L^0(\Omega, \Sigma, \mu, X'|X)$.*

Очевидно, что всякая измеримая вектор-функция слабо измерима, а соотношение $u \sim v$ влечет $u \simeq v$ для любой пары измеримых вектор-функций u и v. Поэтому существует отображение (называемое *каноническим вложением*), сопоставляющее элементу $\widetilde{u} \in L^0(\mu, X)$ класс эквивалентности $\{v \in \mathscr{M}(\mu, X|Z) : v \simeq u\} \in L^0(\mu, X|Z)$.

(2) *Каноническое вложение $L^0(\mu, X) \to L^0(\mu, X|Z)$ является линейным изометрическим вложением.*

11.2.8. *Пусть X — нормированное пространство, а E — фундамент K-пространства $C_\infty(Q)$. Для оператора с абстрактной нормой $T : X \to E$ существует единственный элемент $u_T \in E_w(X')$ такой, что*

$$Tx = \langle x, u_T \rangle \quad (x \in X).$$

Отображение $T \mapsto u_T$ осуществляет линейную изометрию между пространствами Банаха — Канторовича $L_A(X, E)$ и $E_w(X')$.

$\lhd$ Если $e := [\![T]\!]$, то для любого $x \in X$ функция $Tx \in C_\infty(Q)$ конечна в каждой точке множества $Q_0 := \{t \in Q : e(t) < +\infty\}$ ввиду оценки $|Tx| \leqslant e\|x\|$. Из этой же оценки видно, что при $t \in Q_0$ функционал $v(f) : x \mapsto (Tx)(t)$ $(x \in X)$ ограничен и $\|v(f)\| \leqslant e(t)$. Тем самым возникает отображение $v : Q_0 \to X'$, которое непрерывно при наделении X' слабой топологией $\sigma(X', X)$. Пусть u_T — класс эквивалентности вектор-функции v. Тогда $Tx = \langle x, u_T \rangle$ для всех $x \in X$. В частности, существует $\sup\{\langle x, u_T \rangle : \|x\| \leqslant 1\} = e$. Значит, $u_T \in E_w(X')$ и $[\![u_T]\!] = [\![T]\!]$. Итак, отображение $T \mapsto u_T$ изометрично действует из $L_A(X, E)$ в $E_w(X')$. Линейность и сюръективность этого отображения очевидны. $\rhd$

11.2.9. Возьмем нормированные пространства X и Y. Рассмотрим оператор $T \in L_A(X \widehat{\otimes} Y, E)$, где $X \widehat{\otimes} Y$ — проективное тензорное произведение. Легко видеть, что билинейный оператор $b := T\otimes : X \times Y \to E$ имеет абстрактную норму

$$[\![b]\!] := \sup\{|b(x, y)| : \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1\},$$

причем $[\![b]\!] = [\![T]\!]$. Обозначим символом $\mathscr{B}_A(X \times Y, E)$ множество всех билинейных операторов $b : X \times Y \to E$, имеющих абстрактную норму, а символом $\mathscr{B}(X \times Y)$ — множество всех ограниченных билинейных форм на $X \times Y$. Ввиду изометрического изоморфизма $(X \widehat{\otimes} Y)' \simeq \mathscr{B}(X \times Y)$, из 11.2.8 выводится следующее утверждение.

Для оператора $b \in \mathscr{B}_A(X \times Y, E)$ существует единственный элемент $u_b \in E_w(\mathscr{B}(X \times Y))$ такой, что

$$b(x, y) = \langle x \otimes y, u_b \rangle \quad (x \in X,\ y \in Y).$$

Отображение $b \mapsto u_b$ является линейной изометрией пространств $\mathscr{B}_A(X \times Y, E)$ и $E_w(\mathscr{B}(X \times Y))$.

11.2.10. Пусть G — некоторый фундамент $C_\infty(Q)$. В соответствии с 11.2.5 положим $G_w(\mathscr{L}(X,Y')) := G_w(\mathscr{L}(X,Y'),\ X\otimes Y)$. Таким образом, пространство $G_w(\mathscr{L}(X,Y'))$ состоит из (классов эквивалентных) оператор-функций $K:\operatorname{dom}(K)\to\mathscr{L}(X,Y')$ таких, что $\operatorname{dom}(K)$ — котощее множество в Q, функция $t\mapsto\langle y,K(t)x\rangle$ $(t\in\operatorname{dom}(K))$ непрерывна для всех $x\in X$, $y\in Y$ и существует

$$\lvert K\rvert := \sup\{|\langle y,Kx\rangle| :\ \|x\|\leqslant 1,\ \|y\|\leqslant 1\}\in G.$$

Если $K\in G_w(\mathscr{L}(X,Y'))$ и $u\in E(X)$, то вектор функция $t\mapsto K(t)u(t)$ $(t\in Q_0 := \operatorname{dom}(K)\cap\operatorname{dom}(u))$ непрерывна в слабой топологии $\sigma(Y',Y)$. В самом деле, для произвольных $t,t_0\in Q_0$ справедлива оценка

$$|\langle y,K(t)\,u(t)-K(t_0)\,u(t_0)\rangle|\leqslant$$
$$\leqslant|\langle y,(K(t)-K(t_0))\,u(t_0)\rangle|+\lvert K\rvert(t)\|y\|\|u(t)-u(t_0)\|.$$

Можно считать, что $\operatorname{dom}(K)=\{\lvert K\rvert<+\infty\}$. Стало быть, $\lvert K\rvert$ ограничена в окрестности точки t_0. Учитывая сильную непрерывность u и слабую непрерывность K, мы получаем требуемое. Класс эквивалентности слабо непрерывной вектор-функции $t\mapsto K(t)\,u(t)$ мы будем обозначать символом Ku, а непрерывное продолжение функции $t\mapsto\langle y,K(t)\,u(t)\rangle$ на все Q — символом $\langle y,Ku\rangle$.

11.2.11. Теорема. *Для ограниченного оператора $T\in L_b(E(X),\ E_w(Y'))$ существует такой единственный элемент $K_T\in G_w(\mathscr{L}(X,Y'))$, где $G:=\operatorname{Orth}(E)$, что*

$$Tu=K_Tu\quad(u\in E(X)).$$

Отображение $T\mapsto K_T$ осуществляет линейную изометрию между пространствами $L_b(E(X),E_w(Y'))$ и $G_w(\mathscr{L}(X,Y'))$.

$\lhd$ Согласно 11.2.10 нужно доказать лишь первую часть теоремы. Для $x\in X$, $y\in Y$ и $e\in E$ положим $S_{x,y}(e):=\langle y,T(x\otimes e)\rangle$. Нетрудно видеть, что $S_{x,y}\in\operatorname{Orth}(E)$. Если $b(x,y):=S_{x,y}$, то $b:X\times Y\to G$ — билинейный оператор с абстрактной нормой и $\lvert b\rvert=\lvert T\rvert$. В силу 11.2.9 существует единственный элемент $K_T\in G_w(\mathscr{B}(X,Y))$ такой, что $\lvert K_T\rvert=\lvert T\rvert$ и

$$\langle y,T(x\otimes e)\rangle=\langle x\otimes y,K_T\rangle e.$$

Учитывая изометрический изоморфизм $\mathscr{B}(X,Y)\simeq\mathscr{L}(X,Y')$, можно считать, что $K_T\in G_w(\mathscr{L}(X,Y'))$ и тогда

$$\langle y,T(x\otimes e)\rangle=\langle y,K_Tx\rangle e=\langle y,K_Tx\otimes e\rangle.$$

Осталось заметить, что $X\otimes E$ порядково плотно в $E(X)$, а оператор T порядково непрерывен (подробности см. в [101, 107]). $\rhd$

11.3. Спуски банаховых пространств

Интерпретация — спуск — банахова пространства в произвольной булевозначной модели представляет собой расширенное пространство Банаха — Канторовича. Наоборот, максимальное расширение решеточно нормированного пространства при подъеме в подходящую булевозначную модель становится обычным банаховым пространством. Тем самым открывается возможность превратить сведения о банаховых пространствах в результаты о строении решеточно нормированных пространств.

11.3.1. Теорема. *Пусть* $(\mathscr{X}, \rho)$ *— банахово пространство в модели* $\mathbb{V}^{(B)}$. *Положим* $X := \mathscr{X}\!\downarrow$ *и* $|\!|\cdot|\!| := \rho\!\downarrow\!(\cdot)$. *Тогда справедливы утверждения*:

(1) $\big(X, |\!|\cdot|\!|, \mathscr{R}\!\downarrow\big)$ *— расширенное пространство Банаха — Канторовича*;

(2) *пространство* X *обладает структурой точного унитарного модуля над кольцом* $\Lambda = \mathscr{C}\!\downarrow$ *такого, что*

(a) $(\lambda\mathbb{1})x = \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{C}\,,\ x \in X)$;

(b) $|\!|ax|\!| = |a|\,|\!|x|\!| \quad (a \in \mathscr{C}\!\downarrow,\ x \in X)$;

(c) $b \leqslant [\![\, x = 0 \,]\!] \leftrightarrow \chi(b)x = 0 \quad (b \in B\,,\ x \in X)$,

где χ *— изоморфизм* B *на* $\mathfrak{P}(X)$.

$\lhd$ Обозначим сложение в $\mathscr{X}$, $\mathscr{C}$ и $\mathscr{R}$ одним и тем же символом $\oplus$. Пусть $\odot$ обозначает внешний закон композиции $\mathscr{C} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ комплексного векторного пространства $\mathscr{X}$, а также умножение в $\mathscr{R}$ и $\mathscr{C}$. Положим $+ := \oplus\!\downarrow$ и $\cdot := \odot\!\downarrow$. В более подробной записи это означает, что

$$
\begin{gathered}
x + y = z \leftrightarrow [\![\, x \oplus y = z \,]\!] = \mathbb{1} \quad (x, y, z \in X);\\
a \cdot x = y \leftrightarrow [\![\, a \odot x = y \,]\!] = \mathbb{1} \quad (a \in \Lambda,\ x, y \in X).
\end{gathered}
$$

В силу 8.1.3 $(X, +)$ — абелева группа.

Так же, как и в 8.1.3, для данных $b \in B$ и $x \in X$ положим $\chi(b)x := \operatorname{mix}\{bx, b^*0\}$, где 0 — нейтральный элемент группы $(X, +)$. Другими словами, $\chi(b)x$ — тот единственный элемент из X, для которого $[\![\, \chi(b)x = x \,]\!] \geqslant b$ и $[\![\, \chi(b)x = 0 \,]\!] \geqslant b^*$. Тем самым определено отображение $\chi(b) : X \to X$, причем $\chi(b)$ аддитивно и идемпотентно. Пусть $\mathfrak{P} := \{\chi(b) : b \in B\}$. Тогда $\mathfrak{P}$ — полная булева алгебра и χ — булев изоморфизм. Согласно 10.3.12 $\Lambda := \mathscr{C}\!\downarrow$ — комплексификация f-алгебры $\mathscr{R}\!\downarrow$. Учитывая, что внутри модели $\mathbb{V}^{(B)}$ выполнены аксиомы векторного пространства для $\mathscr{X}$, мы можем написать

$$
\begin{gathered}
a \cdot (x + y) = a \odot (x + y) = a \odot x + a \odot y = a \cdot x + a \cdot y,\\
(a + b) \cdot x = (a + b) \odot x = a \odot x + b \odot x = a \cdot x + b \cdot x,\\
(ab) \cdot x = (ab) \odot x = a \odot (b \odot x) = a \cdot (b \cdot x),\\
\mathbb{1} \cdot x = \mathbb{1} \odot x = x \quad (a, b \in \Lambda;\ x, y \in X).
\end{gathered}
$$

Эти равенства ввиду отделимости универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ означают, что операции $+$ и $\cdot$ превращают X в унитарный Λ-модуль. Полагая $\lambda x := (\lambda\mathbb{1}) \cdot x$ $(\lambda \in \mathbb{C}, x \in X)$, мы вводим в X структуру комплексного векторного пространства. При этом выполнено равенство (a). Так как в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ верны соотношения

$$
\begin{gathered}
\chi(b) = 1 \ \to\ \chi(b) \odot x = x,\\
\chi(b) = 0 \ \to\ \chi(b) \odot x = 0,
\end{gathered}
$$

то для $b \leqslant [\![\, x = 0 \,]\!]$ будет

$$
\begin{gathered}
b \leqslant [\![\, \chi(b) \odot x = x \,]\!] \wedge [\![\, x = 0 \,]\!] \leqslant [\![\, \chi(b) \cdot x = 0 \,]\!],\\
b^* \leqslant [\![\, \chi(b) \odot x = 0 \,]\!] = [\![\, \chi(b) \cdot x = 0 \,]\!].
\end{gathered}
$$

Итак, $[\![\, \chi(b) \cdot x = 0 \,]\!] = \mathbb{1}$ или $\chi(b)x = 0$, откуда вытекает (c).

Обратимся к банаховым свойствам пространства $(\mathscr{X}, \rho)$. Субаддитивность и однородность нормы ρ можно записать в виде:

$$\rho \circ \oplus \leqslant \oplus \circ (\rho \times \rho), \quad \rho \circ \odot = \odot \circ \big(|\cdot| \times \rho\big),$$

где $\rho \times \rho : (x, y) \mapsto \big(\rho(x), \rho(y)\big)$ и $|\cdot| \times \rho : (a, x) \mapsto \big(|a|, \rho(x)\big)$. Привлекая правила спуска композиции 5.3.4 (2) и полагая $p := \lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert$, получим

$$p \circ + \leqslant + \circ (p \times p), \quad p \circ \cdot = \cdot \circ \big(|\cdot| \times p\big).$$

Это означает, что оператор $\lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert : X \to \operatorname{Re}\Lambda$ служит векторной полунормой и удовлетворяет условию (b). Если $\lvert\!\lvert x\rvert\!\rvert = 0$ для некоторого $x \in X$, то из соотношения $[\![\, \rho(x) = \lvert\!\lvert x\rvert\!\rvert \,]\!] = \mathbb{1}$ мы получаем $[\![\, \rho(x) = 0 \,]\!] = \mathbb{1}$. Стало быть, $[\![\, x = 0 \,]\!] = \mathbb{1}$ или $x = 0$. Итак, $\lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert$ — векторная норма. Разложимость вытекает из свойства (b). Действительно, допустим, что $c := p(x) = c_1 + c_2$ $(x \in X;\ c_1, c_2 \in \Lambda^+)$. Существуют $a_1, a_2 \in \Lambda^+$ такие, что $a_k c = c_k$ $(k := 1, 2)$ и $a_1 + a_2 = 1$. (В качестве a_k можно взять $a_k := c_k\big(c + (1 - e_c)\big)^{-1}$, где e_c — след элемента c.) Если $x_k := a_k \cdot x$ $(k := 1, 2)$, то $x = x_1 + x_2$ и $\lvert\!\lvert x_k\rvert\!\rvert = \lvert\!\lvert a_k x\rvert\!\rvert = a_k \lvert\!\lvert x\rvert\!\rvert = c_k$.

Осталось обосновать *bo*-полноту X. Возьмем *bo*-фундаментальную сеть $s : \mathrm{A} \to X$. Если $\bar{s}(\alpha, \beta) := s(\alpha) - s(\beta)$ $(\alpha, \beta \in \mathrm{A})$, то $\lim \lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert \circ \bar{s}(\alpha, \beta) = 0$. Пусть $\sigma : \mathrm{A}^\wedge \to \mathscr{X}$ — модифицированный подъем s и $\bar{\sigma}(\alpha, \beta) := \sigma(\alpha) - \sigma(\beta)$ $(\alpha, \beta \in \mathrm{A}^\wedge)$. Тогда $\bar{\sigma}$ — модифицированный подъем $\bar{s}$ и $\rho \circ \bar{\sigma}$ — модифицированный подъем $\lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert \circ s$. Согласно 10.3.8 будет $[\![\, \lim \rho \circ \bar{\sigma} = 0 \,]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $\mathbb{V}^{(B)} \models$«σ — фундаментальная сеть в $\mathscr{X}$». Так как $\mathscr{X}$ — банахово пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то по принципу максимума существует элемент $x \in X$ такой, что $[\![\, \lim \rho \circ \sigma_0 = 0 \,]\!] = \mathbb{1}$, где $\sigma_0 : \mathrm{A}^\wedge \to \mathscr{X}$ задано формулой $\sigma_0(\alpha) := \sigma(\alpha) - x$ $(\alpha \in \mathrm{A}^\wedge)$. Модифицированный спуск σ_0 представляет собой сеть $s_0 : \alpha \mapsto s(\alpha) - x$ $(\alpha \in \mathrm{A})$. Следовательно, вновь используя 10.3.8, мы приходим к равенству $o\text{-}\lim |\cdot| \circ s_0 = 0$, т. е. $o\text{-}\lim \lvert\!\lvert s(\alpha) - x\rvert\!\rvert = 0$. $\rhd$

Расширенное пространство Банаха — Канторовича $\mathscr{X}{\downarrow} := (\mathscr{X}, \rho){\downarrow} := (\mathscr{X}{\downarrow}, \rho{\downarrow})$ называют *спуском банахова пространства* $(\mathscr{X}, \rho)$.

11.3.2. Теорема. *Для любого решеточно нормированного пространства X существует единственное (с точностью до линейной изометрии) банахово пространство $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ такое, что $B \simeq \mathfrak{B}\left(\lvert\!\lvert X\rvert\!\rvert^{\perp\perp}\right)$ и спуск $\mathscr{X}{\downarrow}$ служит максимальным расширением X.*

$\lhd$ Возьмем решеточно нормированное пространство X с нормой $\lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert : X \to E$. Без ограничения общности можно предположить, что $E = \lvert\!\lvert X\rvert\!\rvert^{\perp\perp} \subset mE = \mathscr{R}{\downarrow}$ и $B = \mathfrak{B}(E)$. Положим

$$d(x, y) := \lvert\!\lvert x - y\rvert\!\rvert^{\perp\perp} \quad (x, y \in X).$$

Легко проверить, что d — это B-метрика на множестве X. Снабдим поле $\mathbb{C}$ дискретной B-метрикой d_0. Тогда операции сложения $+ : X \times X \to X$ и умножения $\cdot : \mathbb{C} \times X \to X$, а также векторная норма $\lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert$ будут нерастягивающими отображениями. Эти свойства почти очевидны. Например, для $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $x, y \in X$ выполняется

$$d(\alpha x, \beta y) = \lvert\!\lvert \alpha x - \beta y\rvert\!\rvert^{\perp\perp} \leqslant \big(|\alpha| \lvert\!\lvert x - y\rvert\!\rvert\big)^{\perp\perp} \vee \big(|\alpha - \beta| \lvert\!\lvert y\rvert\!\rvert\big)^{\perp\perp} \leqslant d(x, y) \vee d_0(\alpha, \beta),$$

откуда видно указанное свойство умножения.

Пусть $\mathscr{X}_0$ — булевозначная реализация B-множества (X, d) (см. 5.7.2, 5.7.6). Положим $\rho_0 := \mathscr{F}^{\sim}(\lvert\!\cdot\!\rvert)$, $\oplus := \mathscr{F}^{\sim}(+)$ и $\odot := \mathscr{F}^{\sim}(\cdot)$, где $\mathscr{F}^{\sim}$ — вложение, определенное в 5.7. Отображения $\oplus$ и $\odot$ определяют на множестве $\mathscr{X}_0$ структуру векторного пространства над полем $\mathbb{C}^{\wedge}$, а функция $\rho_0 : \mathscr{X}_0 \times \mathscr{X}_0 \to \mathscr{R}$ служит нормой. По принципу максимума существуют элементы $\mathscr{X}, \rho \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которых $[\![\, (\mathscr{X}, \rho)$ — комплексное банахово пространство — пополнение нормированного пространства $(\mathscr{X}_0, \rho_0) \,]\!] = \mathbb{1}$. При этом мы можем предположить, что $[\![\, \mathscr{X}_0$ — плотное $\mathbb{C}^{\wedge}$-подпространство в $\mathscr{X} \,]\!] = \mathbb{1}$. Пусть $\imath : X \to X_0 := \mathscr{X}_0{\downarrow}$ — каноническое вложение (см. 5.7.6). Так как $+$ — нерастягивающее отображение из $X \times X$ в X, то и сложение в X_0, т. е. отображение $+ := \oplus{\downarrow}$, однозначно определенное соотношением $\imath \circ + = + \circ (\imath \times \imath)$, где $\imath \times \imath : (x, y) \mapsto (\imath x, \imath y)$ — каноническое вложение B-множества $X \times X$. Но это равносильно аддитивности $\imath$. Аналогично, для операции $\cdot := \odot{\downarrow}$ будет $\imath \circ \cdot\, = \,\cdot \circ (\varkappa \times \imath)$, где $\varkappa \times \imath : (\lambda, x) \mapsto (\lambda^{\wedge}, \imath x)$ $(\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in X)$. Таким образом, $\imath$ — линейный оператор. Повторив те же рассуждения для $\lvert\!\cdot\!\rvert_0 := \rho_0{\downarrow}$, получим $\imath_E \circ \lvert\!\cdot\!\rvert_0 = \lvert\!\cdot\!\rvert_0 \circ \imath$, где $\imath_E$ — каноническое вложение E. Это означает, что $\imath$ — изометрия, т. е. $\imath$ сохраняет векторную норму.

Рассмотрим расширенное пространство Банаха — Канторовича $(Y, \lvert\!\cdot\!\rvert_1)$ такое, что $\imath X \subset Y \subset \mathscr{X}{\downarrow}$ и норма $\lvert\!\cdot\!\rvert_1$ служит ограничением $\rho{\downarrow}(y)$ на Y. Из разложимости нормы $\lvert\!\cdot\!\rvert_1$ и дизъюнктной полноты Y следует, что $X_0 \subset Y$. Действительно, $X_0 = \operatorname{mix}(\imath X)$, а в силу условия (с) из 11.3.1 (2) для $x \in \mathscr{X}{\downarrow}$ будет $x = \operatorname{mix}(b_\xi \imath x_\xi)$ в том и только в том случае, когда $x = bo\text{-}\sum \chi(b_\xi)\imath x_\xi$. В то же время Y разложимо и d-полно. Следовательно, согласно 11.1.4 и 11.1.6 Y инвариантно относительно каждого проектора $x \mapsto \chi(b)x$ $(x \in \mathscr{X}{\downarrow})$ и содержит все суммы указанного вида. По аналогичным соображениям $Y = \operatorname{mix}(Y)$. Если $\mathscr{Y} := Y{\uparrow}$, то $[\![\, \mathscr{X}_0 \subset \mathscr{Y} \subset \mathscr{X} \,]\!] = \mathbb{1}$, причем, $\mathscr{Y}{\downarrow} = Y$. Пусть $\sigma : \omega^{\wedge} \to \mathscr{Y}$ — последовательность Коши и s — ее модифицированный спуск. Тогда s будет bo-фундаментальной последовательностью в Y и, следовательно, существует $y = \lim s$. Как видно из 10.3.8, $[\![\, y = \lim \sigma \,]\!] = \mathbb{1}$. Этим установлена полнота пространства $\mathscr{Y}$, а вместе с ней и равносильные соотношения $\mathscr{X} = \mathscr{Y}$ и $X = Y$.

Пусть $\mathscr{Z}$ — банахово пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, причем $\mathscr{Z}{\downarrow}$ — максимальное расширение решеточно нормированного пространства X. Если $\imath'$ — соответствующее изометрическое вложение X в $\mathscr{Z}{\downarrow}$, то $\imath' \circ \imath$ обладает единственным продолжением до линейной изометрии X_0 на дизъюнктно полное подпространство $Z_0 \subset \mathscr{Z}{\downarrow}$. Пространства $\mathscr{X}_0$ и $\mathscr{Z}_0 := Z_0{\uparrow}$ изометричны. Но тогда изометричны и их пополнения $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y} \subset \mathscr{Z}$ соответственно. Так как $\mathscr{Y}{\downarrow}$ — пространство Банаха — Канторовича и $\imath X \subset \mathscr{Y}{\downarrow} \subset \mathscr{Z}{\downarrow}$, то $\mathscr{Y}{\downarrow} = \mathscr{Z}{\downarrow}$. Поэтому, $\mathscr{Y} = \mathscr{Z}$ и, стало быть, $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Z}$ линейно изометричны. $\rhd$

11.3.3. Теорема. *Каждое решеточно нормированное пространство (X, E) обладает единственным с точностью до линейной изометрии максимальным расширением $(mX, \lvert\!\cdot\!\rvert_m, mE)$. При этом для любых $x \in mX$ и $\varepsilon > 0$ найдутся семейство $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в X и разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в $\mathfrak{P}(mX)$ такие, что*

$$\Bigl\lvert x - \sum_{\xi \in \Xi} \pi_\xi \imath(x_\xi) \Bigr\rvert_m \leqslant \varepsilon \lvert x \rvert_m.$$

$\lhd$ Пользуясь обозначениями из 11.1.8, положим $mX := \mathscr{X}{\downarrow}$ и $\lvert\!\cdot\!\rvert_m := \rho{\downarrow}(\cdot)$. Как следует из 11.3.2, $(mX, \lvert\!\cdot\!\rvert_m, mE, \imath)$ — максимальное расширение пространства X.

Зафиксируем единицу $e \in E^{+}$ и возьмем $x \in mX$. Ясно, что $[\![\, e \in \mathscr{R} \,]\!] = [\![\, e > 0 \,]\!] = [\![\, x \in \mathscr{X} \,]\!] = \mathbb{1}$. Так как $[\![\, \mathscr{X}_0$ плотно в $\mathscr{X} \,]\!] = \mathbb{1}$, то для любого $\varepsilon > 0$ в силу принципа максимума найдется такой элемент $x_\varepsilon \in \mathbb{V}^{(B)}$, что

$$[\![\, x_\varepsilon \in \mathscr{X}_0 \,]\!] = [\![\, \rho(x - x_\varepsilon) \leqslant \varepsilon^\wedge \cdot e \,]\!] = \mathbb{1}.$$

Отсюда выводим: $x_\varepsilon \in X_0$ и $|x - x_\varepsilon|_m \leqslant \varepsilon e$. Осталось заметить, что $X_0 = \operatorname{mix}(\imath(X))$ и поэтому x_ε имеет вид $\sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi \imath(x_\xi)$, где $(x_\xi) \subset X$, а (π_ξ) — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(mX)$.

Пусть $(Y, |\cdot|_1, mE, \imath_0)$ — это максимальное расширение пространства X. Ввиду 11.3.1 будем считать, что $Y = \mathscr{Y}{\downarrow}$, где $\mathscr{Y}$ — банахово пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. По теореме 11.3.1 $[\![$ существует линейная изометрия λ пространства $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$ $]\!] = \mathbb{1}$. Но тогда $\lambda{\downarrow}$ — линейная изометрия $\mathscr{X}{\downarrow}$ на Y. $\rhd$

11.3.4. Рассмотрим решеточно нормированное пространство X над E. Подпространство $X_0 \subset X$ назовем *bo-идеалом,* если для произвольных $x \in X$ и $x_0 \in X_0$ неравенство $|x| \leqslant |x_0|$ влечет $x \in X_0$. Скажем, что X_0 — *bo*-фундамент X, если X_0 служит *bo*-идеалом X и в X нет ненулевых элементов, дизъюнктных X_0. Легко видеть, что если X разложимо и $|X|^{\perp\perp} = E$, то подпространство $X_0 \subset X$ будет *bo*-идеалом (*bo*-фундаментом) в том и только в том случае, если $X_0 = h(L)$ для некоторого *o*-идеала (фундамента) $L \subset E$. Действительно, возьмем произвольный *bo*-идеал $X_0 \subset X$ и обозначим буквой L *o*-идеал в E, порожденный множеством $|X_0|$, см. 11.1.3. Как видно из определения 11.1.3, $X_0 \subset h(L)$. Если $x \in h(L)$, то $|x| \leqslant |u_1| + \dots + |u_n|$ для подходящих $u_1, \dots, u_n \in X_0$. Ввиду разложимости X, имеет место представление $x = x_1 + \dots + x_n$, где $|x_k| \leqslant |u_k|$ $(k := 1, \dots, n)$. По определению *bo*-идеала $x_k \in X_0$, следовательно, $x \in X_0$. Тем самым $X_0 = h(L)$. Для произвольного $x \in X$ соотношения $x \perp X_0$ и $|x| \perp L$ эквивалентны, см. 11.1.2. Стало быть, X_0 будет *bo*-фундаментом X лишь в том случае, когда L — фундамент E. Достаточность очевидна.

Решеточно нормированное пространство линейно изометрично bo-фундаменту своего максимального расширения тогда и только тогда, когда оно разложимо и bo-полно, т. е. является пространством Банаха — Канторовича.

$\lhd$ Очевидно, что *bo*-фундамент пространства Банаха — Канторовича разложим и *o*-полон. Наоборот, пусть X — разложимое и *bo*-полное решеточно нормированное пространство. Можно показать, что $E_0 := |X|^{\perp\perp}$ есть K-пространство. Поэтому, считая E_0 фундаментом $\mathscr{R}{\downarrow}$, мы не умаляем общности. Пусть $x \in mX$ и $|x|_m \in E_0$. В силу 11.3.3 найдется последовательность $(x_n) \subset X$, для которой

$$|x_n| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)|x|_m, \quad |x - x_n|_m \leqslant \frac{1}{n}|x|_m \quad (n \in \omega).$$

Так как *bo*-полное разложимое пространство *d*-полно и *br*-полно, то отсюда вытекает, что $x_n \in X$ и $x \in X$. Значит, $X = \{x \in mX : |x|_m \in E_0\}$, т. е. X — *bo*-фундамент mX. $\rhd$

11.3.5. Для подмножества $U \subset Y$ введем обозначения:

$$rU := \bigl\{y := br\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n : (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U\bigr\},$$

$$oU := \Bigl\{y := bo\text{-}\lim_{\alpha} y_\alpha : (y_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \subset U\Bigr\},$$

$$dU := \Bigl\{y := bo\text{-}\sum \pi_\xi y_\xi : (y_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset U\Bigr\},$$

где A — произвольное направленное множество, (π_ξ) — произвольное разбиение единицы в $\mathfrak{P}(Y)$, а пределы и сумма существуют в Y.

Пусть X — решеточно нормированное пространство над E. *Дизъюнктным пополнением* (*d-пополнением*) X называют дизъюнктно полное решеточно нормированное пространство Y над dE, где dE — дизъюнктное пополнение E (при этом dE вычисляется в oE см. 10.4.6), если существует линейная изометрия $\imath : X \to Y$, для которой $Y = d(\imath(X))$.

Порядковым пополнением (*bo-пополнением*) решеточно нормированного пространства X называют пространство Банаха — Канторовича Y над oE вместе с линейной изометрией $\imath : X \to Y$, если любое bo-полное разложимое подпространство $Z \subset Y$, содержащее $\imath(X)$, совпадает с Y. Если $E = mE$, то bo-пополнение пространства X есть его максимальное расширение (см. 11.1.8).

11.3.6. Банахово пространство $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ называют *булевозначной реализацией решеточно нормированного пространства* X, если $\mathscr{X}{\downarrow}$ представляет собой максимальное расширение X. Отметим еще несколько простых применений понятия булевозначной реализации.

(1) *Для любого решеточно нормированного пространства существует единственное с точностью до линейной изометрии bo-пополнение (d-пополнение).*

$\lhd$ Пусть $\imath$ — линейное изометрическое вложение X в его максимальное расширение mX (см. 11.1.8 и 11.3.3). Напомним, что $dE \subset oE \subset mE$. Положим

$$Y := \{x \in mX : \ \lvert x\rvert_m \in oE\}.$$

Тогда Y — это bo-пополнение, а d-пополнением X будет $d(\imath(X))$. $\rhd$

(2) *Для bo-пополнения $\overline{X}$ пространства X выполняется $\overline{X} = rdX$.*

$\lhd$ Следует из 11.3.3. $\rhd$

(3) *Разложимое решеточно нормированное пространство bo-полно тогда и только тогда, когда оно d-полно и br-полно.*

$\lhd$ Необходимость этих условий отмечалась в 11.1.7. Достаточность вытекает из (2). $\rhd$

(4) *Пусть $(X, \lvert\cdot\rvert, E)$ — пространство Банаха — Канторовича, $E = \lvert X\rvert^{\perp\perp}$ и $A := \mathrm{Orth}(E)$. Тогда можно, и притом единственным способом, определить на X структуру точного унитарного A-модуля так, что естественное представление A в X задает изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{P}(E) \subset A$ и $\mathfrak{P}(X)$. При этом*

$$\lvert ax\rvert = |a|\lvert x\rvert \quad (x \in X, \ a \in A).$$

$\lhd$ Нужно применить 11.3.1 (2). В частности, в силу условия (c) из этого пункта булева алгебра $\mathfrak{P}(X)$ совпадает с множеством операторов умножения $x \mapsto \chi(b)x$ $(x \in X)$, где $b \in B$. $\rhd$

11.3.7. Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — булевозначные реализации пространств Банаха — Канторовича X и Y, нормированных одним и тем же расширенным K-пространством E. Пусть $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ — пространство линейных ограниченных операторов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, где $B := \mathfrak{B}(E)$. Отображение погружения операторов $T \mapsto T^\sim$ осуществляет линейную изометрию между решеточно нормированными пространствами $L_b(X, Y)$ и $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}){\downarrow}$.*

$\lhd$ В силу теоремы 11.3.2 можно предположить, не ограничивая общности, что $E = \mathscr{R}{\downarrow}$, $X = \mathscr{X}{\downarrow}$ и $\mathscr{Y}{\downarrow} = Y$ (определение $L_b(X, Y)$ см. в 11.1.11 (2)). Возьмем отображение $\mathscr{T} : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и положим $T := \mathscr{T}{\downarrow}$. Пусть ρ и θ — нормы банаховых пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$. Положим $p := \rho{\downarrow}$ и $q := \theta{\downarrow}$. Одним и тем же знаком $+$ мы будем обозначать сложение в каждом из пространств $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, X и Y. Из аддитивности и ограниченности оператора $\mathscr{T}$ вытекают соотношения

$$\mathscr{T} \circ + = + \circ (\mathscr{T} \times \mathscr{T}), \quad \theta \circ \mathscr{T} \leqslant k\rho,$$

где $0 \leqslant k \in \mathscr{R}{\downarrow}$. Правила спуска и подъема для композиции позволяют записать последнее в следующей эквивалентной форме:

$$T \circ + = + \circ (T \times T), \quad q \circ T \leqslant kp.$$

Но это означает, что оператор T аддитивен и ограничен. Однородность T видна из сходных рассуждений. Пусть K — множество таких $0 \leqslant k \in \mathscr{R}{\downarrow}$, что $q(Tx) \leqslant kp(x)$ $(x \in X)$. Тогда внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ выполняется $K{\uparrow} = \{k \in \mathscr{R}^+ : \theta \circ \mathscr{T} \leqslant k\rho\}$. Привлекая 10.3.7, выводим:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models |T| = \inf K = \inf(K{\uparrow}) = \|\mathscr{T}\|.$$

Таким образом, отображение $\mathscr{T} \mapsto \mathscr{T}{\downarrow}$ действует из $\mathscr{L}^{(B)}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}){\downarrow}$ в $L_b(X, Y)$ и сохраняет векторную норму. Для обоснования линейности этого отображения достаточно проверить его аддитивность. Для данных $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2 \in \mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}){\downarrow}$ и фиксированного $x \in X$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ будет

$$(\mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2){\downarrow}(x) = (\mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2)(x) = \mathscr{T}_1 x + \mathscr{T}_2 x = \mathscr{T}_1{\downarrow}x + \mathscr{T}_2{\downarrow}x = (\mathscr{T}_1{\downarrow} + \mathscr{T}_2{\downarrow})x.$$

Следовательно, $(\mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2){\downarrow} = \mathscr{T}_1{\downarrow} + \mathscr{T}_2{\downarrow}$. Итак, спуск осуществляет линейную изометрию $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}){\downarrow}$ на пространство всех экстенсиональных линейных ограниченных операторов из X в Y. Осталось заметить, что каждый линейный ограниченный оператор из X в Y является экстенсиональным, т. е. удовлетворяет неравенству $[\![x = 0]\!] \leqslant [\![Tx = 0]\!]$. В самом деле, если $b := [\![x = 0]\!]$, то $\chi(b)x = 0$ ввиду 11.3.1 (2). Поэтому

$$\chi(b)q(Tx) \leqslant \chi(b)kp(x) = kp(\chi(b)x) = 0.$$

Значит, $q(\chi(b)Tx) = 0$ или $\chi(b)Tx = 0$. Привлекая вновь 11.3.1 (2), получаем $b \leqslant [\![Tx = 0]\!]$. $\triangleright$

11.3.8. Предположим, что X — нормированное пространство и $\widetilde{X}$ — его пополнение. Пусть $\mathscr{X}$ — пополнение $\mathbb{R}^{\wedge}$-нормированного пространства $X^{\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Теорема. *Расширенное пространство Банаха — Канторовича $\mathscr{X}{\downarrow}$ линейно изометрично пространству $C_\infty(Q, \widetilde{X})$, где Q — стоунов компакт булевой алгебры B.*

$\triangleleft$ Отождествим K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$ и $C_\infty(Q)$ и применим теорему 11.3.2 к решеточно нормированному пространству $(X, p, \mathscr{R}{\downarrow})$, где $p(x) = \|x\| \cdot \mathbb{1}$. Используя обозначения из доказательства 11.3.2, заметим, что $\mathscr{X}_0 = X^{\wedge}$. Однако $\mathscr{X}{\downarrow} := (\mathscr{X}{\downarrow}, q, \mathscr{R}{\downarrow})$ — максимальное расширение пространства $(X, p, \mathscr{R}{\downarrow})$. Для простоты предположим, что $X \subset \mathscr{X}{\downarrow}$. Так как $[\![\, X^{\wedge}$ плотно по норме в $\mathscr{X}\,]\!] = \mathbb{1}$, то выводим, что для произвольных $u \in C_\infty(Q, \widetilde{X})$ и $\varepsilon > 0$ существуют семейство $(x_\xi) \subset X$ и разбиение единицы $(Q_\xi) \subset \mathrm{Clop}(Q)$, для которых ступенчатая вектор-функция u_ε, совпадающая с x_ξ на множестве Q_ξ, удовлетворяет оценке

$\lvert u-u_\varepsilon\rvert \leqslant \varepsilon\mathbb{1}$. Положим $\mathscr{T}(u_\varepsilon) := \mathrm{mix}(b_\xi x_\xi)$, где b_ξ обозначает элемент из B, соответствующий открыто-замкнутому множеству Q_ξ. Ясно, что $\lvert\mathscr{T}(u_\varepsilon)\rvert = \lvert u_\varepsilon\rvert$. Таким образом, $\mathscr{T}$ — линейное изометрическое вложение подпространства вектор-функций вида u_ε. Если $\varepsilon \to 0$, то $\lvert u_\varepsilon - u\rvert \xrightarrow{(r)} \mathbb{0}$. Следовательно, $(\mathscr{T}(u_{1/n}))$ — r-фундаментальная последовательность. Поскольку $\mathscr{X}{\downarrow}$ полно, то $\mathscr{X}{\downarrow}$ содержит пределы $v := r\text{-}\lim \mathscr{T}(u_{1/n})$. Полагая $\mathscr{T}(u) := v$, мы получим линейное изометрическое вложение $\mathscr{T} : C_\infty(Q, \widetilde{X}) \to \mathscr{X}{\downarrow}$. Если $Z := \mathrm{im}(\mathscr{T})$, то Z — разложимое bo-полное подпространство $\mathscr{X}{\downarrow}$, причем $X \subset Z$. По теореме 11.3.2 и определению из 11.1.8 будет $Z = \mathscr{X}{\downarrow}$. $\triangleright$

11.3.9. *Пусть $\mathscr{X}'$ — сопряженное пространство к X внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда пространства $\mathscr{X}'{\downarrow}$ и $E_w(X')$, где $E = C_\infty(Q)$, линейно изометричны.*

$\triangleleft$ Применим теорему 11.3.3 к $Y := E$ и $X := (X, \lvert\cdot\rvert, E)$, где $\lvert x\rvert = \|x\|\mathbb{1}$. Тогда получим, что пространства $\mathscr{X}'{\downarrow} := \mathscr{L}^{(B)}(\mathscr{X}, \mathscr{R}){\downarrow}$ и $L_A(X, E)$ линейно изометричны. Для завершения доказательства достаточно привлечь 11.2.8. $\triangleright$

11.4. Операторы Магарам

В этом параграфе мы изучим класс порядково непрерывных регулярных операторов, которые во многих отношениях ведут себя как функционалы. В частности, в этом классе операторов справедлива общая теорема типа Радона — Никодима.

11.4.1. Предположим, что решеточно нормированное пространство X является в то же время векторной решеткой. Норму $\lvert\cdot\rvert : X \to E^+$ называют *монотонной*, если $|x| \leqslant |y|$ влечет $\lvert x\rvert \leqslant \lvert y\rvert$ $(x, y \in X)$. При этом говорят, что X — *решеточно нормированная решетка.* Если же, сверх того, X — пространство Банаха — Канторовича, то говорят о решетке Банаха — Канторовича.

Норму решеточно нормированной решетки $(X, \lvert\cdot\rvert)$ именуют: *аддитивной*, если $\lvert x + y\rvert = \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ для любых $x, y \in X^+$; *порядково непрерывной*, если для всякой убывающей к нулю сети $(x_\alpha) \subset X$ выполняется $bo\text{-}\lim_\alpha \lvert x_\alpha\rvert = 0$; *порядково полунепрерывной*, если для любой возрастающей сети $(x_\alpha) \subset X$ из $x = \sup_\alpha x_\alpha$ следует $\lvert x\rvert = \sup_\alpha \lvert x_\alpha\rvert$; *монотонно полной*, если для любой возрастающей сети $\lvert x_\alpha\rvert \subset X$ такой, что сеть $(\lvert x_\alpha\rvert)$ ограничена в E, существует супремум $x = \sup_\alpha x_\alpha$.

11.4.2. Булевозначная реализация решеток Банаха — Канторовича выводится из 11.3.2, но для этого необходимо несколько вспомогательных фактов.

(1) *Пусть X — разложимое решеточно нормированное пространство над векторной решеткой E. Если X — векторная решетка, причем векторная норма в ней монотонна, то $\mathscr{B}(X)$ является правильной подалгеброй булевой алгебры $\mathfrak{B}(X)$. В частности, всякая компонента решеточно нормированного пространства X будет компонентой векторной решетки X.*

$\triangleleft$ Заметим, что в силу монотонности векторной нормы множество $h(L)$ будет порядковым идеалом в X для любой компоненты $L \in \mathfrak{B}(E)$. Если $0 \leqslant x \in h(L)$ и $0 \leqslant y \in h(L^\perp)$, то $0 \leqslant x \wedge y \in h(L) \cap h(L^\perp) = \{0\}$, так как монотонность нормы влечет $\lvert x \wedge y\rvert \leqslant \lvert x\rvert \wedge \lvert y\rvert$. Итак, $x \wedge y = 0$ и, стало быть, элементы x и y дизъюнктны не только в смысле 11.1.2, но и в смысле порядка в X. Обозначим буквой d отношение дизъюнктности в векторной решетке X, т. е. $u\,d\,v \leftrightarrow |u| \wedge |v| = 0$. Тогда доказанное можно написать в виде $h(L)\,d\,h(L^\perp)$, откуда вытекает включение $h(L^\perp) \subset h(L)^d$, где $A^d := \{x \in X : (\forall a \in A)\, x\,d\,a\}$. В действительности имеет место равенство $h(L^{\perp}) = h(L)^d$ для любой компоненты $L \in \mathfrak{B}(E)$. В самом деле, предположим, что $x\,d\,h(L)$ и $x \notin h(L^{\perp})$. Тогда $|x| \notin L^{\perp}$ и поэтому существует $0 < e \in L$, для которого $e \leqslant |x|$. Воспользовавшись разложимостью X, подберем такие $u, v \in X$, что $x = u + v$, $|u| = e$ и $|v| = |x| - e$. Так как $u \in h(L)$, то $x\,d\,u$ и поэтому $|x| \leqslant |v|$. Но тогда $|x| \leqslant |v| = |x| - e$ и мы приходим к противоречивому соотношению $0 < e \leqslant 0$. Итак, $x\,d\,h(L)$ влечет $x \in h(L^{\perp})$. Следовательно, $h(L^{\perp}) = h(L)^d$. Заменив L на $L^{\perp}$, получим $h(L) = h(L^{\perp})^d$. Отсюда вытекает, что $h(L) \in \mathfrak{B}(X)$, т. е. $\mathscr{B}(X) \subset \mathfrak{B}(X)$. В то же время, учитывая 11.1.3, можно написать $h(L)^{\perp} = h(L^{\perp}) = h(L)^d$. Поэтому булево дополнение в алгебре $\mathscr{B}(X)$ индуцировано из $\mathfrak{B}(X)$. Так как точные нижние границы в обеих алгебрах совпадают с теоретико-множественным пересечением, то можно заключить, что $\mathscr{B}(X)$ — правильная подалгебра булевой алгебры $\mathfrak{B}(X)$. $\triangleright$

(2) *Пусть X — то же, что и в (1), а E — векторная решетка с проекциями. Тогда $\mathscr{P}(X)$ будет правильной подалгеброй полной булевой алгебры $\mathfrak{P}(X)$. В частности, каждый проектор на компоненту решеточно нормированного пространства X является порядковым проектором векторной решетки X.*

$\triangleleft$ Следует из (1) и 11.1.4. $\triangleright$

Скажем, что решеточно нормированное пространство X над E *допускает согласованную модульную структуру над кольцом* $A := \mathfrak{P}(E)$, если X можно снабдить структурой точного унитарного A-модуля так, что $|ax| = |a||x|$ ($a \in A$, $x \in X$) и естественное представление A в X определяет тот же изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{P}(E)$ и $\mathscr{P}(X)$, что и в 11.1.4. В том случае, когда X — векторная решетка, мы дополнительно предполагаем, что $\mathscr{B}(X)$ — правильная подалгебра полной булевой алгебры компонент $\mathfrak{B}(X)$.

(3) *Пусть X — некоторое d-разложимое секвенциально bo-полное решеточно нормированное пространство (решетка) над порядково σ-полной векторной решеткой E, причем $E = |X|^{\perp\perp}$. Тогда X допускает согласованную структуру модуля над* $\mathrm{Orth}(E)$.

$\triangleleft$ Пусть конечнозначный элемент $a \in A$ имеет представление $a = \sum \lambda_k \pi_k$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и $\pi_1, \dots, \pi_n$ — конечное разбиение единицы в $\mathfrak{P}(E)$. Положим $ax := \sum \lambda_k \pi_k x$. Отождествляя булевы алгебры $\mathfrak{P}(E)$ и $\mathscr{P}(X)$, с учетом 11.1.4 можно написать

$$|ax| = \left|\sum \lambda_k \pi_k x\right| = \sum |\lambda_k| \pi_k |x| = a|x|.$$

Далее, произвольный элемент $a \in A$ является порядковым пределом возрастающей последовательности конечнозначных элементов $(a_n) \subset A$. Последовательность $(a_n x) \subset X$ будет bo-фундаментальной, так как $|a_n x - a_m x| = |a_n - a_m||x| \overset{(o)}{\to} 0$. Таким образом, можно положить по определению $ax := br\text{-}\lim a_n x$. При этом имеют место равенства:

$$|ax| = |br\text{-}\lim a_n x| = r\text{-}\lim |a_n||x| = a|x|,$$
$$|ax| = |bo\text{-}\lim a_n x| = o\text{-}\lim |a_n||x| = a|x|.$$

Прочие утверждения очевидны. В случае, когда X — решеточно нормированная решетка, следует привлечь (2). $\triangleright$

11.4.3. Теорема. *Пусть $(X, |\cdot|)$ — пространство Банаха — Канторовича, а $(\mathscr{X}, \|\cdot\|) \in \mathbb{V}^{(B)}$ — его булевозначная реализация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *X — решетка Банаха — Канторовича в том и только в том случае, когда $\mathbb{V}^{(B)} \models$«$\mathscr{X}$ — банахова решетка»;*

(2) *X — порядково полная решетка Банаха — Канторовича в том и только в том случае, когда $\mathbb{V}^{(B)} \models$«$\mathscr{X}$ — порядково полная банахова решетка»;*

(3) *норма $|\!\cdot\!|$ порядково непрерывна (порядково полунепрерывна, монотонно полна, аддитивна) в том и только в том случае, когда $\mathbb{V}^{(B)} \models$«норма $\|\cdot\|$ — порядково непрерывна (порядково полунепрерывна, монотонно полна, аддитивна)».*

$\triangleleft$ Утверждения (1) и (2) являются комбинацией 11.3.1, 11.3.2 и 8.5.1. Для доказательства (3) нужно дополнительно привлечь 10.3.7 и 10.3.8. $\triangleright$

11.4.4. Пусть E — векторная решетка, F — некоторое K-пространство и пусть T — положительный оператор из E в F. Говорят, что T обладает *свойством Магарам*, если для любых $x \in E^+$ и $0 \leqslant f \leqslant Tx \in F^+$ существует $0 \leqslant e \leqslant x$ такой, что $f = Te$. Ясно, что оператор $T \in L^+(E, F)$ обладает свойством Магарам в том и только в том случае, когда для каждого $x \in E^+$ порядковый интервал $[0, x]$ отображается на порядковый интервал $[0, Tx]$, т. е. $T\,([0, x]\,) = [0, Tx]$. Положительный порядково непрерывный оператор, обладающий свойством Магарам, называют *оператором Магарам*. Иными словами, оператор Магарам — это положительный порядково непрерывный оператор, сохраняющий порядковые интервалы.

(1) *Пусть T — существенно положительный оператор из E в F, удовлетворяющий условию Магарам. Положим $|e| := T(|e|)$ $(e \in E)$. Тогда $(E, |\!\cdot\!|)$ — дизъюнктно разложимое решеточно нормированное пространство над F.*

$\triangleleft$ Ясно, что $|\!\cdot\!|$ — монотонная векторная норма на E. Справедливость аксиом 11.1.1 (1–3) очевидна из определений. Если $|e| = f_1 + f_2$ для некоторых $e \in E^+$ и $f_1, f_2 \in F^+$, $f_1 \perp f_2$, то в силу условия Магарам существуют $e_1, e_2 \in [0, |e|]$ такие, что $Te_k = f_k$ $(k := 1, 2)$. Поскольку $T(e_1 \wedge e_2) \leqslant f_1 \wedge f_2 = 0$, то $e_1 \perp e_2$ ввиду существенной положительности T. Отсюда вытекает, что $e_1 + e_2 \leqslant |e|$. Следовательно, учитывая равенство $T(|e| - e_1 - e_2) = 0$ и привлекая вновь существенную положительность оператора T, мы приходим к соотношению $|e| = e_1 + e_2$. Модуль элемента в векторной решетке является разложимой нормой (см. 11.2.1) и поэтому $e = u_1 + u_2$, $|u_1| = e_1$ и $|u_2| = e_2$ для подходящих $u_1, u_2 \in E$. $\triangleright$

Положим $F_T := \{T(|x|) : x \in E\}^{\perp\perp}$ и обозначим через $\mathscr{D}_m(T)$ наибольший фундамент максимального расширения $m(E)$ пространства E, на который оператор T может быть продолжен по o-непрерывности. Таким образом, $z \in \mathscr{D}_m(T)$ в том и только в том случае, когда $z \in m(E)$ и множество $\{T(x) : x \in E, 0 \leqslant x \leqslant |z|\}$ ограничено в F. При этом минимальное продолжение оператора T на $\mathscr{D}_m(T)$ существует, являясь положительным порядково непрерывным оператором (см. 10.2.10).

(2) *Пусть E и F — произвольные K-пространства, а $T : E \to F$ — существенно положительный оператор Магарам. Тогда существуют фундамент $E \subset X \subset mE$ и существенно положительный оператор Магарам $\Phi : X \to mF$, такие что $X = \mathscr{D}_m(\Phi)$ и $\Phi(e) = Te$ $(e \in E)$.*

$\triangleleft$ Рассмотрим bo-пополнение $\overline{E}$ решеточно нормированного пространства $(E, |\!\cdot\!|)$ из (1). Ввиду 11.3.6 (2) $\overline{E} = rd(E)$, где $d(E)$ вычисляется относительно правильной подалгебры $\mathscr{P}(X)$ базы $\mathscr{Z}(\backslash)$, см. 11.4.2 (2). Отсюда видно, что $\overline{E}$ — фундамент в mE. Пусть $\mathscr{X}$ — булевозначная реализация пространства Банаха — Канторовича $(\overline{E}, |\!\cdot\!|)$ и $X := \mathscr{X}{\downarrow}$. Будем считать, что $mE = \mathscr{R}{\downarrow}$. Так как

$\overline{E}$ — K-пространство и векторная норма в нем аддитивна и (o)-непрерывна, то согласно 11.4.3 X — также K-пространство и норма в нем o-непрерывна и аддитивна. Согласно 11.3.4 $\overline{E}$ будет bo-фундаментом в X, а силу монотонности нормы (см. 11.4.1) $\overline{E}$ — также фундамент в X в смысле теории векторных решеток. Тем самым, X — фундамент в mE. Положим $\Phi(x) = \boldsymbol{|}x^+\boldsymbol{|} - \boldsymbol{|}x^-\boldsymbol{|}$ $(x \in X)$. Как видно, $\Phi : X \to mF$ — линейный положительный o-непрерывный оператор. Далее, X допускает согласованную структуру модуля над кольцом $\operatorname{Orth}(mF)$ (см. 11.4.2 (3)), откуда вытекает свойство Магарам для Φ. В самом деле, если $0 \leqslant y \leqslant \Phi(x)$ и $0 \leqslant x \in X$, то $y = \alpha\Phi(x)$ для некоторого $\alpha \in \operatorname{Orth}(mF)^+$, поэтому $y = \alpha\Phi(x) = \Phi(\alpha x)$, причем $0 \leqslant \alpha x \leqslant x$. Очевидно также, что Φ — продолжение T. $\rhd$

11.4.5. Теорема. *Пусть E и F — некоторые K-пространства, а $T : E \to F$ — существенно положительный оператор Магарам. Положим $X := \mathscr{D}_m(T)$ и $\boldsymbol{|}x\boldsymbol{|} := \Phi(|x|)$ $(x \in X)$, где Φ — продолжение T на X по o-непрерывности. Тогда $(X, \boldsymbol{|}\cdot\boldsymbol{|})$ — решетка Банаха — Канторовича с порядково непрерывной аддитивной нормой.*

$\lhd$ Принимая во внимание 11.4.4 и теорему 11.1.7 (1), достаточно установить дизъюнктную полноту и br-полноту решеточно нормированной решетки X. Возьмем метрически дизъюнктное семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в X, для которого $\boldsymbol{|}x_\xi\boldsymbol{|} \leqslant f \in F$ при всех $\xi \in \Xi$. Это семейство bo-суммируемо тогда и только тогда, когда bo-суммируемо семейство $(|x_\xi|)_{\xi\in\Xi}$. Значит, можно считать $x_\xi \geqslant 0$ для всех $\xi \in \Xi$. Положим $\Theta := \mathscr{P}_{\text{fin}}(\Xi)$ и $x_\theta := \sum_{\xi\in\theta} x_\xi$ для $\theta \in \Theta$. Ясно, что семейство $(x_\theta)_{\theta\in\Theta}$ возрастает, а семейство $(Tx_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ограничено сверху, так как $Tx_\theta = \boldsymbol{|}x_\theta\boldsymbol{|} \leqslant f$. По условию существует $x := \sup_\theta x_\theta$, причем $Tx = \sup_\theta Tx_\theta$. Отсюда вытекает, что x и есть bo-сумма семейства (x_ξ), ибо $\boldsymbol{|}x - x_\theta\boldsymbol{|} = T(x - x_\theta) \xrightarrow{(o)} 0$. Рассмотрим теперь br-фундаментальную последовательность $(x_n) \subset X$. Переходя к подпоследовательности, если нужно, можно считать, что $\boldsymbol{|}x_n - x_{n-1}\boldsymbol{|} \leqslant (1/n^3)f$ $(n \in \mathbb{N})$ для некоторого $f \in F^+$. Положим $f_m := \sum_{n=2}^m n\boldsymbol{|}x_n - x_{n-1}\boldsymbol{|}$ и $e_m := \sum_{n=2}^m n|x_n - x_{n-1}|$. Последовательность (e_m) возрастает, а последовательность (f_m) возрастает и ограничена сверху, так как ряд $\sum_{n=2}^\infty n\boldsymbol{|}x_n - x_{n-1}\boldsymbol{|}$, мажорируемый o-сходящимся рядом $\sum_{n=2}^\infty (1/n^2)f$, сам o-сходится. Так как $Te_m = f_m$, то по условию существует $e := \sup_m e_m$. Но тогда

$$n|x_{n+k} - x_n| = n\left|\sum_{l=n+1}^{n+k} (x_l - x_{l-1})\right| \leqslant \sum_{l=n+1}^{n+k} l|x_l - x_{l-1}| \leqslant e_{n+k} - e_n \leqslant e,$$

откуда $|x_{n+k} - x_n| \leqslant (1/n)e$. Итак, последовательность (x_n) r-фундаментальна. Значит, в X существует $x := r\text{-}\lim_n x_n$, а переход к br-пределу в последнем неравенстве при $k \to \infty$ дает $|x_n - x| \leqslant (1/n)e$. Отсюда видно, что $\boldsymbol{|}x_n - x\boldsymbol{|} \leqslant (1/n)\boldsymbol{|}e\boldsymbol{|}$, т. е. $br\text{-}\lim_n x_n = x$ и br-полнота X обоснована. $\rhd$

Говорят, что линейный оператор $S : E \to F$ *абсолютно непрерывен относительно* T и пишут $S \ll T$, если $|S(x)| \in \{T(|x|)\}^{\perp\perp}$ для всех $x \in E$.

11.4.6. Теорема. *Пусть E и F — некоторые K-пространства и пусть T — оператор Магарам из E в F. Тогда существует решеточный гомоморфизм h из расширенного K-пространства $\operatorname{Orth}^\infty(F_T)$ на правильное подпространство K-пространства $\operatorname{Orth}^\infty(E_T)$ такой, что выполнены следующие условия*:

(1) *$h(\mathfrak{P}(F_T))$ — правильная подалгебра полной булевой алгебры $\mathfrak{P}(E_T)$;*

(2) *$h(\mathscr{Z}(F_T))$ — подрешетка и подкольцо $\mathscr{Z}(E_T)$;*

(3) *для линейного оператора $S : E \to F$, абсолютно непрерывного относительно T, выполняется равенство $\pi \circ S(x) = S \circ h(\pi)\,(x)$;*

(4) *для положительного o-непрерывного оператора $S : E \to F$, абсолютно непрерывного относительно T, равенство $\pi \circ S(x) = S \circ h(\pi)\,(x)$ выполняется при всех $\pi \in \mathrm{Orth}^\infty(F_T)$ и $x \in \mathscr{D}(h(\pi))$ и, в частности, S — оператор Магарам.*

$\lhd$ Без ограничения общности можно предположить, что $E = E_T$ и $F = F_T$. Положим по определению

$$|\!|e|\!| := T(|e|) \quad (e \in E).$$

Из 11.4.4 видно, что $(X, |\!|\cdot|\!|)$ — дизъюнктно разложимая решеточно нормированная решетка. Согласно 11.4.2 (3) E допускает согласованную модульную структуру над кольцом $A := \mathrm{Orth}(F)$. Пусть $h : A \to \mathrm{Orth}(E)$ — естественное представление A в $\mathrm{Orth}(E)$. Тогда из 11.4.2 (3) сразу же следует справедливость (1) и (2). Булев изоморфизм h допускает единственное продолжение до решеточного изоморфизма решетки $\mathrm{Orth}^\infty(F)$ на порядково замкнутую подрешетку $\mathrm{Orth}^\infty(E)$, состоящую из тех элементов $\mathrm{Orth}^\infty(E)$, спектральные функции которых принимают свои значения из булевой алгебры $\mathscr{B} = h(\mathfrak{P}(F))$. Этот изоморфизм мы обозначим той же буквой h.

Чтобы доказать (3), рассмотрим положительный оператор $S : E \to F$, абсолютно непрерывный относительно T. По определению изоморфизма h (см. 11.1.3 и 11.1.4) для $\pi \in \mathfrak{P}(F)$ и $x \in E$ будет

$$S \circ h(\pi)x \in \{T \circ h(\pi)x\}^{\perp\perp} \subset \pi\,(F).$$

Следовательно, $\pi^\perp \circ S \circ h(\pi) = 0$. Заменяя π на $\pi^\perp$, получим: $\pi \circ S \circ h(\pi^\perp) = 0$. Из первого равенства вытекает $S \circ h(\pi) = \pi \circ S \circ h(\pi)$, а из второго — $\pi \circ S = \pi \circ S \circ h(\pi)$, что ведет к требуемому: $\pi \circ S = S \circ h(\pi)$.

Докажем (4). Если $\alpha := \sum_{l=1}^n \lambda_l \pi_l$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(F)$, то очевидно $\pi_l \circ \alpha \circ S = \pi_l \circ S(\lambda_l h(\pi_l)) = \pi_l \circ S \circ h(\alpha)$ для всех l. Суммирование по l дает $\alpha \circ S = S \circ h(\alpha)$. Наконец, если $\alpha \in \mathrm{Orth}^\infty(F)^+$, то $\alpha = \sup(\alpha_\xi)$ для некоторой направленной вверх сети (α_ξ) из $\mathscr{Z}(F)$, в то время как элементы $\mathscr{Z}(F)$ являются r-пределами ортоморфизмов вида $\sum_{l=1}^n \lambda_l \pi_l$. Таким образом, для обоснования (3) достаточно сослаться на o-непрерывность оператора S. $\rhd$

11.4.7. Теорема. *Пусть X — произвольное K-пространство и пусть E — фундамент расширенного K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$. Предположим, что $\Phi : X \to E$ — оператор Магарам, причем $X = X_\Phi$ и $E = E_\Phi$. Тогда существуют элементы $\mathscr{X}$ и $\phi \in \mathbb{V}^{(B)}$ такие, что выполнены следующие утверждения*:

(1) *$[\![\mathscr{X}$ — это K-пространство, $\phi : \mathscr{X} \to \mathscr{R}$ — положительный o-непрерывный функционал, причем $\mathscr{X} = \mathscr{X}_\phi = \mathscr{D}_m\,(\phi)]\!] = \mathbb{1}$;*

(2) *если $X' := \mathscr{X}{\downarrow}$ и $\Phi' = \phi{\downarrow}$, то X' — это K-пространство, $\Phi' : X' \to E$ — оператор Магарам и $X' = \mathscr{D}_m(\Phi') = X'_{\Phi'}$;*

(3) *существует линейный и решеточный изоморфизм h из X на некоторый фундамент в X' такой, что $\Phi = \Phi' \circ h$.*

$\lhd$ Рассмотрим решеточно нормированную решетку $X := \mathscr{D}_m(T)$ с нормой $|\!|x|\!| := \Phi(|x|)$ $(x \in X)$. Как видно из 11.4.5 (1), X — расширенное пространство Банаха — Канторовича. Согласно 11.4.3 и 11.4.5 (2) можно считать, что $X = \mathscr{X}{\downarrow}$ для некоторой банаховой решетки $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Кроме того, в силу 11.4.3 (2, 3)

$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models$«$\mathscr{X}$ — K-пространство с аддитивной порядково непрерывной и монотонно полной нормой». По принципу максимума подберем такой элемент $\phi \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, что выполнены равенства

$$[\![\phi : \mathscr{X} \to \mathscr{R}]\!] = [\![(\forall\, x \in \mathscr{X}\,)\, \phi(x) = \|x^+\| - \|x^-\|]\!] = \mathbb{1}.$$

Из аддитивности и порядковой непрерывности нормы следует, что $[\![\phi$ — существенно положительный порядково непрерывный функционал$]\!] = \mathbb{1}$, а монотонная полнота дает $[\![\mathscr{X} = \mathscr{D}_m(\phi)]\!] = \mathbb{1}$. Положим $\Phi' := \phi{\downarrow}$ и заметим, что для произвольного $x \in X$ по определению спуска отображений можно написать

$$[\![\phi{\downarrow}(x) = \phi(x) = \|x^+\| - \|x^-\| = |\!|x^+|\!| - |\!|x^-|\!| = \Phi(x)]\!] = \mathbb{1}.$$

Оставшиеся детали следуют из 11.4.3. $\triangleright$

11.4.8. Теорема 11.4.7 позволяет утверждать, что каждый факт о линейных положительных o-непрерывных функционалах в K-пространствах имеет параллельный вариант для операторов Магарам, который может быть установлен с помощью этой теоремы. Отметим несколько результатов в этом направлении.

Пусть X, Φ, $\mathscr{X}$ и ϕ те же, что и в 11.4.7.

(1) *Линейный оператор S абсолютно непрерывен относительно Φ в том и только в том случае, когда существует элемент $\sigma \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $V^{(B)} \models$ «$\sigma : \mathscr{X} \to \mathscr{R}$ — линейный функционал» и $S = (\sigma{\downarrow}) \circ h$.*

$\triangleleft$ Оператор S будет абсолютно непрерывным относительно Φ тогда и только тогда, когда он экстенсионален. Действительно, необходимость этого утверждения следует из 11.4.6 (3), а достаточность очевидна. Тем самым существует подъем $\sigma := S{\uparrow}$, который представляет собой отображение из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{R}$. Конечно же при этом S совпадает со спуском σ в силу правил сокращения стрелок 5.5.7. $\triangleright$

Обозначим символом $L_\Phi(X, \mathscr{R}{\downarrow})$ пространство всех линейных операторов, абсолютно непрерывных относительно Φ. Понятно, что это пространство представляет собой точный унитарный $\mathscr{R}{\downarrow}$-модуль. Пусть элемент $\mathscr{X}^\#$ таков, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$«$\mathscr{X}^\# := L(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ — пространство всех линейных форм на $\mathscr{X}$». Тогда $\mathscr{X}^\#{\downarrow}$ — точный унитарный модуль над $\mathscr{R}{\downarrow}$.

(2) *Отображение $\sigma \mapsto \sigma{\downarrow}$ (равно как и $S \mapsto S{\uparrow}$) является изоморфизмом модулей $\mathscr{X}^\#{\downarrow}$ и $L_\Phi(X, \mathscr{R}{\downarrow})$.*

$\triangleleft$ Указанное отображение является биекцией в силу (1) и правил сокращения стрелок. Аддитивность и однородность можно установить так же, как и в 10.7.2 (2). $\triangleright$

Пусть теперь $\mathscr{X}_n^\sim$ — пространство регулярных порядково непрерывных функционалов на $\mathscr{X}$, т. е. если $[\![\sigma \in \mathscr{X}_n^\sim]\!] = \mathbb{1}$, то $[\![\sigma : \mathscr{X} \to \mathscr{R}$ — регулярный порядково непрерывный функционал$]\!] = \mathbb{1}$.

(3) *Отображение $\sigma \mapsto \sigma{\downarrow}$ (или $S \mapsto S{\uparrow}$) является порядковым и алгебраическим изоморфизмом решеточно упорядоченных модулей $\mathscr{X}_n^\sim{\downarrow}$ и $\{\Phi\}^{\perp\perp}$.*

$\triangleleft$ Имея в виду (1), нам осталось лишь заметить, что оператор S положителен (регулярен) тогда и только тогда, когда $[\![\sigma$ положителен (регулярен)$]\!] = \mathbb{1}$. Утверждение о положительности следует, например, из соотношений

$$\sigma(\mathscr{X}^+) \subset \mathscr{R} \leftrightarrow \sigma(\mathscr{X}^+){\downarrow} \subset \mathscr{R}{\downarrow} \leftrightarrow \sigma{\downarrow}(\mathscr{X}^+{\downarrow}) \subset \mathscr{R}{\downarrow} \leftrightarrow S(X^+) \subset \mathscr{R}{\downarrow}. \ \triangleright$$

11.4.9. Отметим еще несколько следствий.

(1) *Два оператора из $\{\Phi\}^{\perp\perp}$ дизъюнктны в том и только в том случае, когда дизъюнктны их носители.*

$\lhd$ Нужно внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ применить 10.2.11 и 11.4.8 (3) к функционалам из $\{\phi\}^{\perp\perp}$. $\rhd$

(2) *Для существенно положительного оператора Магарам $\Phi : E \to F$ существует изоморфизм булевых алгебр $\iota : \mathfrak{C}(\Phi) \to \mathfrak{P}(E)$ такой, что $S = \Phi \circ \iota(S)$ для любого оператора $S \in \mathfrak{C}(\Phi)$.*

$\lhd$ Нужно взять в качестве $\iota(S)$ проектор на носитель оператора S. Если S — осколок Φ, то $S^* := I_E - S$ также осколок, причем дизъюнктный к S. Согласно (1) S и S^* имеют дизъюнктные носители, значит, $\iota(S)$ и $\iota(S^\perp)$ также дизъюнктны. Так как $S + S^\perp = \Phi$, то существенная положительность Φ дает $\iota(S) + \iota(S^\perp) = I_E$. Значит, $S = \Phi \circ \iota(S)$. $\rhd$

(3) Теорема Хана о разложении. *Пусть E и F — произвольные K-пространства и пусть $T : E \to F$ — порядково ограниченный оператор, модуль $|T|$ которого является оператором Магарам. Тогда существует порядковый проектор $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ такой, что $T^+ = T \circ \pi$ и $T^- = T \circ \pi^\perp$.*

$\lhd$ Нужно взять $\Phi := |T|$ и в (2) положить $\pi := \iota(T^+)$. $\rhd$

11.4.10. Теорема Люксембурга — Шэпа. *Предположим, что E и F — некоторые K-пространства, S и T — положительные порядково непрерывные операторы из E в F, причем T обладает свойством Магарам. Тогда равносильны следующие утверждения*:

(1) $S \in \{T\}^{\perp\perp}$;

(2) *S абсолютно непрерывен относительно T*;

(3) *существует ортоморфизм $0 \leqslant \rho \in \mathrm{Orth}^\infty(E)$ такой, что $Sx = T(\rho x)$ для всех $x \in \mathscr{D}(\rho)$*;

(4) *существует последовательность ортоморфизмов (ρ_n) в $\mathrm{Orth}(E)$ такая, что $Sx = \sup_n T(\rho_n x)$ для всех $x \in E^+$.*

$\lhd$ Выводится из 11.4.8 и 11.4.9. $\rhd$

11.5. Пространства со смешанной нормой

В этом параграфе мы введем пространства со смешанной нормой и изучим их простейшие свойства.

11.5.1. Напомним, что нормированная (банахова) решетка — векторная решетка E, которая одновременно является нормированным (банаховым) пространством, причем норма в нем монотонна в следующем смысле: если $|x| \leqslant |y|$, то $\|x\| \leqslant \|y\|$ $(x, y \in E)$. Банахову решетку E называют *абстрактным M-пространством* или, короче, *AM-пространством,* если

$$\|x \vee y\| = \|x\| \vee \|y\| \quad (x, y \in E^+).$$

Если единичный шар AM-пространства E содержит наибольший элемент e, то e — сильная единица, а единичный шар E совпадает с симметричным порядковым интервалом $[-e, e]$. В этом случае E именуют *AM-пространством с единицей.* Примером AM-пространства с единицей служит r-полная архимедова векторная решетка ограниченных элементов E с сильной единицей e, если снабдить ее нормой $\|\cdot\|_\infty := \|\cdot\|_e$, см. 10.1.3 (3). В самом деле, нужные свойства нормы $\|\cdot\|_e$ следуют непосредственно из ее определения, а полнота по норме $\|\cdot\|_e$ равносильна полноте относительно сходимости с регулятором e.

Если (X, E) — решеточно нормированное пространство, где E — нормированная решетка, то для каждого $x \in X$ по определению $\lvert x \rvert \in E$. Следовательно, можно ввести *смешанную норму* в X посредством формулы

$$|\!|\!| x |\!|\!| := \big\| \lvert x \rvert \big\| \quad (x \in X).$$

В этой ситуации нормированное пространство $(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ называют *пространством со смешанной нормой.*

Все понятия из 11.1 и 11.2 для решеточно нормированных пространств имеют очевидный смысл и для пространств со смешанной нормой, включая разложимость, bo-идеал, br-полноту, d-полноту, bo-полноту и т. д. Отметим два простых свойства.

(1) *Векторная норма $\lvert\cdot\rvert$ представляет собой непрерывный (в нормированных топологиях) оператор из $(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ в E.*

$\lhd$ В самом деле, виду неравенства $\big|\lvert x \rvert - \lvert y \rvert\big| \leqslant \lvert x - y \rvert$ и монотонности нормы пространства E будет

$$\big\| \lvert x \rvert - \lvert y \rvert \big\| \leqslant |\!|\!| x - y |\!|\!| \quad (x, y \in X),$$

откуда и следует требуемое. $\rhd$

(2) *Пусть (X, E) — дизъюнктно разложимое пространство со смешанной нормой, причем E — решетка с проекциями. Тогда любой проектор $\pi \in \mathscr{P}(X)$ ограничен и его норма равна единице.*

$\lhd$ В самом деле, в соответствии с 11.1.4 можно написать $|\!|\!| \pi x |\!|\!| = \| \lvert \pi x \rvert \| = \| \pi \lvert x \rvert \| \leqslant |\!|\!| x |\!|\!|$, откуда и следует требуемое. $\rhd$

11.5.2. *Банаховым пространством со смешанной нормой* мы будем называть пару (X, E), в которой E — банахова решетка и X — это br-полное решеточно нормированное пространство с E-значной нормой. Следующее предложение служит оправданием только что данного определения.

Пусть E — банахова решетка. Тогда $(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ будет банаховым пространством в том и только в том случае, когда решеточно нормированное пространство (X, E) полно относительно сходимости с регулятором.

$\lhd$ $\leftarrow$: Возьмем фундаментальную последовательность $(x_n) \subset X$. Не ограничивая общности можно предположить, что $|\!|\!| x_{n+1} - x_n |\!|\!| \leqslant 1/n^3$ $(n \in \mathbb{N})$. Обозначим

$$e_n := \lvert x_1 \rvert + \sum_{k=1}^{n} k \lvert x_{k+1} - x_k \rvert \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$\|e_{n+l} - e_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+l} k \lvert x_{k+1} - x_k \rvert \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+l} k |\!|\!| x_{k+1} - x_k |\!|\!| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+l} \frac{1}{k^2} \underset{n,l\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Значит, последовательность (e_n) фундаментальна и, стало быть, имеет предел $e := \lim_{n\to\infty} e_n$. Легко понять, используя возможность перехода к пределу в неравенстве, что если в нормированной решетке монотонно возрастающая последовательность имеет предел по норме, то этот предел служит ее точной верхней границей. Поскольку $e_{n+k} \geqslant e_n$ $(n, k \in \mathbb{N})$, то верно $e = \sup e_n$. Если $n \geqslant m$, то

$$m|x_{n+l} - x_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+l} k|x_{k+1} - x_k| \leqslant e_{n+l} - e_n \leqslant e$$

и, следовательно, $|x_{n+l} - x_n| \leqslant (1/m)e$. Это означает br-фундаментальность последовательности (x_n). В силу br-полноты X имеется предел $x := br\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$. При этом ясно, что $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$.

$\rightarrow$: Допустим теперь, что последовательность $(x_n) \subset X$ является br-фундаментальной, т. е. $|x_n - x_m| \leqslant \lambda_k e$ $(m, n, k \in \mathbb{N},\ m, n \geqslant k)$, где $0 \leqslant e \in E$ и $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. Тогда при тех же m, n, k верно $\|x_n - x_m\| \leqslant \lambda_k \|e\|$ и $\lambda_k\|e\| \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, существует предел по норме $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Ввиду непрерывности векторной нормы можно осуществить предельный переход в неравенстве $|x_n - x_m| \leqslant \lambda_k e$ при $m \to \infty$. При этом мы получим $|x - x_n| \leqslant \lambda_k e$ $(n \geqslant k)$ и, следовательно, $x = br\text{-}\lim x_n$. $\rhd$

11.5.3. Пусть X — решеточно нормированное пространство над E, а F — идеал E. Пространство $Y := \{x \in X : |x| \in F\}$ с F-значной нормой $|y|_Y := |y|_X$ называют *F-ограничением* или *ограничением* пространства X *относительно* F. Если X — пространство Банаха — Канторовича, то таким же будет и Y. Если X является br-полным, а F — банахова решетка, то Y — банахово пространство со смешанной нормой.

Возьмем банахово пространство $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и пусть F — некоторый фундамент K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$. Ограничение пространства $\mathscr{X}{\downarrow}$ относительно F называют *F-спуском* $\mathscr{X}$ или *спуском* $\mathscr{X}$ *относительно* F и обозначают символом $F^{\downarrow}(\mathscr{X})$. Точнее, F-спуск есть тройка $(F^{\downarrow}(\mathscr{X}), |\cdot|, F)$, где

$$F^{\downarrow}(\mathscr{X}) := \{x \in \mathscr{X}{\downarrow} : |x| \in F\}, \quad |\cdot| := (\|\cdot\|){\downarrow} \restriction F^{\downarrow}(\mathscr{X}).$$

(1) *Если банахова решетка E является идеалом $\mathscr{R}{\downarrow}$, то $E^{\downarrow}(\mathscr{X})$ — банахово пространство со смешанной нормой.*

В том случае, когда $E := \Lambda$ — это K-пространство ограниченных элементов (т. е. порядковый идеал $\mathscr{R}{\downarrow}$, порожденный единицей $\mathbb{1} := 1^{\wedge} \in \mathscr{C}{\downarrow}$) и снабженный нормой $\|e\|_\infty := \inf\{\lambda > 0 : |e| \leqslant \lambda\mathbb{1}\}$, вместо Λ-спуска мы будем говорить об *ограниченном спуске* и вместо $E^{\downarrow}(\mathscr{X})$ писать $\mathscr{X}{\Downarrow}$. Значит,

$$\mathscr{X}{\Downarrow} = \{x \in \mathscr{X}{\downarrow} : |x| \in \Lambda\}, \quad |\!|\!|x|\!|\!| := \||x|\|_\infty \quad (x \in \mathscr{X}{\Downarrow}).$$

Возьмем внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ еще одно банахово пространство $\mathscr{Y}$ и ограниченный линейный оператор $\mathscr{T} : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$. Если $|\mathscr{T}{\downarrow}| \in \Lambda$, то по определению ограниченный спуск $\mathscr{T}{\Downarrow}$ оператора $\mathscr{T}$ представляет собой ограничение $\mathscr{T}{\downarrow}$ на $\mathscr{X}{\Downarrow}$.

(2) *Ограниченный спуск $\mathscr{T}{\Downarrow}$ — ограниченный линейный оператор из $\mathscr{X}{\Downarrow}$ в $\mathscr{Y}{\Downarrow}$.*

$\lhd$ Если $T := \mathscr{T}{\Downarrow}$, то для любого $x \in \mathscr{X}{\Downarrow}$ будет

$$\|Tx\| = \||\mathscr{T}{\downarrow}x|\|_\infty \leqslant \||\mathscr{T}{\downarrow}| \cdot |x|\|_\infty \leqslant \||\mathscr{T}{\downarrow}|\|_\infty |\!|\!|x|\!|\!|. \ \rhd$$

11.5.4. В связи с данными определениями возникает естественный вопрос: какие банаховы пространства линейно изометричны E-спускам и, в частности, ограниченным спускам банаховых пространств из булевозначной модели? Понятно, что ответ существенно зависит от геометрии рассматриваемого банахова пространства. Не углубляясь в эту тему, коротко рассмотрим нужный для дальнейшего случай ограниченного спуска.

Пусть X — нормированное пространство. Предположим, что в $\mathscr{L}(X)$ имеется полная булева алгебра проекторов единичной нормы $\mathscr{B}$, изоморфная булевой алгебре B. В этом случае булевы алгебры $\mathscr{B}$ и B мы будем отождествлять и писать $B \subset \mathscr{L}(X)$. Скажем, что X — *нормированное B-пространство*, если $B \subset \mathscr{L}(X)$ и для любого разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в B выполнены следующие два условия:

(1) если $b_\xi x = 0$ $(\xi \in \Xi)$ для некоторого $x \in X$, то $x = 0$;

(2) если $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ для элемента $x \in X$ и семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset X$, то $\|x\| \leqslant \sup\{\|b_\xi x_\xi\| : \xi \in \Xi\}$.

Условия (1) и (2) можно переписать в равносильной форме $(1')$ и $(2')$ соответственно:

$(1')$ для каждого $x \in X$ существует наибольший проектор $b \in B$ такой, что $bx = 0$;

$(2')$ если x, (x_ξ) и (b_ξ) те же, что и в (2), то $\|x\| = \sup\{\|b_\xi x_\xi\| : \xi \in \Xi\}$.

Из $(2')$ вытекает, в частности, справедливость равенства

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} b_k x\right\| = \max_{k:=1,\ldots,n} \|b_k x\|$$

для $x \in X$ и попарно дизъюнктных проекторов $b_1, \ldots, b_n \in B$.

Будем говорить, что элемент $x \in X$ служит *перемешиванием* семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, если для всех $\xi \in \Xi$ имеет место равенство $b_\xi x = b_\xi x_\xi$. Как видно, условие (1) означает, что единственным перемешиванием семейства, состоящего из нулей, служит нуль. Поэтому перемешивание единственно в том и только в том случае, когда выполнено условие (1). В то же время условие (2) допускает такую равносильную формулировку: единичный шар U_X пространства X замкнут относительно всех перемешиваний или, иначе, является mix-*полным*.

11.5.5. Теорема. *Для банахова пространства X равносильны утверждения*:

(1) *X — разложимое пространство со смешанной нормой, нормирующая решетка которого представляет собой порядково полное AM-пространство с единицей*;

(2) *X — банахово B-пространство.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Вытекает непосредственно из определений с учетом 11.1.4.

(2) $\to$ (1): Предположим, что X — банахово B-пространство и $J : B \to \mathscr{B}$ соответствующий изоморфизм из B на полную булеву алгебру проекторов $\mathscr{B}$ в X. Обозначим буквой E идеал расширенного K-пространства всех B-значных разложений единицы (см. 10.5.7), порожденный единицей $\mathbb{1} \in E := \mathfrak{R}(B)$. Возьмем конечнозначный элемент $\alpha := \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{b}_i \in E$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\{b_1, \ldots, b_n\}$ — конечное разбиение единицы в B, а $\bar{b}$ и $\lambda\bar{b}$ обозначают спектральные функции, определяемые как в 10.5.7. Положим $J(\alpha) := \sum_{i=1}^n \lambda_i J(b_i)$ и заметим, что $J(\alpha)$ — ограниченный линейный оператор в X. Подсчет нормы оператора $J(\alpha)$ дает

$$\|J(\alpha)\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|J(\alpha)x\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sup_{l:=1,\ldots,n} \{\|\pi_l x\| |\lambda_l|\} =$$

$$= \sup_{l:=1,\ldots,n} \sup\{\|\pi_l x\|\ |\lambda_l| : \|x\| \leqslant 1\} = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}.$$

В то же время норма $\|\alpha\|_\infty$ элемента α AM-пространства E также совпадает с $\max\{|\lambda_1|,\dots,|\lambda_n|\}$. Следовательно, J — линейная изометрия из подпространства E_0 конечнозначных элементов E в алгебру ограниченных операторов $\mathscr{L}(X)$. Ясно также, что $J(\alpha\beta)=J(\alpha)\circ J(\beta)$ для всех $\alpha,\ \beta\in E_0$. Так как E_0 плотно по норме в E и $\mathscr{L}(X)$ — банахова алгебра, то можно продолжить J по непрерывности до изометрического изоморфизма из E на замкнутую подалгебру алгебры $\mathscr{L}(X)$. Полагая $x\alpha:=\alpha x:=J(\alpha)x$ для $x\in X$ и $\alpha\in E$, мы снабжаем X структурой унитарного E-модуля, так что

$$\|\alpha x\|\leqslant\|x\|\,\|\alpha\|_\infty\quad(\alpha\in E,\ x\in X).$$

Более того, $\alpha U_X+\beta U_X\subset U_X$ при $|\alpha|+|\beta|\leqslant\mathbb{1}$. Определим отображение $p:X\to E^+$ формулой

$$p(x):=\inf\{\alpha\in E^+:\ x\in\alpha U_X\}\quad(x\in X),$$

где инфимум вычислен в K-пространстве E. Если $p(x)=\bar{\mathbb{0}}$, то для произвольного $\varepsilon>0$ существуют разбиение единицы $(\pi_\xi)\subset B$ и семейство $(\alpha_\xi)\subset E^+$, для которых $\pi_\xi\alpha_\xi\leqslant\varepsilon\bar{\mathbb{1}}$ и $x\in\alpha_\xi U_X$, каков бы ни был индекс ξ. Но тогда $\pi_\xi x\in\pi_\xi\alpha_\xi U_X\subset\varepsilon U_X$. Поскольку по условию единичный шар U_X замкнут относительно перемешиваний, то $x=\operatorname{mix}(\pi_\xi x_\xi)\in\varepsilon U_X$. Произвол в выборе $\varepsilon>0$ дает $x=\bar{\mathbb{0}}$. Если $x\in\alpha U_X$ и $y\in\beta U_X$ для некоторого $\alpha,\beta\in E^+$, то, полагая $\gamma:=\alpha+\beta+\varepsilon\bar{\mathbb{1}}$, можно написать

$$x+y=\gamma\,(\gamma^{-1}x+\gamma^{-1}y)\in\gamma\,(\gamma^{-1}\alpha U_X+\gamma^{-1}\beta U_X)\subset\gamma U_X.$$

Следовательно, $p(x+y)\leqslant\alpha+\beta+\varepsilon\bar{\mathbb{1}}$ и переход к инфимуму по α, β и ε приводит к неравенству $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$. Более того, для данных $\pi\in B$ и $x\in X$ справедливы равенства

$$\pi p(x)=\inf\{\pi\alpha:\ \bar{\mathbb{0}}\leqslant\alpha\in E,\ x\in\alpha U_X\}=\inf\{\alpha\in E^+:\ \pi x\in\alpha U_X\}=p(\pi x).$$

Но тогда для $\alpha=\sum\lambda_i\pi_i$, где $\{\pi_1,\dots,\pi_n\}$ — разбиение единицы в B, верны равенства

$$p(\alpha x)=\sum\pi_i p(\lambda_i x)=\sum_{\imath=1}^n\pi_i|\lambda_i|p(x)=|\alpha|p(x).$$

Тем самым $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$ для всех $\alpha\in E$ и, стало быть, (X,p,E) — разложимое решеточно нормированное пространство.

Покажем, что норма в X смешанная, т. е. $\|x\|=\|p(x)\|_\infty$ $(x\in X)$. Возьмем $0\neq x\in X$ и положим $y:=x/\|x\|$. Тогда $y\in U_X$ и $p(y)\leqslant\bar{\mathbb{1}}$. Следовательно, $p(x)\leqslant\|x\|\bar{\mathbb{1}}$ или $\|p(x)\|_\infty\leqslant\|x\|\|\bar{\mathbb{1}}\|_\infty=\|x\|$. Наоборот, для фиксированного $\varepsilon>0$ можно подобрать разложение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathfrak{P}(E)$ и семейство $(\alpha_\xi)_{\xi\in\Xi}\subset E^+$ такие, что $\pi_\xi\alpha_\xi\leqslant p(x)+\varepsilon\bar{\mathbb{1}}\leqslant(\|p(x)\|_\infty+\varepsilon)\bar{\mathbb{1}}$ и $x\in\alpha_\xi U_X$ $(\xi\in\Xi)$. Отсюда

$$\pi_\xi x_\xi\in\pi_\xi\alpha_\xi U_X\subset(\|p(x)\|_\infty+\varepsilon)\pi_\xi\bar{\mathbb{1}}U_X\subset(\|p(x)\|_\infty+\varepsilon)U_X.$$

Следовательно, $\|\pi_\xi x_\xi\|\leqslant\|p(x)\|_\infty+\varepsilon$. Учитывая произвол в выборе $\varepsilon>0$ и 11.5.4 (2), выводим: $\|x\|\leqslant\|p(x)\|_\infty$. $\triangleright$

11.5.6. Нормированное пространство X называют *B-циклическим,* если оно является B-пространством и в нем всякое ограниченное по норме семейство имеет перемешивание относительно любого разбиения единицы в B. Согласно 11.5.4, можно утверждать, что нормированное пространство X будет B-циклическим в том и только в том случае, когда для произвольного разбиения единицы $(b_\xi) \subset B$ и любого семейства $(x_\xi) \subset U_X$ существует и притом единственный элемент $x \in U_X$, для которого $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ при всех ξ.

(1) *Банахово B-пространство X будет B-циклическим в том и только в том случае, когда X дизъюнктно полно как решеточно нормированное пространство.*

$\lhd$ Очевидно из определений. $\rhd$

Изометрию между нормированными B-пространствами называют B-изометрией, если она линейна и перестановочна с каждым проектором из B. Будем говорить, что Y — это B-циклическое расширение B-пространства X, если Y является B-циклическим пространством и существует B-изометрия $\imath : X \to Y$ такая, что всякое B-циклическое подпространство Y, содержащее $\imath(X)$, совпадает с Y.

(2) *Нормированное B-пространство будет B-циклическим банаховым пространством в том и только в том случае, когда соответствующее решеточно нормированное пространство bo-полно.*

$\lhd$ Это следует из 11.1.7 (1) и (1), если учесть, что полнота по норме равносильна полноте относительно сходимости с регулятором (см. 11.5.2). $\rhd$

(3) *Для каждого банахова B-пространства существует единственное с точностью до B-изометрии B-циклическое расширение.*

$\lhd$ Это следует из 11.3.6 (1) и (2). $\rhd$

Дадим, наконец, ответ на вопрос, сформулированный в 11.5.4.

11.5.7. Теорема. *Банахово пространство линейно изометрично bo-полному пространству со смешанной нормой, нормирующая решетка которого служит порядково полным AM-пространством с единицей, тогда и только тогда, когда оно $\mathscr{B}$-циклично относительно некоторой полной булевой алгебры проекторов $\mathscr{B}$.*

$\lhd$ Ввиду 11.3.2 достаточно заметить, что банахово B-пространство является B-циклическим в том и только в том случае, когда оно дизъюнктно полно как решеточно нормированное пространство. $\rhd$

11.5.8. Теорема. *Банахово пространство X линейно изометрично ограниченному спуску некоторого банахова пространства из $\mathbb{V}^{(B)}$ в том и только в том случае, когда X — это B-циклическое банахово пространство.*

$\lhd$ См. 11.3.1, 11.3.2, 11.5.2 и 11.5.7. $\rhd$

11.5.9. Возьмем нормированное B-пространство X. Обозначим символом $\widetilde{X}$ пополнение по норме пространства X. Тогда $\widetilde{X}$ — банахово B-пространство, так как каждый проектор $b \in B$ допускает продолжение (по непрерывности) на все пространство $\widetilde{X}$ с сохранением нормы. Согласно (1) $\widetilde{X}$ имеет циклическое B-пополнение, которое мы обозначим символом $\overline{X}$. Применив теорему (2), возьмем банахово пространство $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, ограниченный спуск которого B-изометричен $\overline{X}$. Элемент $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$ называют *булевозначной реализацией* пространства X.

Пусть X и Y — нормированные пространства, причем $B \subset \mathscr{L}(X)$ и $B \subset \mathscr{L}(Y)$. Линейный оператор $T : X \to Y$ называют *B-линейным*, если T коммутирует с каждым проектором из B, т. е. если $b \circ T = T \circ b$ для всех $b \in B$.

Обозначим символом $\mathscr{L}_B(X, Y)$ множество всех ограниченных B-линейных операторов из X в Y. Понятно, что $W := \mathscr{L}_B(X, Y)$ — банахово пространство и $B \subset W$. Если Y — это B-циклическое пространство, то таким же будет и W. Проектор $b \in B$ действует в W по правилу $T \mapsto b \circ T$ $(T \in W)$.

Пространство $X^{\#} := \mathscr{L}_B(X, \Lambda)$ мы будем называть*B-сопряженным* к X. Если $X^{\#}$ и Y являются B-изометричными, то мы будем говорить, что Y — это *B-сопряженное пространство* к X, а X — это *B-предсопряженное пространство* к Y. Символически, $Y = X^{\#}$ и $X = Y_{\#}$.

11.5.10. Теорема. *Допустим, что X — нормированное B-пространство и Y — банахово B-циклическое пространство. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ обозначают булевозначные реализации X и Y соответственно. Пространство $\mathscr{L}_B(X, Y)$ B-изометрично ограниченному спуску пространства $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ всех ограниченных линейных операторов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. При этом оператору $T \in \mathscr{L}_B(X, Y)$ соответствует элемент $\mathscr{T} := T\!\uparrow$ из $\mathbb{V}^{(B)}$, определяемый формулами $[\![\mathscr{T} : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\mathscr{T} \imath x = \imath T x]\!] = \mathbb{1}$ $(x \in X)$, где символом $\imath$ обозначены вложения X в $\mathscr{X}\!\downarrow$ и Y в $\mathscr{Y}\!\downarrow$.*

$\lhd$ Не ограничивая общности можно предположить, что X и Y — ограниченные спуски некоторых банаховых пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ (см. 11.5.6 (3) и 11.5.8). Положим $X_0 := \mathscr{X}\!\downarrow$ и $Y_0 := \mathscr{Y}\!\downarrow$. Согласно 11.3.6 пространства $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\!\downarrow$ и $\mathscr{L}_{\mathscr{R}\downarrow}(X_0, Y_0)$ линейно изометричны. Более того, ограничение $\mathscr{L}_{\mathscr{R}\downarrow}(X_0, Y_0)$ относительно идеала $\mathscr{R}\!\downarrow$, порожденного единицей $\mathbb{1}$, совпадает с ограниченным спуском $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Достаточно заметить, что каждый элемент T пространства $\mathscr{L}_B(X, Y)$ допускает единственное продолжение до оператора $\widetilde{T} \in \mathscr{L}_{\mathscr{R}\downarrow}(X_0, Y_0)$, причем $\|T\| = \|{\mid\!\widetilde{T}\!\mid}\|_\infty$. $\rhd$

11.5.11. Пусть $\mathscr{X}'$ — сопряженное к $\mathscr{X}$ пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Обозначим символами $\simeq$ и $\simeq_B$ отношение изометрического изоморфизма и изометрического B-изоморфизма между банаховыми пространствами и банаховыми B-пространствами соответственно. Предположим также, что X, Y, $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ те же, что и в 11.5.10.

(1) *Имеет место эквивалентность:* $X^{\#} \simeq_B Y \leftrightarrow [\![\mathscr{X}' \simeq \mathscr{Y}]\!] = \mathbb{1}$.

(2) *Если $\overline{X}$ служит B-циклическим пополнением X, то $X^{\#} = \overline{X}^{\#}$.*

11.6. Модули Капланского — Гильберта

В этом параграфе мы определяем класс AW^*-модулей как класс bo-полных банаховых модулей со смешанной нормой и устанавливаем их представимость в виде булевозначных гильбертовых пространств.

11.6.1. Напомним некоторые сведения о комплексных алгебрах. Говоря об *алгебре,* мы всегда имеем в виду ассоциативную алгебру с единицей. *Инволютивной алгеброй* или *$*$-алгеброй* называют комплексную алгебру A с *инволюцией,* т. е. с отображением $x \mapsto x^*$ $(x \in A)$, удовлетворяющим условиям:

(1) $x^{**} = x$ $(x \in A)$;

(2) $(x + y)^* = x^* + y^*$ $(x, y \in A)$;

(3) $(\lambda x)^* = \lambda^* x^*$ $(\lambda \in \mathbb{C},\ x \in A)$;

(4) $(xy)^* = y^* x^*$ $(x, y \in A)$.

Элемент x инволютивной алгебры A называют *эрмитовым*, если $x^* = x$. Элемент $x \in A$ именуют *нормальным,* если $x^* x = x x^*$. Любой элемент $x \in A$ единственным образом представляется в виде $x = u + iv$ с эрмитовыми u и v. В самом деле, нужно лишь положить

$$u = \frac{1}{2}(x + x^*), \quad v = \frac{1}{2i}(x - x^*).$$

Из этого представления видно, в частности, что нормальность элемента x равносильна перестановочности u и v.

Идемпотентный эрмитов элемент принято называть *проектором.* Значит, элемент $p \in A$ служит проектором, если и только если $p^* = p$ и $p^2 = p$. Символом $\mathfrak{P}(A)$ мы будем обозначать множество всех проекторов инволютивной алгебры A. Два проектора $p, q \in \mathfrak{P}(A)$ называют *ортогональными,* если $pq = 0$. Проектор p именуют *центральным,* если $px = xp$ для всех $x \in A$. Множество всех центральных проекторов обозначим символом $\mathfrak{P}_c(A)$.

Пусть $\mathbb{1}$ — единица алгебры A, и рассмотрим фиксированный элемент $x \in A$. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называют *спектральным значением* элемента $x \in A$, если элемент $\lambda - x := \lambda\mathbb{1} - x$ необратим в A. Множество всех спектральных значений элемента x, называемое *спектром* x, обозначают символом $\mathrm{Sp}(x) := \mathrm{Sp}_A(x)$. Говорят, что элемент x $*$-алгебры A *положителен,* если x эрмитов и $\mathrm{Sp}(x) \subset \mathbb{R}^+$. Множество всех положительных элементов A обозначают символом A^+.

Пусть $(A, *)$ и $(B, *)$ — инволютивные алгебры. Мультипликативный линейный оператор $\mathscr{R} : A \to B$ называют $*$-*представлением* A в B, если $\mathscr{R}(x^*) = \mathscr{R}(x)^*$ для всех $x \in A$. В том случае, когда алгебры $(A, *)$ и $(B, *)$ имеют единицы $\mathbb{1}_A$ и $\mathbb{1}_B$, принято предполагать, что $\mathscr{R}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_B$. Если $\mathscr{R}$ — инъективен, то говорят о $*$-*изоморфизме* из A в B. Если $*$-изоморфизм $\mathscr{R}$ биективен, то мы будем говорить о $*$-*изоморфизме* инволютивных алгебр A и B.

В том случае, когда рассматриваемые инволютивные алгебры снабжены нормами, естественным образом трактуются термины «изометрическое $*$-представление» и «изометрический $*$-изоморфизм».

11.6.2. Норму $\|\cdot\|$ на алгебре A называют *субмультипликативной*, если она удовлетворяет соотношению

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\| \quad (x, y \in A).$$

Предположим, что на алгебре A определена субмультипликативная норма, относительно которой A — банахово пространство. Тогда говорят, что A — *банахова алгебра. Инволютивная банахова алгебра* — такая банахова алгебра, которая одновременно является инволютивной алгеброй, причем инволюция в ней удовлетворяет условию

$$\|x^*\| = \|x\| \quad (x \in A).$$

Если A — инволютивная банахова алгебра, причем норма и инволюция связаны дополнительным соотношением

$$\|xx^*\| = \|x\|^2 \quad (x \in A),$$

то A называют *C^*-алгеброй.* Спектр элемента C^*-алгебры представляет собой непустое компактное подмножество $\mathbb{C}$. Символом $C(\mathrm{Sp}(x), \mathbb{C})$ мы обозначим C^*-алгебру всех непрерывных комплексных функций на $\mathrm{Sp}(x)$.

11.6.3. (1) Спектральная теорема. *Пусть x — нормальный элемент C^*-алгебры A и $\mathrm{Sp}(x)$ — спектр x. Существует и притом единственное изометрическое $*$-представление $\mathscr{R}_x : C(\mathrm{Sp}(x), \mathbb{C}) \to A$ такое, что $x = \mathscr{R}_x(\imath)$, где $\imath$ — тождественная функция на $\mathrm{Sp}(x)$.*

$\lhd$ Доказательство см. у Ж. Диксмье [58, 1.5.6] или С. С. Кутателадзе [128, 11.8.6]. $\rhd$

Представление $\mathscr{R}_x : C(\mathrm{Sp}(x), \mathbb{C}) \to A$ носит название *непрерывного функционального исчисления* (для нормального элемента x из A). Для $f \in C(\mathrm{Sp}(x), \mathbb{C})$ элемент $\mathscr{R}_x(f)$ обозначают обычно как $f(x)$. При этом для непрерывных комплексных функций f и g на $\mathrm{Sp}(x)$ имеют место соотношения:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x),$$
$$\bar{f}(x) = f(x^*), \quad \|f\|_\infty = \|f(x)\|,$$

где $\|f\|_\infty = \sup\{|f(s)| : s \in \mathrm{Sp}(x)\}$. В частности, для положительного $x \in A$ определен квадратный корень $\sqrt{x}$, так как $\mathrm{Sp}(x) \subset \mathbb{R}^+$, а для каждого нормального элемента $x \in A$ можно определить его модуль формулой $|x| := \sqrt{x^*x}$.

(2) *Пусть x — нормальный элемент C^*-алгебры A и $f \in C(\mathrm{Sp}(x), \mathbb{C})$. Тогда $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ для каждой функции $g \in C(\mathrm{Sp}\, f(x), \mathbb{C})$.*

$\lhd$ Это следует из утверждения об единственности в спектральной теореме (1), так как отображение $g \mapsto (g \circ f)(x)$ есть $*$-представление $C(\mathrm{Sp}(f(x)), \mathbb{C})$ в A, сопоставляющее тождественной функции на $\mathrm{Sp}(f(x))$ элемент $f(x)$. $\rhd$

(3) *Пусть A и B — две C^*-алгебры с единицами и $h : A \to B$ — $*$-представление. Тогда $\mathrm{Sp}_B(h(x)) \subset \mathrm{Sp}_A(x)$ и для любой непрерывной функции $f : \mathrm{Sp}_A(x) \to \mathbb{C}$ выполняется $h(f(x)) = f(h(x))$.*

$\lhd$ Ограничение любой функции $f : \mathrm{Sp}_A(x) \to \mathbb{C}$ на $\mathrm{Sp}_B(h(x))$ обозначаем той же буквой f. Рассмотрим отображения $h_1, h_2 : C(\mathrm{Sp}(f(x)), \mathbb{C}) \to A$, определяемые формулами $h_1(f) := h(f(x))$ и $h_2(f) := f(h(x))$. Ясно, что h_1 и h_2 — $*$-представления, причем $h_1(\mathbb{1}) = h_2(\mathbb{1})$, $h_1(\iota) = h_2(\iota)$ и $h_1(\bar{\iota}) = h_2(\bar{\iota})$, где $\mathbb{1} : z \mapsto 1$, $\iota : z \mapsto z$ и $\bar{\iota} : z \mapsto \bar{z}$. Так как линейная оболочка функций $\mathbb{1}$, ι и $\bar{\iota}$ плотна в $C(\mathrm{Sp}(f(x)), \mathbb{C})$, а $*$-представление непрерывно, то h_1 и h_2 совпадают на всем $C(\mathrm{Sp}(f(x)), \mathbb{C})$. $\rhd$

11.6.4. (1) Лемма Капланского — Фукамия. *Элемент x C^*-алгебры A положителен в том и только в том случае, когда $x = y^*y$ для некоторого $y \in A$. Множество A^+ всех положительных элементов представляет собой упорядочивающий конус, т. е. (A, A^+) — упорядоченное векторное пространство. При этом для эрмитова элемента $x \in A$ равносильны соотношения $-\mathbb{1} \leqslant x \leqslant \mathbb{1}$ и $\|x\| \leqslant 1$.*

$\lhd$ Доказательство см. у Ж. Диксмье [58, 1.6.1] или С. С. Кутателадзе [128, 11.9.5]. $\rhd$

Рассматривая C^*-алгебру A как упорядоченное векторное пространство, мы всегда подразумеваем порядок, определяемый конусом A^+.

(2) *Пусть h — некоторое $*$-представление C^*-алгебры A в C^*-алгебре B. Тогда $h(A^+) = h(A) \cap B^+$. В частности, $*$-изоморфизм C^*-алгебр служит также и порядковым изоморфизмом соответствующих упорядоченных векторных пространств.*

$\lhd$ Если $x \in A^+$, то $x = u^*u$ для некоторого $u \in A$ и $h(x) = h(u)^*h(u)$ и поэтому $h(x) \in B^+$. Наоборот, возьмем $y \in h(A) \cap B^+$. Тогда для подходящего $x \in A$ будет $y = h(x)$ и, привлекая 11.6.3 (3), можно написать: $y = |y| = \sqrt{y^2} = \sqrt{y^*y} = h(\sqrt{x^*x})$. Значит, $y \in h(A^+)$. $\rhd$

(3) *Если для элементов x и y C^*-алгебры A выполняется $0 \leqslant y \leqslant x$, то $\|y\| \leqslant \|x\|$.*

$\lhd$ Если $\mathbb{1}$ — единица в A, то из (1) вытекает $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \|x\|\mathbb{1}$. Отсюда, применив опять (1), выводим: $\|y\| \leqslant \|x\|$. $\rhd$

11.6.5. Пусть Λ — комплексное K-пространство ограниченных элементов с единицей $\mathbb{1}$ (или, что то же самое, порядково полное комплексное AM-пространство с сильной единицей), см. 10.1.3. По теореме Крейнов — Какутани (см. у Б. З. Вулиха [35, теорема V.3.1], Х.-У. Шварца [370, теорема 9.14], Х. Шефера [367, теорема 7.4]) и теореме 10.5.3 (5) Λ будет линейно изометрично и порядково изоморфно пространству всех непрерывных комплексных функций $C(Q) := C(Q, \mathbb{C})$ на некотором экстремальном компакте Q. Поэтому Λ можно снабдить структурой инволютивной алгебры так, что оно становится коммутативной C^*-алгеброй. Такую C^*-алгебру часто называют *алгеброй Стоуна.* Таким образом, алгебра Стоуна — коммутативная C^*-алгебра (с единицей), которая представляет собой порядково полную векторную решетку относительно упорядочения 11.6.4 (1). Элемент $e \in \Lambda$ будет проектором в том и только в том случае, когда e служит осколком $\mathbb{1}$. Более того, изоморфизм $\Lambda \to C(Q)$ определяет сохраняющую порядок биекцию между множествами осколков $\mathbb{1}$ и множеством характеристических функций открыто-замкнутых множеств в Q. Стало быть, булева алгебра $\mathfrak{E}(\mathbb{1}) := \mathfrak{E}(\Lambda)$ совпадает с множеством всех проекторов $\mathfrak{P}(\Lambda)$ и изоморфна $\operatorname{Clop}(Q)$. Эрмитов элемент $p \in \Lambda$ будет проектором тогда и только тогда, когда оператор умножения $x \mapsto px$ служит порядковым проектором. Для наперед заданной полной булевой алгебры B существует единственная (с точностью до $*$-изоморфизма) алгебра Стоуна Λ такая, что B и $\mathfrak{P}(\Lambda)$ изоморфны. Каждую из этих алгебр мы иногда будем обозначать символом $\mathscr{S}(B)$.

11.6.6. Пусть Λ — алгебра Стоуна, и рассмотрим унитарный Λ-модуль X. Отображение $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : X \times X \to \Lambda$ называют *Λ-значным внутренним произведением,* если для всех $x, y, z \in X$ и $a \in \Lambda$ выполнены следующие условия:

(1) $\langle x \,|\, x \rangle \geqslant 0$; $\langle x \,|\, x \rangle = 0 \leftrightarrow x = 0$;

(2) $\langle x \,|\, y \rangle = \langle y \,|\, x \rangle^*$;

(3) $\langle ax \,|\, y \rangle = a \langle x \,|\, y \rangle$;

(4) $\langle x + y \,|\, z \rangle = \langle x \,|\, z \rangle + \langle y \,|\, z \rangle$.

11.6.7. Наличие Λ-значного внутреннего произведения позволяет ввести в X обычную ($\mathbb{R}$-значную) норму

(1) $|\!|\!| x |\!|\!| := \sqrt{\| \langle x | x \rangle \|} \quad (x \in X)$

и векторную (Λ^+-значную) норму

(2) $\lvert\!\lvert x \rvert\!\rvert := \sqrt{\langle x | x \rangle} \quad (x \in X)$.

Используя непрерывное функциональное исчисление 11.6.3, непосредственно из свойств 11.6.6 (2, 3) выводится, что $\lvert\!\lvert \lambda x \rvert\!\rvert = |\lambda| \lvert\!\lvert x \rvert\!\rvert$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и $x \in X$. Справедливость неравенства треугольника для $\lvert\!\lvert \cdot \rvert\!\rvert$ вытекает, как и в скалярном случае, из *неравенства Коши — Буняковского*

(3) $\langle x \,|\, y \rangle \leqslant \lvert\!\lvert x \rvert\!\rvert \lvert\!\lvert y \rvert\!\rvert$.

Для доказательства этого неравенства обозначим $*$-изоморфизм из Λ на $C(Q)$ буквой ι. Зафиксировав $q \in Q$, рассмотрим билинейную форму $(\cdot \,|\, \cdot)_q : X \times X \to \mathbb{R}$, определяемую формулой $(x|y)_q = \iota(\langle x|y \rangle)(q)$. Для этой формы имеет место неравенство Коши — Буняковского $|(x|y)_q|^2 \leqslant (x|x)_q (y|y)_q$. Учитывая, что $(x|x)_q^2 = \iota(\lvert\!\lvert x \rvert\!\rvert)_q$, для каждого $q \in Q$ можно написать $\iota(\langle x|y \rangle)(q) \leqslant \iota(\lvert\!\lvert x \rvert\!\rvert)_q \iota(\lvert\!\lvert y \rvert\!\rvert)_q$. Значит, $\langle x|y \rangle \leqslant \lvert\!\lvert x \rvert\!\rvert \lvert\!\lvert y \rvert\!\rvert$.

Переход к нормам в (3) с использованием субмультипликативности и монотонности нормы в Λ приводит к скалярному варианту неравенства Коши — Буняковского:

(4) $\|\langle x \,|\, y\rangle\| \leqslant |\!|\!| x |\!|\!| \, |\!|\!| y |\!|\!|$.

Далее, учитывая, что $\|a\| = \|(\sqrt{a})^2\| = \|\sqrt{a}\|^2$ для любого положительного $a \in \Lambda$, из (1) и (2) выводим

(5) $|\!|\!| x |\!|\!| = \big\| |x| \big\| \quad (x \in X)$.

Следовательно, формула (1) определяет смешанную норму на X (см. 11.5.1).

11.6.8. Пусть X — произвольный Λ-модуль с внутренним произведением $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle : X \times X \to \Lambda$. Если модуль X полон относительно смешанной нормы $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$, то его называют *C^*-модулем* над Λ.

Теорема. *Пусть X — произвольный C^*-модуль. Пара $(X, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ будет B-циклическим банаховым пространством в том и только в том случае, когда $(X, |\cdot|)$ — пространство Банаха — Канторовича над $\Lambda := \mathscr{S}(B)$.*

$\triangleleft$ Заметим, что 11.6.7 (2) определяет разложимую норму, так как $|bx| = b|x|$ $(x \in X,\, b \in B)$. По теореме 11.5.2 нормированное пространство $(X, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ полно тогда и только тогда, когда решеточно нормированное пространство $(X, |\cdot|)$ br-полно. Кроме того, как нетрудно видеть из определений, B-цикличность $(X, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ равносильна дизъюнктной полноте $(X, |\cdot|)$. В силу этих замечаний мы завершаем доказательство ссылкой на теорему 11.1.7 (1). $\triangleright$

11.6.9. Модулем *Капланского — Гильберта* или *AW^*-модулем* над Λ называют унитарный C^*-модуль, удовлетворяющий одному из эквивалентных условий теоремы 11.6.8. Согласно 11.1.7 (1) C^*-модуль X над Λ будет модулем Капланского — Гильберта над Λ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим условиям:

(1) если для произвольного элемента $x \in X$ и разбиения единицы $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathfrak{P}(\Lambda)$ выполняется $e_\xi x = 0$ для всех $\xi \in \Xi$, то $x = 0$;

(2) если $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — ограниченное по норме семейство в X и $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(\Lambda)$, то существует элемент $x \in X$, для которого $e_\xi x = e_\xi x_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$.

Элемент $x \in X$ из (2) служит bo-суммой семейства $(e_\xi x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ (см. 11.1.6). Согласно 11.6.7 (3) внутреннее произведение bo-непрерывно по каждой переменной. В частности,

(3) $\big\langle bo\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} e_\xi x_\xi \,|\, y\big\rangle = bo\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \langle e_\xi x_\xi \,|\, y\rangle$ для каждого ограниченного семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в X и разбиения единицы $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathfrak{P}(\Lambda)$.

11.6.10. Теорема. *Ограниченный спуск произвольного гильбертова пространства из модели $\mathbb{V}^{(B)}$ представляет собой модуль Капланского — Гильберта над алгеброй Стоуна $\mathscr{S}(B)$. Наоборот, если X — модуль Капланского — Гильберта над алгеброй Стоуна $\mathscr{S}(B)$, то существует гильбертово пространство $\mathscr{X}$ в модели $\mathbb{V}^{(B)}$, ограниченный спуск которого унитарно изоморфен X. Это пространство единственно с точностью до унитарного изоморфизма внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.*

$\triangleleft$ Без ограничения общности можно предположить, что $\mathscr{S}(B) \subset \mathscr{C}{\downarrow}$. Допустим, что $\mathscr{X}$ — гильбертово пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и X — его ограниченный спуск: $X := \mathscr{X}{\Downarrow}$. Тогда пара $(X, |\cdot|)$, где $|\cdot|$ — спуск нормы из $\mathscr{X}$, будет пространством Банаха — Канторовича, а пара $(X, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$, где $|\!|\!| x |\!|\!| := \big\| |x| \big\|$ $(x \in X)$, представляет собой B-циклическое банахово пространство (см. 11.5.8). В частности, X — унитарный модуль над $\mathscr{S}(B)$. Предположим, что $(\cdot \,|\, \cdot) \in \mathbb{V}^{(B)}$ — внутреннее произведение пространства $\mathscr{X}$ и $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ — спуск $(\cdot \,|\, \cdot)$. Легко проверить, что $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ удовлетворяет условиям 11.6.6 (1–4) при любых $x, y, z \in \mathscr{X}{\downarrow}$ и $a \in \mathscr{C}{\downarrow}$. Если $x, y \in X$, то $[\![\,|(x\,|\,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|\,]\!] = \mathbb{1}$. Следовательно, $|\langle x\,|\,y\rangle| \leqslant |\!|x|\!| \cdot |\!|y|\!|$. Так как $|\!|x|\!|, |\!|y|\!| \in \mathscr{S}(B)$, то $\langle x\,|\,y\rangle \in \mathscr{S}(B)$. Значит, ограничение $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ на $X \times X$, обозначаемое тем же самым символом, служит $\mathscr{S}(B)$-значным внутренним произведением в X. Достаточно заметить, что $|\!|x|\!| = \sqrt{\langle x\,|\,x\rangle}$ ввиду соотношения $[\![\,\|x\| = \sqrt{(x\,|\,x)}\,]\!] = \mathbb{1}$, и спуск функции $\sqrt{}\ : \mathscr{R}^+ \to \mathscr{R}^+$ порождает квадратный корень в $\mathscr{S}(B)$.

Наоборот, рассмотрим модуль Капланского — Гильберта X над $\mathscr{S}(B)$. По теореме 11.3.2 булевозначная реализация $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$ пространства Банаха — Канторовича $(X, |\!|\cdot|\!|, \mathscr{S}(B))$ является банаховым пространством внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Таким образом, можно предположить, что $X \subset \mathscr{X}{\downarrow}$. Пусть $(\cdot\,|\,\cdot)$ обозначает подъем $\mathscr{S}(B)$-значного внутреннего произведения $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ в X. Тогда $(\cdot\,|\,\cdot)$ — внутреннее произведение в $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Рассуждая как и выше, мы видим, что $[\![\|x\| = \sqrt{(x\,|\,x)}\ (x \in \mathscr{X})]\!] = \mathbb{1}$, поскольку $|\!|x|\!| = \sqrt{\langle x\,|\,x\rangle}\quad (x \in X)$.

Пусть теперь $\mathscr{Y}$ — еще одно гильбертово пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, причем его ограниченный спуск Y унитарно изоморфен X. Если $U : X \to Y$ — унитарный изоморфизм, то $u := U{\uparrow}$ — линейная биекция из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$. Так как U удовлетворяет условию $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle \circ (U \times U) = \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ выполнены соотношения

$$(\cdot\,|\,\cdot) \circ (u \times u) = \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle{\uparrow} \circ (U{\uparrow} \times U{\uparrow}) = (\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle \circ (U \times U)){\uparrow} = \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle{\uparrow} = (\cdot\,|\,\cdot).$$

Следовательно, u — унитарный изоморфизм между $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, что и завершает доказательство. $\rhd$

Как обычно, элемент $\mathscr{X}$ называют *булевозначной реализацией* модуля Капланского — Гильберта X.

Обозначим символом $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ пространство всех ограниченных линейных операторов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Пусть $\mathscr{L}_\Lambda(X, Y)$ — пространство всех ограниченных Λ-линейных операторов из X в Y, где X и Y — модули Капланского — Гильберта над коммутативной AW^*-алгеброй $\Lambda := \mathscr{S}(B)$. Как и раньше, $\mathscr{S}(B)$ — ограниченный спуск поля $\mathscr{C}$. Легко проверить, что $\mathscr{L}_\Lambda(X, Y) \subset \mathscr{L}_b(X, Y)$ (см. 11.1.11 (2), 11.5.10).

11.6.11. Теорема. *Предположим, что $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — гильбертовы пространства внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Пусть X и Y — ограниченные спуски $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ соответственно. Для любого ограниченного Λ-линейного оператора $\Phi : X \to Y$ элемент $\phi := \Phi{\uparrow}$ является ограниченным линейным оператором из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. При этом $[\![\,\|\phi\| \leqslant c^{\wedge}\,]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. Отображение $\Phi \mapsto \phi$ служит B-линейной изометрией между B-циклическими банаховыми пространствами $\mathscr{L}_\Lambda(X, Y)$ и $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}){\Downarrow}$.*

$\lhd$ Нужно лишь применить 11.5.8 и 11.5.10. $\rhd$

11.7. Комментарии

11.7.1. (1) Л. В. Канторович в 1936 г. предложил использовать элементы упорядоченных векторных пространств для нормирования векторов (см. [70]). Несколько раньше Г. Курепа [273] рассматривал «espaces pseudodistanciés», т. е. пространства с метрикой, принимающей значения из упорядоченного векторного пространства. Первые применения векторных норм и метрик были связаны с методом последовательных приближений в численном анализе, см. у Л. В. Канторовича [70, 265], Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера [73], Л. Коллатца [81], Й. Шрёдера [369]. Затем появились и другие применения векторных норм, см., например, у Г. П. Акилова и С. С. Кутателадзе [7], Б. З. Вулиха [35], А. Г. Кусраева [97, 107].

(2) Стоит подчеркнуть, что именно в статье Л. В. Канторовича [67] впервые была сформулирована необычная аксиома разложимости для векторной нормы (см. 11.1.1 (4)). В последующих исследованиях другие авторы часто опускали эту аксиому как несущественную и не имеющую особого значения. Смысл аксиомы 11.1.1 (4) был выявлен в рамках булевозначного анализа. Связь между разложимостью векторной нормы и существованием полной булевой алгебры проекторов в решеточно нормированном пространстве (см. 11.1.4, 11.4.2) была впервые обнаружена А. Г. Кусраевым [97, 98, 107].

(3) Критерий полноты 11.1.7 (1) был установлен А. Г. Кусраевым в [98] при том дополнительном предположении, что нормирующая решетка E порядково полна. В [97] такой критерий им был доказан в более общей ситуации пространства с разложимой векторной мультинормой. Предположение о порядковой полноте E было снято в работе Е. В. Колесникова, А. Г. Кусраева и С. А. Малюгина [80]. Для архимедовой векторной решетки (случай, когда $X = E$) указанный факт был установлен ранее А. И. Векслером и В. А. Гейлером [31].

(4) Понятие мажорируемого оператора (см. 4.1.1) появилось во второй половине 1930-х годов в работах Л. В. Канторовича [67, 70, 71, 265]. Оно имело двоякую мотивировку — теоретическую, обусловленную развитием общей теории операторов в полуупорядоченных пространствах (см. [66]–[68]), и прикладную, связанную с приближенными методами анализа (см. [70, 71, 265]). Л. В. Канторович писал [70]:

«*При доказательстве существования решения различных классов функциональных уравнений в анализе весьма часто применяется способ последовательных приближений; при этом доказательство сходимости этих приближений основывается на том, что данное уравнение может быть мажорировано некоторым уравнением простого вида. Такого рода доказательства встречаются в теории интегральных и дифференциальных уравнений.*

Рассмотрение полуупорядоченных пространств и операций в них позволяет с большой легкостью развить в абстрактной форме полную теорию функциональных уравнений упомянутого вида».

(5) Различные классы мажорируемых операторов изучались относительно независимо. Не считая ограниченных операторов в нормированных пространствах, наибольшее внимание уделялось регулярным операторам, см., например, у К. Алипрантиса и О. Бёркиншо [185], А. В. Бухвалова [24], Б. З. Вулиха [35], Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [72], Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера [73], Г.-У. Шварца, [370] А. Цаанена [408], Х. Шефера [367]. Операторы с абстрактной нормой ввел Л. В. Канторович в 1930-х годах (см. работы А. В. Бухвалова [24], Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера [73], А. В. Бухвалова, В. Б. Короткова, А. Г. Кусраева, С. С. Кутателадзе и Б. М. Макарова [27] и литературу в них). Общая теория мажорируемых операторов и широкий круг ее приложений отражены в монографии А. Г. Кусраева [107].

(6) Тот факт, что для разложимого X и bo-полного Y пространство $M(X, Y)$ будет bo-полным решеточно нормированным пространством, известен со второй половины 1930-х годов, см. у Л. В. Канторовича [67, 71, 265], Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера [73]. Разложимость пространства $M(X,Y)$ (теорема 11.1.10) была установлена А. Г. Кусраевым и В. З. Стрижевским [120] в 1987 г. (см. также препринт Е. В. Колесникова, А. Г. Кусраева и С. А. Малюгина [80]).

11.7.2. (1) Важнейшие примеры решеточно нормированных пространств связаны с различными классами вектор-функций. Общие сведения об измеримых функциях со значениями в банаховом пространстве и, в частности, в пространстве ограниченных линейных операторов имеются в книгах Н. Данфорда и Дж. Шварца [54], Н. Динкуляну [210], Дж. Дистеля и Дж. Уля [209]. Принципиальную схему построения пространств из параграфа 11.2 можно выразить таким образом: если X — банахово (или локально выпуклое) пространство и E — функциональное пространство, то с ними можно связать класс (измеримых или непрерывных) вектор-функций Z, потребовав, например, чтобы $f \in Z$ в том и только в том случае, когда $l \circ f \in E$ для всех $l \in X'$ и т. п. (см. работы А. В. Бухвалова [22], В. Л. Левина [133], Д. Фремлина [228], Н. Фуонг-Кака [352], Х. В. Эллиса и И. Гальперина [221]). Эта схема была отработана при развитии теории векторного интегрирования, см. монографии Н. Бурбаки [20], Н. Данфорда и Дж. Шварца [54], Н. Динкуляну [210], Дж. Дистеля и Дж. Уля [209], А. Ионеску Тулча и К. Ионеску Тулча [252], В. Л. Левина [134], Р. Эдвардса [179].

(2) Другая важная конструкция, приводящая к решеточно нормированным пространствам, — тензорное произведение. Можно показать (см. [107, 2.3.4]), что алгебраическое тензорное произведение $E \otimes X$ является bo-плотным в пространстве $E(X)$. Плотность $E \otimes X$ в $E(X)$ относительно скалярной (смешанной) нормы связана с порядковой непрерывностью нормы в банаховой решетке E, см. у А. В. Бухвалова [23], В. Л. Левина [132, 133] и Н. Фуонг-Кака [352].

(3) Представляет интерес вопрос о том, когда совпадают пространства измеримых и слабо измеримых вектор-функций, т. е. при каких условиях каноническое вложение из 11.2.7 (2) будет сюръекцией. Для сопряженного банахова пространства ответ дается в следующем результате (см. в книгах Дж. Дистеля и Дж. Уля [209], В. Л. Левина [134]).

Пусть X — нормированное пространство и (Ω, Σ, μ) — пространство с конечной мерой. Равносильны утверждения:

(a) X' *обладает свойством Радона — Никодима*;

(b) $L^0(\Omega, \Sigma, \mu, X') = L^0(\Omega, \Sigma, \mu, X'|X)$;

(c) $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu, X') = L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu, X'|X)$;

(d) $E(X') = E_w(X')$ *для любого идеального пространства на* (Ω, Σ, μ).

(4) Материал пунктов 11.2.8–11.2.11 взят из [107]. Теорема 11.2.11 является частным случаем одного результата А. Г. Кусраева [101] (см. также [107, теорема 5.5.3]).

(5) Дальнейшие примеры решеточно нормированных пространств см. в монографии А. Г. Кусраева [107]. Важную роль в теории решеточно нормированных пространств играют непрерывные банаховы расслоения. С одной стороны, пространство сечений непрерывного банахова расслоения доставляет общий пример решеточно нормированного пространства, а с другой — всякое пространство Банаха — Канторовича линейно изометрично пространству почти глобальных сечений некоторого непрерывного банахова расслоения над экстремальным компактом. Значит, решеточно нормированное пространство допускает функциональное представление. Такое представление единственно в классе так называемых насыщенных банаховых расслоений. При этом всякое непрерывное банахово расслоение над экстремальным компактом имеет единственную с точностью до изометрии насыщенную оболочку. Понятие насыщенного банахова расслоения позволяет ввести, в частности, непрерывное банахово расслоение пространств операторов. Обо всем этом можно прочитать у А. Е. Гутмана [49] и А. Г. Кусраева [107].

(6) Аналогичную роль играют пространства сечений измеримых банаховых расслоений. При этом место насыщенных банаховых расслоений занимают измеримые банаховы расслоения, допускающие лифтинг. Теорию насыщенных непрерывных банаховых расслоений и измеримых банаховых расслоений с лифтингом построил А. Е. Гутман [49]. Подробности см. также в [107].

11.7.3. (1) Теоремы 11.3.1, 11.3.2 и 11.3.6 о булевозначной реализации решеточно нормированных пространств и ограниченных операторов в них были получены А. Г. Кусраевым в [97, 98, 107].

(2) Теорема 11.3.3 о существовании максимального расширения для решеточно нормированных пространств получена А. Г. Кусраевым [97]. Относительно теоремы 11.3.5 (1) о bo-пополнении решеточно нормированных пространств см. у А. Г. Кусраева [97], А. Г. Кусраева и В. З. Стрижевского [120]. Для векторной решетки E равенство $oE = rd(X)$ из 11.3.5 (2) впервые получил А. И. Векслер [29].

(3) Теорема 11.3.7 представляет собой частный случай общей конструкции булева пополнения равномерного пространства, введенного Е. И. Гордоном и В. А. Любецким [46]. Предложение 11.3.8 — простое следствие из 11.3.7 и результата Е. И. Гордона [42] о представлении операторов с абстрактной нормой.

(4) Рассмотрим две категории внутри $\mathbb{V}^{(B)}$: $\mathrm{Ban}_\infty^{(B)}$ — категория банаховых пространств и ограниченных линейных операторов, $\mathrm{BLat}_\infty^{(B)}$ — категория банаховых решеток и регулярных ограниченных операторов. Пусть $\mathrm{BK}(E)$ — категория пространств Банаха — Канторовича, нормированных одним и тем же K-пространством E и линейных операторов, ограниченных в смысле 11.1.11 (2). Обозначим символом $\mathrm{BKL}(E)$ подкатегорию категории $\mathrm{BK}(E)$, состоящую из решеток Банаха — Канторовича и регулярных ограниченных операторов. Функтор спуска и функтор погружения устанавливают эквивалентность следующих пар категорий: a) $\mathrm{Ban}_\infty^{(B)}{\downarrow}$ и $\mathrm{BK}(\mathscr{R}{\downarrow})$, b) $\mathrm{BLat}_\infty^{(B)}{\downarrow}$ и $\mathrm{BKL}(\mathscr{R}{\downarrow})$. Это утверждение вытекает из 11.3.1, 11.3.2, 11.3.7 и 11.4.7.

11.7.4. (1) В цикле работ [300]–[303] Д. Магарам построила оригинальную теорию положительных операторов в пространствах измеримых функций. Краткое описание развитого метода и формулировка основных результатов даны в обзоре Д. Магарам [305]. В. Люксембург и А. Шэп [296] распространили часть теории Д. Магарам, связанной с теоремой типа Радона — Никодима, на положительные операторы, действующие в K-пространствах. Дальнейшее развитие теории см. в монографии А. Г. Кусраева [107]. Термины «свойство Магарам» и «оператор Магарам» были введены В. Люксембургом и А. Шэпом [296] и А. Г. Кусраевым [94, 97] соответственно. В [300]–[303] операторы со свойством Магарам названы «full-valued».

(2) Теоремы из 11.4.6, 11.4.9 (3) и 11.4.10 получены В. Люксембургом и А. Шэпом в [296]. Теорема 11.4.7 принадлежат А. Г. Кусраеву, см. [91, 94, 97]. Другие результаты и подробности см. в [107].

(3) Располагая оператором Магарам, можно определить аналог *условного математического ожидания.* Рассмотрим расширенное K-пространство Z с фиксированной мультипликативной структурой и правильное подпространство $Z_0 \subset Z$, для которого $Z = Z_0^{\perp\perp}$. Пусть Φ — существенно положительный оператор Магарам, определенный на максимальном фундаменте $L^1(\Phi) \subset Z$, причем ограничение Φ_0 оператора Φ на $Z_0 \cap L^1(\Phi)$ также удовлетворяет условию Магарам. Тогда $L_1(\Phi_0) = Z_0 \cap L^1(\Phi)$. Более того, имеет место следующее утверждение, установленное в [97]:

Теорема. *Существует оператор $\mathscr{E}$ в $L_1(\Phi)$, $\operatorname{im}(\mathscr{E}) = L_1(\Phi_0)$, удовлетворяющий следующим условиям*:

(a) *оператор $\mathscr{E}$ линеен, положителен, порядково непрерывен и идемпотентен*;

(b) $\Phi(xy) = \Phi(x\mathscr{E}(y))$ *для любых* $y \in L^1(\Phi)$ *и* $x \in Z_0$, *если только* $xy \in L^1(\Phi)$;

(c) *для любого ортоморфизма* $\alpha \in \operatorname{Orth}(L_1(\Phi_0))$ *будет* $\alpha \circ \mathscr{E} = \mathscr{E} \circ h(\alpha)$, *где* $h(\alpha)$ *— единственное продолжение* α *до ортоморфизма на всем* $L_1(\Phi)$.

(4) Для произвольного K-пространства E рассмотрим категорию $\operatorname{Int}(E)$ E-значных интегралов. Объектами этой категории служат операторы Магарам Φ из K-пространства X в E, такие что $X = \mathscr{D}_m(\Phi)$ и $E = (\operatorname{im}\Phi)^{\perp\perp}$. Если Φ и Ψ — два E-значных интеграла, то под морфизмом из Φ в Ψ понимается порядково непрерывный решеточный гомоморфизм $h : \mathscr{D}_m(\Phi) \to \mathscr{D}_m(\Psi)$, для которого $\Phi = \Psi \circ h$. Композиция морфизмов — обычная суперпозиция отображений. Рассмотрим также категорию $\operatorname{Int}^{(B)}$ $\mathscr{R}$-значных интегралов внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Из 11.4.7 вытекает, что категории $\operatorname{Int}(\mathscr{R}{\downarrow})$ и $\operatorname{Int}^{(B)}{\downarrow}$ эквивалентны.

(5) С оператором Магарам связана также интересная конструкция *Магарамова расширения*, т. е. продолжения произвольного положительного оператора до порядково непрерывного оператора, сохраняющего интервалы. Три разных подхода к этой проблеме были предложены в работах Г. П. Акилова, Е. В. Колесникова и А. Г. Кусраева [5, 6]. Один из этих подходов повторили В. Люксембург и Б. де Пахте [295]. Подробности можно найти в монографии А. Г. Кусраева [107].

11.7.5. **(1)** Термин «банаховы пространства со смешанной нормой» в смысле 11.5.1 был предложен в работах А. Г. Кусраева [101, 105, 107]. В случае, когда $X = E$ и $|\cdot| = \lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert$, пространство со смешанной нормой — просто нормированная решетка. Теория нормированных решеток представлена в монографиях К. Алипрантиса и О. Бёркиншо [185], Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [72], Х.-У. Шварца [370] Х. Шефера [367]. Материал параграфа 11.5 взят из [107].

(2) Ограниченный спуск из 11.5.3 впервые появился в исследованиях Г. Такеути при изучении алгебр фон Неймана и C^*-алгебр методом булевозначных интерпретаций (см. [389, 390]), а затем у М. Озавы [342, 343] при булевозначной интерпретации теории гильбертовых пространств.

(3) Основные результаты из 11.5.5–11.5.8, 11.5.10 получены А. Г. Кусраевым [101, 107, 275]. Ранее Г. Такеути [389] получил вариант теоремы 11.5.8 при изучении булевозначных представлений C^*-алгебр. Фактически он применял понятие B-циклического банахова пространства, но не использовал этого термина.

(4) Изучение операторных алгебр, порожденных булевыми алгебрами проекторов, начал В. Баде в [189] (см. также работы В. Баде [190], Н. Данфорда и Дж. Шварца [55]). В. Баде [189] ввел также циклические банаховы пространства (отличные от B-циклических банаховых пространств из 11.5.6). Пусть $\mathscr{B}$ — некоторая σ-полная булева алгебра ограниченных проекторов в банаховом пространстве X. Если существует элемент $e \in X$ такой, что замкнутая выпуклая оболочка множества $\{\pi e : \pi \in \mathscr{B}\}$ совпадает с X, то X называют *циклическим банаховым пространством,* см. у Х. Шефера [367]. А. И. Векслер [30] доказал, что циклическое банахово пространство изометрично банаховой решетке с порядково непрерывной нормой и слабой порядковой единицей. Близкий результат независимо получен Х. Шефером, см. [367]. Этот результат без доказательства отмечен также в книге Й. Линденштраусса и Л. Цафрири [292]. Аналогичные результаты для пространств со смешанной нормой получил А. Г. Кусраев, см. [107].

(5) Пусть $\mathrm{Ban}_1^{(B)}$ — категория банаховых пространств и линейных сжатий внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Рассмотрим также категорию $\mathrm{AM}(B)$ банаховых пространств, $\mathscr{B}$-циклических относительно полных булевых алгебр проекторов $\mathscr{B}$, изоморфных B. Морфизмами категории $\mathrm{AM}(B)$ служат B-линейные сжатия. Отображение $\mathscr{F}^{\Downarrow}$, ставящее в соответствие банахову пространству и линейному сжатию внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ их ограниченные спуски (см. 11.5.3), представляет собой функтор, устанавливающий эквивалентность категорий $\mathrm{Ban}_1^{(B)}{\downarrow}$ и $\mathrm{AM}(B)$ (см. 11.5.8 и 11.5.10).

11.7.6. (1) Изучение C^*-алгебр начато И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком в 1943 году. Основы теории C^*-алгебр см., например, в книгах В. Арвесона [188], Ж. Диксмье [58], С. С. Кутателадзе [128] и Г. Мёрфи [147]. Важные структурные свойства C^*-алгебр связаны с положительностью и соответствующим упорядочением (см. 11.6.4 (1)). По теореме Гельфанда — Наймарка коммутативная C^*-алгебра с единицей изометрически $*$-изоморфна C^*-алгебре непрерывных комплексных функций, определенных на некотором компакте, см., например, [58] или [128]. Из этого факта вытекает, что коммутативные C^*-подалгебры произвольной C^*-алгебры являются комплексными векторными решетками. Тем не менее порядковая структура C^*-алгебр существенно отличается от векторных решеток. Пусть A — некоторая C^*-алгебра и A_h — ее эрмитова часть. Упорядоченное векторное пространство (A_h, A^+) будет векторной решеткой в том и только в том случае, когда A коммутативна. Этот факт установили М. Фукамия, М. Мисоноу и З. Такеда [231].

(2) Теория модулей Капланского — Гильберта начинается с работ И. Капланского [268, 269], в которых эти объекты названы AW^*-модулями. Теоремы 11.6.10 и 11.6.11 о булевозначной реализации модулей Капланского — Гильберта и ограниченных модульных гомоморфизмов в них установлены М. Озавой [343].

(3) При введении AW^*-модулей И. Капланский в работе [269] приводит следующую мотивировку: «... *новой идеей является обобщение гильбертова пространства, путем введения внутреннего произведения, принимающего свои значения в кольцах более общих, чем комплексные числа. Если предварительно развить теорию так возникающих AW^*-модулей, то можно будет работать с общими AW^*-алгебрами типа I почти так же, как и с факторами*». Легко усмотреть, что эта идея И. Капланского перекликается с принципом Канторовича (см. 10.8.1 (2)), ибо ее можно воспринимать в том смысле, что элементы центра AW^*-алгебры — суть обобщенные комплексные числа. Эвристическое соображение И. Капланского становится точным исследовательским методом в рамках булевозначного анализа в силу теорем 11.6.10 и 11.6.11.

(4) Пусть Λ — произвольная C^*-алгебра с единицей, и рассмотрим унитарный Λ-модуль X. В этой ситуации Λ-значное внутреннее произведение $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle : X \times X \to \Lambda$ определяют так же, как и в 11.6.6 (1–4), и вводят норму в X формулой 11.6.7 (1). Если при этом $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, то его называют *гильбертовым Λ-модулем* или же *гильбертовым C^*-модулем*. Этот объект был, по-видимому, впервые введен В. Пашке [350]. Общие гильбертовы C^*-модули имеют ряд весьма интересных приложений. Так, например, гильбертовы C^*-модули служат важным техническим средством в теории C^*-индекса и играют в ней роль гильбертова пространства, см. монографию Ю. П. Соловьева и Е. В. Троицкого [163], а также содержащийся в ней список литературы. Начальные сведения о гильбертовых C^*-модулях можно найти в работах Э. Лансе [282], В. Пашке [350] и М. Фрэнка [227].

(5) Пусть $\mathrm{HK}(B)$ обозначает категорию, объектами которой служат модули Гильберта — Капланского над стоуновой алгеброй $\mathscr{S}(B)$, а морфизмами — унитарные операторы, т. е. линейные операторы, сохраняющие внутреннее произведение. Пусть $\mathrm{Hilbert}^{(B)}$ — категория гильбертовых пространств и унитарных операторов внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. В обеих категориях композиция — суперпозиция отображений. Функтор погружения и функтор ограниченного спуска устанавливают эквивалентность категорий $\mathrm{HK}(B)$ и $\mathrm{Hilbert}^{(B)}{\downarrow}$, см. 11.6.10 и 11.6.11.

Глава 12
Анализ банаховых алгебр

Одним из наиболее привлекательных традиционных разделов функционального анализа является теория банаховых алгебр. В предыдущей главе была намечена принципиальная схема булевозначной реализации для банаховых пространств. Здесь эта тема развивается для инволютивных банаховых алгебр и йордановых банаховых алгебр.

Булевозначный подход к изучению операторных алгебр основан на следующем соображении. Если центр алгебры достаточно квалифицирован и хорошо в ней расположен, то при погружении в соответствующую булевозначную модель центр становится одномерной подалгеброй, что может привести к более простой алгебре. В то же время, в силу принципа переноса, объемы формальных теорий исходной алгебры и ее булевозначной реализации совпадают.

Изложение строится вокруг анализа AW^*-алгебр и JB-алгебр, т. е. бэровских C^*-алгебр и алгебр Йордана — Банаха. Такие алгебры реализуются в булевозначной модели соответственно как AW^*-факторы и JB-факторы. Задача представления указанных объектов в виде алгебр операторов приводит также к рассмотрению модулей Капланского — Гильберта.

Размерность гильбертова пространства в модели — это булевозначный кардинал, который естественно назвать булевой размерностью модуля Капланского — Гильберта. Здесь проявляется эффект смещения кардинальных чисел: изоморфные модули Капланского — Гильберта могут иметь базисы разной мощности. Отсюда вытекает также, что AW^*-алгебра типа I разлагается в прямую сумму однородных подалгебр, вообще говоря, многими способами. Последнее утверждение в качестве гипотезы высказал И. Капланский в 1953 г.

Опираясь на результаты о булевозначном погружении модулей Капланского — Гильберта и AW^*-алгебр, можно получить функциональные реализации этих объектов. Точнее говоря, мы увидим, что модуль Капланского — Гильберта унитарно эквивалентен прямой сумме однородных AW^*-модулей, состоящих из непрерывных вектор-функций со значениями в гильбертовом пространстве. Аналогичное представление имеет и AW^*-алгебра типа I, только вместо непрерывных вектор-функций используются оператор-функции, непрерывные в сильной операторной топологии.

AW^*-алгебру называют *вложимой*, если она $*$-изоморфна бикоммутанту в некоторой AW^*-алгебре типа I. Каждая вложимая AW^*-алгебра допускает булевозначную реализацию, являющуюся алгеброй или фактором фон Неймана. Мы дадим различные характеризации вложимых AW^*-алгебр. В частности, AW^*-алгебра будет вложимой в том и только в том случае, если она имеет разделяющее множество центрозначных нормальных состояний. Мы также рассмотрим аналогичные вопросы для JB-алгебр, представляющих собой вещественные неассоциативные аналоги C^*-алгебр.

12.1. Спуски банаховых алгебр

В этом параграфе собраны результаты о булевозначной реализации банаховых алгебр и инволютивных банаховых алгебр и указаны их некоторые довольно простые применения.

12.1.1. Начнем с нужных определений, ограничиваясь рассмотрением комплексных алгебр. Подчеркнем, что говоря об алгебре, мы всегда имеем в виду ассоциативную алгебру с единицей $\mathbb{1}$.

Рассмотрим инволютивную алгебру A. Взяв непустое множество $M \subset A$, определим *правый аннулятор* $M^{\perp}$ и *левый аннулятор* ${}^{\perp}M$ формулами

$$M^{\perp} := \{y \in A : \ (\forall\, x \in M)\, xy = 0\};$$

$${}^{\perp}M := \{x \in A : \ (\forall\, y \in M)\, xy = 0\}.$$

Ясно, что аннуляторы являются полярами в смысле определения 1.2.7, а потому их простейшие свойства те же, что у дизъюнктных дополнений (ср. 7.2.10 (1–4)):

(1) $M \subset N \to N^{\perp} \subset M^{\perp}$;

(2) $M \subset {}^{\perp}(M^{\perp}), \ \ M \subset ({}^{\perp}M)^{\perp}$;

(3) $M^{\perp} = ({}^{\perp}(M^{\perp}))^{\perp}, \ \ {}^{\perp}M = {}^{\perp}(({}^{\perp}M)^{\perp})$;

(4) $(\bigcup_{\alpha} M_{\alpha})^{\perp} = \bigcap_{\alpha} M_{\alpha}^{\perp}$;

(5) $(M^{\perp})^{*} = {}^{\perp}(M^{*}), \ \ ({}^{\perp}M)^{*} = (M^{*})^{\perp}$.

Отсюда вытекает, в частности, что упорядоченное по включению множество всех правых (левых) аннуляторов представляет собой полную решетку с нулем $\mathbb{0} := \{0\}$ и единицей $\mathbb{1} := A$. Отображение $K \mapsto K^{*} := \{x^{*} : x \in K\}$ является изотонной биекцией между решетками правых и левых аннуляторов.

12.1.2. Значительный интерес представляют инволютивные алгебры, в которых аннуляторы порождаются проекторами. *Бэровской $*$-алгеброй* называют инволютивную алгебру A, в которой для каждого непустого множества $M \subset A$ существует проектор $p \in \mathfrak{P}(A)$, удовлетворяющий условию $M^{\perp} = pA$. Как видно из 12.1.1 (5), бэровость A равносильна тому, что для любого непустого множества $M \subset A$ существует проектор $q \in \mathfrak{P}(A)$, обеспечивающий справедливость равенства ${}^{\perp}M = Aq$. Итак, в бэровской $*$-алгебре для произвольного левого аннулятора L существует единственный проектор $q_L \in A$ такой, что $x = xq_L$ при $x \in L$ и $q_L y = 0$ при $y \in L^{\perp}$. Отображение $L \mapsto q_L$ служит изоморфизмом между упорядоченными множествами всех левых аннуляторов и всех проекторов. Обратный изоморфизм имеет вид $q \mapsto {}^{\perp}(\mathbb{1} - q)$ $(q \in \mathfrak{P}(A))$. Аналогичное утверждение имеет место и для правых аннуляторов. Отсюда вытекает, в частности, что упорядоченное множество $\mathfrak{P}(A)$ является порядково полной решеткой. Отображение $p \mapsto p^{\perp} := \mathbb{1} - p$ $(p \in \mathfrak{P}(A))$ удовлетворяет следующим условиям:

$$p^{\perp\perp} = p, \quad p \wedge p^{\perp} = \mathbb{0}, \quad p \vee p^{\perp} = \mathbb{1},$$

$$(p \wedge q)^{\perp} = p^{\perp} \vee q^{\perp}, \quad (p \vee q)^{\perp} = p^{\perp} \wedge q^{\perp},$$

$$p \leqslant q \to p \vee (p^{\perp} \wedge q) = q.$$

Другими словами, $(\mathfrak{P}(A), \wedge, \vee, \perp)$ — *ортомодулярная решетка.*

12.1.3. *AW^*-алгеброй* называют C^*-алгебру (с единицей), являющуюся в то же время бэровской $*$-алгеброй. Более подробно, AW^*-алгебра A — это C^*-алгебра, в которой каждый правый аннулятор имеет вид pA для некоторого проектора $p \in A$. Элемент $z \in A$ именуют *центральным,* если он коммутирует с каждым элементом A, т. е. $(\forall\, x \in A)\, xz = zx$. *Центр* AW^*-алгебры A — это множество $\mathscr{Z}(A)$, составленное из всех центральных элементов. Ясно, что $\mathscr{Z}(A)$ — коммутативная AW^*-подалгебра A, причем $\lambda\mathbb{1} \in \mathscr{Z}(A)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Если $\mathscr{Z}(A) = \{\lambda\mathbb{1} : \lambda \in \mathbb{C}\}$, то AW^*-алгебру A принято называть *AW^*-фактором.*

Для того чтобы C^*-алгебра A была AW^*-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) *каждое ортогональное семейство в $\mathfrak{P}(A)$ имеет супремум*;

(2) *любая максимальная коммутативная $*$-подалгебра A_0 алгебры A является стоуновой алгеброй.*

Пространство $\mathscr{L}(H)$ всех ограниченных линейных эндоморфизмов комплексного гильбертова пространства H служит примером AW^*-алгебры. Напомним, что структура банаховой алгебры в $\mathscr{L}(H)$ подразумевает обычные операции сложения и композиции операторов, а также норму ограниченного оператора. В качестве инволюции в $\mathscr{L}(H)$ принимают переход к сопряженному оператору. Заметим также, что коммутативная AW^*-алгебра — в точности алгебра Стоуна (см. 11.6.5).

12.1.4. Банахову алгебру A называют *B-циклической* (относительно полной булевой алгебры проекторов B), если она представляет собой B-циклическое банахово пространство (в смысле 11.5.6) и каждый проектор из B *мультипликативен.* Последнее означает, что

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y) \quad (x, y \in A,\ \pi \in B).$$

Мультипликативность проектора $\pi \in B$ равносильна каждому из соотношений $\pi(xy) = \pi(x)y = x\pi(y)$ $(x, y \in A)$, см. 8.1.2 (1). Понятие *B-циклической инволютивной банаховой алгебры* возникает, если потребовать дополнительно, чтобы проекторы из B сохраняли инволюцию:

$$\pi(x^*) = (\pi x)^* \quad (x \in A,\, \pi \in B).$$

Столь же очевидно определение *B-циклической C^*-алгебры.*

Напомним, что мы рассматриваем только алгебры с единицами. Если $\mathbb{1}$ — единица алгебры A, то проектор $b \in B$ можно отождествить с элементом $b\mathbb{1}$, получая в случае инволютивности A центральный проектор в смысле 11.6.1. При этом мы будем писать $B \subset \mathfrak{P}_c(A)$. Запись $B \sqsubset A$ означает, что A — это B-циклическая банахова алгебра. Для C^*-алгебры A условие ее B-цикличности подразумевает, что для любого разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и любого ограниченного семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset A$ существует единственный элемент $x \in A$ такой, что $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ $(\xi \in \Xi)$, причем $\|x\| \leqslant \sup_{\xi\in\Xi} \|b_\xi x_\xi\|$.

Примером B-циклической C^*-алгебры служит комплексное K-пространство ограниченных элементов с базой B при фиксированной единице (см. 10.1.3 (3), 10.4.5). Такая алгебра единственна с точностью до $*$-изоморфизма и обозначается через $B(\mathbb{C})$. Часто мы будем отождествлять $B(\mathbb{C})$ с ограниченной частью спуска $\mathscr{C}{\downarrow}$, где $\mathscr{C}$ — поле комплексных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Алгебру $B(\mathbb{C})$ иногда называют *стоуновой* и обозначают символом $\mathscr{S}(B)$.

Возьмем B-циклические банаховы алгебры A_1 и A_2. Ограниченный оператор $\Phi : A_1 \to A_2$ называют *B-гомоморфизмом*, если он B-линеен в смысле 11.5.9 и мультипликативен: $\Phi(xy) = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$. Если A_1 и A_2 инволютивны и B-гомоморфизм Φ сохраняет инволюцию: $\Phi(x^*) = \Phi(x)^*$ $(x \in A_1)$, то Φ называют *$*$-B-гомоморфизмом.* Таким образом, алгебры A_1 и A_2 являются B-изоморфными, если существует изоморфизм A_1 на A_2, перестановочный с проекторами из B. Если B-изоморфизм сохраняет инволюцию, то мы называем его *$*$-B-изоморфизмом.*

12.1.5. Теорема. *Ограниченный спуск банаховой алгебры внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ представляет собой B-циклическую банахову алгебру. Наоборот, для любой B-циклической банаховой алгебры A существует единственная с точностью до изоморфизма банахова алгебра $\mathscr{A}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ такая, что A изометрически B-изоморфна ограниченному спуску $\mathscr{A}$.*

$\triangleleft$ Предположим, что $\mathscr{A}$ — банахова алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и A — ее ограниченный спуск. Мы уже знаем, что A представляет собой B-циклическое банахово пространство (см. 11.5.8). Если χ — канонический изоморфизм B на базу $\mathfrak{E}(B(\mathbb{R}))$, то $b \leqslant [\![x = 0]\!] \leftrightarrow \chi(b)x = 0$ для каждого $x \in A$ (см. 11.3.1 (2)). Учитывая определение χ и очевидное соотношение (внутри $\mathbb{V}^{(B)}$)

$$\chi(b) = 0 \vee \chi(b) = 1 \to \chi(b)xy = (\chi(b)x)y = x\,(\chi(b)y) \quad (x, y \in \mathscr{A}),$$

для любых x, $y \in A$ можно написать:

$$[\![\chi(b)xy = x\chi(b)y = (\chi(b)x)y]\!] \geqslant [\![\chi(b) = 1]\!] \vee [\![\chi(b) = 0]\!] = b \vee b^* = \mathbb{1}.$$

Отсюда видно, что проектор $\pi_b : x \mapsto \chi(b)x$ $(x \in A)$ удовлетворяет требуемому соотношению $\pi_b xy = (\pi_b x)y = x\,(\pi_b y)$ $(x, y \in A)$. Значит, A — это B-циклическая банахова алгебра.

Пусть теперь A — это B-циклическая банахова алгебра. По теореме 11.5.8 внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ существует банахово пространство $\mathscr{A}$ такое, что его ограниченный спуск A_0 представляет собою B-циклическое банахово пространство, изометрически B-изоморфное A. Поэтому можно без ограничения общности считать, что $A_0 = A$. Умножение в A экстенсионально. Действительно, если $b \leqslant [\![x = u]\!] \wedge [\![y = v]\!]$, где x, y, u, $v \in A$, то в силу (c) из 11.3.1 (2) будет

$$0 = x\chi(b)\,(y - v) + \chi(b)\,(x - u)v \to \chi(b)\,(xy - uv) = 0 \to$$
$$\to \chi(b)\,(xy) = \chi(b)\,uv \to b \leqslant [\![xy = uv]\!].$$

Пусть $\odot$ — подъем операции умножения $\cdot$ в A. Легко понять, что $\odot$ — это бинарная операция в $\mathscr{A}$ и пространство $\mathscr{A}$ с операцией $\odot$ будет алгеброй. Если p — векторная норма в пространстве A, то $\|a\| = \|p(a)\|_\infty$ и $[\![p(a) = \rho(a)]\!] = \mathbb{1}$ $(a \in \mathscr{A})$, где ρ — норма в $\mathscr{A}$ (см. 11.5.5). Покажем, что норма p субмультипликативна, т. е. $p(xy) \leqslant p(x)p(y)$. Вспомним (см. 11.3.1 (2) и 11.5.5), что A является банаховым модулем над кольцом $B(\mathbb{R})$, где $B(\mathbb{R})$ — ограниченная часть $\mathscr{R}{\downarrow}$, а для p верна формула

$$p(x) = \inf\{\alpha \in B(\mathbb{R})^+ : x \in \alpha U_A\} \quad (x \in A).$$

Следовательно, субмультипликативность p вытекает из того, что по определению банаховой алгебры (см. 11.6.2) единичный шар U_A устойчив относительно умножения, т. е. из x, $y \in U_A$ вытекает $xy \in U_A$. Таким образом, $p \circ (\cdot) \leqslant$

$(\cdot) \circ (p \times p)$. Привлекая правила подъема отображений (см. 5.5.5 (2)), получаем $[\![\rho \circ \odot \leqslant \odot \circ (\rho \times \rho)]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $[\![$ норма ρ субмультипликативна $]\!] = \mathbb{1}$. Окончательно заключаем, что $\mathscr{A}$ — банахова алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Обоснуем теперь требуемую единственность $\mathscr{A}$. Пусть $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ — банаховы алгебры внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а g — это изометрический B-изоморфизм их ограниченных спусков. Тогда g — экстенсиональное отображение и $\psi := g{\uparrow}$ — линейная изометрия банаховых пространств $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$. Мультипликативность ψ следует из соотношений

$$\psi \circ \odot = g{\uparrow} \circ (\cdot){\uparrow} = (g \circ (\cdot)){\uparrow} = ((\cdot) \circ (g \times g)){\uparrow} = (\cdot){\uparrow} \circ (g{\uparrow} \times g{\uparrow}) = \odot \circ (\psi \times \psi),$$

где $\odot$ — умножение в каждой из алгебр $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$, а $(\cdot)$ — умножение в каждом из ограниченных спусков. $\triangleright$

12.1.6. Теорема. *Ограниченный спуск C^*-алгебры внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ представляет собой B-циклическую C^*-алгебру. Наоборот, для любой B-циклической C^*-алгебры A существует единственная с точностью до $*$-изоморфизма C^*-алгебра $\mathscr{A}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ такая, что ограниченный спуск $\mathscr{A}$ является алгеброй, $*$-B-изоморфной A.*

$\triangleleft$ Если A — это B-циклическая C^*-алгебра, то структура банахова $\mathscr{S}(B)$-модуля обладает на A тем дополнительным свойством, что $(\alpha x)^* = \alpha x^*$ $(\alpha \in B(\mathbb{R})$, $x \in A)$ (как и выше, $B(\mathbb{R})$ — вещественная часть комплексной банаховой алгебры $\mathscr{S}(B)$). В самом деле, если $\alpha := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \pi_k$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и $\pi_1, \dots, \pi_n \in \mathfrak{C}(\mathscr{S}(B))$, то

$$(\alpha x)^* = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, (\pi_k x)^* = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \pi_k x^* = \alpha x^*.$$

Инволюция в C^*-алгебре является изометрией. Поэтому $U_A^* = U_A$. Из всего сказанного следует, что

$$x \in \alpha U_A \leftrightarrow xx^* \in \alpha^2 U_A \quad (x \in A,\, \alpha \in \mathscr{S}(B)).$$

Отсюда видно, что $p(xx^*) = p(x)^2$ и, в частности, инволюция будет изометрией и по отношению к векторной норме p, т. е. $p(x^*) = p(x)$ $(x \in A)$. Заметим также, что если $(\mathscr{A}, \rho)$ — банахова алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, A — ее ограниченный спуск и p — ограничение $\rho{\downarrow}$ на A, то подъем инволюции из A удовлетворяет условию $[\![(\forall\, x \in \mathscr{A}) \rho(xx^*) = \rho(x)^2]\!] = \mathbb{1}$ в том и только в том случае, если $p(xx^*) = p(x)^2$ $(x \in A)$. Осталось привлечь теорему 12.1.5 и осуществить некоторые элементарные проверки. $\triangleright$

12.1.7. Теорема. *Пусть A — это B-циклическая банахова алгебра, в которой обратим всякий элемент $x \in A$, удовлетворяющий условию $(\forall\, b \in B)(bx = 0 \to b = \mathbb{0})$. Тогда A изометрически B-изоморфна стоуновой алгебре с базой B.*

$\triangleleft$ Согласно теореме 12.1.5, можно считать, что A — это ограниченный спуск банаховой алгебры $\mathscr{A} \in \mathbb{V}^{(B)}$. Указанное в формулировке условие влечет, что в алгебре $\mathscr{A}$ обратим любой ненулевой элемент. В самом деле,

$$\begin{aligned} c := &[\![(\forall\, x)\, (x \in \mathscr{A} \wedge x \neq \mathbb{0} \to (\exists\, z)(z = x^{-1}))]\!] = \\ &= \bigwedge \{ [\![(\exists\, z)(z = x^{-1})]\!] : \, x \in A, [\![x \neq 0]\!] = \mathbb{1} \}. \end{aligned}$$

В силу соотношения (c) из 11.3.1 (2) $[\![x \neq 0]\!] = \mathbb{1}$ равносильно условию $\chi(b)x = 0 \leftrightarrow b = \mathbb{0}$. Значит, если $[\![x \neq 0]\!] = \mathbb{1}$, то существует x^{-1} в алгебре A и

$[\![(\exists\, z)(z = x^{-1})]\!] = \mathbb{1}$. Значит, $c = \mathbb{1}$. По теореме Гельфанда — Мазура алгебра $\mathscr{A}$ изометрически изоморфна полю комплексных чисел $\mathscr{C}$. Но тогда A изометрически B-изоморфна ограниченному спуску $\mathscr{C}$, т. е. стоуновой алгебре с базой B. $\triangleright$

12.1.8. Теорема. *Пусть A — это B-циклическая банахова алгебра с единицей e, $\Lambda := \mathscr{S}(B)$ — стоунова алгебра с базой B и единицей $\bar{\mathbb{1}}$, а $\Phi : A \to \Lambda$ — некоторый B-линейный оператор. Предположим, что $\Phi(e) = \bar{\mathbb{1}}$ и $e_{\Phi(x)} = \bar{\mathbb{1}}$ для каждого обратимого элемента $x \in A$. Тогда Φ мультипликативен, т. е. $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ $(x, y \in A)$.*

$\triangleleft$ Рассуждая так же, как и в 12.1.7, положим $\phi := \Phi{\uparrow}$. Тогда $[\![\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ — линейный функционал $]\!] = \mathbb{1}$, причем $[\![\phi(e) = 1]\!] = [\![\phi(x) \neq 0$ для любого обратимого $x \in A]\!] = \mathbb{1}$. По теореме Глисона — Желязко — Кахана $[\![\phi$ — мультипликативный функционал $]\!] = \mathbb{1}$. Отсюда выводится мультипликативность Φ так же, как в 12.1.5 была доказана субмультипликативность p. $\triangleright$

12.1.9. Теорема. *Пусть A и Λ те же, что и в* 12.1.8, *причем алгебра A инволютивна и коммутативна. Обозначим буквой K множество всех положительных B-линейных операторов $\Psi : A \to \Lambda$ таких, что $\Psi(e) \leqslant \bar{\mathbb{1}}$. Если $\Phi \in K$, то равносильны утверждения*:

(1) $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y) \quad (x, y \in A)$;

(2) $\Phi(xx^*) = \Phi(x)\Phi(x^*) \quad (x \in A)$;

(3) $\Phi \in \operatorname{ext}(K)$,

где, как обычно, $\operatorname{ext}(K)$ — *множество крайних точек выпуклого множества* K.

$\triangleleft$ Сохранив прежние обозначения, можно утверждать: $[\![\mathscr{A}$ — коммутативная банахова алгебра с инволюцией, а $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ — положительный функционал, причем $\phi(e) \leqslant 1]\!] = \mathbb{1}$. Пусть $\mathscr{K}$ — множество всех положительных функционалов ψ на $\mathscr{A}$, для которых $\psi(e) \leqslant 1$. Можно показать, что отображение $\psi \mapsto (\psi{\downarrow}) \restriction A$ осуществляет аффинную биекцию λ между выпуклыми множествами $\mathscr{K}{\downarrow}$ и $\overline{K} := \{\Psi{\uparrow} : \Psi \in K\}$. Покажем, что $[\![\psi \in \operatorname{ext}(\mathscr{K})]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow \lambda\psi \in \operatorname{ext}(K)$, после чего нам останется применить скалярный вариант (т. е. при $\Lambda = \mathscr{C}$) требуемого факта внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Обозначим символом $\operatorname{Ext}(K)$ множество всех операторов $\Psi \in K$, удовлетворяющих условию: для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda^+$ и $\Psi_1, \Psi_2 \in K$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = \bar{\mathbb{1}}$ и $\alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2 = \Psi$, выполняется $\alpha_1\Psi = \alpha_1\Psi_1$ и $\alpha_2\Psi = \alpha_2\Psi_2$. Простым вычислением булевых оценок легко показать, что $[\![\psi \in \operatorname{ext}(\mathscr{K})]\!] = \mathbb{1}$ тогда и только тогда, когда $\lambda\psi \in \operatorname{Ext}(K)$. Кроме того, очевидно, что $\operatorname{Ext}(K) \subset \operatorname{ext}(K)$, и нам осталось обосновать обратное включение. Возьмем $\Psi \in \operatorname{ext}(K)$, и пусть $\alpha_1, \alpha_2, \Psi_1$ и Ψ_2 — такие же как в определении $\operatorname{Ext}(K)$. Тогда

$$\Psi = \frac{1}{2}(\alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2) + \frac{1}{2}(\alpha_1\Psi + \alpha_2\Psi) = \frac{1}{2}(\alpha_1\Psi + \alpha_2\Psi_2) + \frac{1}{2}(\alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi).$$

Значит, $\alpha_1\Psi = \alpha_1\Psi_1$ и $\alpha_2\Psi = \alpha_2\Psi_2$, т. е. $\Psi \in \operatorname{Ext}(K)$. $\triangleright$

12.1.10. Обозначим B-$\operatorname{Hom}(A_1, A_2)$ множество всех B-гомоморфизмов из A_1 в A_2. Пусть, далее, $\operatorname{Hom}^B(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ — элемент $\mathbb{V}^{(B)}$, изображающий множество всех гомоморфизмов из $\mathscr{A}_1$ в $\mathscr{A}_2$.

(1) Теорема. *Пусть $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ — банаховы алгебры внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а A_1 и A_2 — соответствующие ограниченные спуски. Если $\Phi \in B$-$\operatorname{Hom}(A_1, A_2)$ и $\phi := \Phi{\uparrow}$, то $[\![\phi \in \operatorname{Hom}^B(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\|\phi\| \leqslant C^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого $C \in \mathbb{R}$. Отображение $\Phi \mapsto \phi$ — изометрическая биекция между B-$\operatorname{Hom}(A_1, A_2)$ и $\operatorname{Hom}^B(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2){\Downarrow}$.*

◁ Всё требуемое, за исключением мультипликативности, содержится в 11.3.7. Мультипликативность операторов ϕ и Φ можно обосновать так же, как единственность в 12.1.5. ▷

(2) *Пусть $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ — инволютивные банаховы алгебры внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а $\Phi \in B\text{-Hom}(A_1,\, A_2)$ и $\phi \in \mathrm{Hom}^B(\mathscr{A}_1,\, \mathscr{A}_2)$ соответствуют друг другу в силу биекции из* (1)*. Тогда равенство $[\![\, \phi$ сохраняет инволюцию $]\!] = \mathbb{1}$ выполнено в том и только в том случае, когда Φ сохраняет инволюцию.*

◁ См. 12.1.4 и 12.1.6. ▷

12.1.11. *Пусть $\mathscr{A}$ — инволютивная банахова алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и A — ее ограниченный спуск. Тогда элемент $x \in A$ будет эрмитовым (положительным, проектором, центральным проектором) в том и только в том случае, если $[\![\, x$ — эрмитов (положителен, проектор, центральный проектор)$]\!] = \mathbb{1}$.*

◁ Очевидно. ▷

12.2. AW^*-алгебры

Здесь мы займемся булевозначной реализацией указанных в названии AW^*-алгебр.

12.2.1. Напомним, что AW^*-*алгеброй* называют C^*-алгебру, являющуюся в то же время бэровской $*$-алгеброй. Более подробно AW^*-алгебра — это такая C^*-алгебра, в которой всякий правый аннулятор имеет вид eA, где e — проектор. Заметим попутно, что AW^*-алгеброй принято называть то, что на наш взгляд стоило бы именовать бэровской C^*-алгеброй.

C^*-алгебра A будет AW^*-алгеброй в том и только в том случае, если выполнены условия:

(1) *в упорядоченном множестве проекторов $\mathfrak{P}(A)$ каждое семейство попарно ортогональных элементов имеет супремум*;

(2) *каждая максимальная коммутативная $*$-подалгебра A_0 алгебры A представляет собой комплексное K-пространство ограниченных элементов.*

Примером AW^*-алгебры служит пространство всех ограниченных линейных операторов $\mathscr{L}(H)$ в комплексном гильбертовом пространстве H. Структуру банаховой алгебры в $\mathscr{L}(H)$ определяют обычные операции сложения и умножения операторов и классическая операторная норма. Инволюция в $\mathscr{L}(H)$ — взятие сопряженного оператора.

Отметим также, что коммутативная AW^*-алгебра, называемая также *стоуновой алгеброй*, является комплексным K-пространством ограниченных элементов, причем единица умножения служит сильной порядковой единицей.

12.2.2. Спектральная теорема. *В AW^*-алгебре A для любого эрмитова элемента $a \in A$ существует единственное разложение единицы $\lambda \mapsto e_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ в $\mathfrak{P}(A)$ такое, что*

$$a = \int\limits_{-\|a\|}^{\|a\|} \lambda \, de_\lambda.$$

При этом для элемента $x \in A$ будет $ax = xa$ в том и только в том случае, если $xe_\lambda = e_\lambda x$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lhd$ Под разложением единицы в $\mathfrak{P}(A)$ понимают, как и в случае булевой алгебры, функцию $\lambda \mapsto e_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ со свойствами 10.5.7 (1–3). Максимальная коммутативная $*$-подалгебра A_0 алгебры A, содержащая элемент a, с индуцированным из A порядком (см. 11.6.4) будет комплексным K-пространством согласно 12.2.1 (2). Роль единицы в A_0 играет единица $\mathbb{1}$ алгебры A. Осколки единицы $\mathbb{1}$ в K-пространстве A_0 служат проекторами алгебры A. В самом деле, если $e \in \mathfrak{E}(\mathbb{1}) := \mathfrak{E}(A_0)$, то в силу положительности произведения двух коммутирующих положительных элементов (из-за 12.2.1 (2)) будет $e(\mathbb{1} - e) \leqslant e\mathbb{1} = e$ и аналогично $e(\mathbb{1} - e) \leqslant \mathbb{1} - e$. Отсюда $0 \leqslant e(\mathbb{1} - e) \leqslant e \wedge (\mathbb{1} - e) = \mathbb{0}$ и поэтому $e(\mathbb{1} - e) = \mathbb{0}$ и $e^2 = e$. Если в качестве проектора e_λ^a взять единичный элемент e_λ^a, вычисленный в K-пространстве A_0, то требуемое представление вытекает из теоремы Фрейденталя 10.6.12. Утверждение о коммутировании следует из того, что элемент a и множество $\{e_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ порождают одну и ту же максимальную $*$-подалгебру. $\rhd$

12.2.3. Теорема. *Всякая AW^*-алгебра A является B-циклической C^*-алгеброй, какова бы ни была правильная подалгебра B полной булевой алгебры $\mathfrak{P}_c(A)$.*

$\lhd$ Пусть U — единичный шар алгебры A. Нужно лишь установить, что для любых разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset B$ и семейства $(a_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset U$ найдется единственный элемент $a \in U$ такой, что $b_\xi a_\xi = b_\xi a$ для всех $\xi \in \Xi$. Допустим сначала, что a_ξ — эрмитов элемент для каждого $\xi \in \Xi$. Тогда семейство $(b_\xi a_\xi)$ состоит из попарно коммутирующих эрмитовых элементов, так как $(b_\xi a_\xi) \cdot (b_\eta a_\eta) = (b_\xi b_\eta) \cdot (a_\xi a_\eta) = 0$ при $\xi \neq \eta$. Пусть A_0 — максимальная коммутативная $*$-подалгебра A, содержащая семейство $(b_\xi a_\xi)$. Согласно 12.2.1 (2) A_0 — комплексное K-пространство ограниченных элементов. Поэтому существует элемент $a := o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi a_\xi$, где o-сумма вычислена в A_0. Ясно, что $b_\xi a_\xi = b_\xi a$ при всех $\xi \in \Xi$. В то же время из $-\mathbb{1} \leqslant a_\xi \leqslant \mathbb{1}$ вытекает $-\mathbb{1} \leqslant a \leqslant \mathbb{1}$. Следовательно, $\|a\| \leqslant 1$.

Докажем единственность. Допустим, что для некоторого эрмитова элемента $d \in A$ выполняется $b_\xi d = 0$ при всех $\xi \in \Xi$. Согласно 10.4.7 (12) имеем

$$
\begin{aligned}
e_\lambda^{b_\xi d} &= b_\xi^\perp \vee e_\lambda^d = \mathbb{1} = e_\lambda^{\mathbb{1}} \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0),\\
e_\lambda^{b_\xi d} &= b_\xi \wedge e_\lambda^d = \mathbb{0} = e_\lambda^{\mathbb{0}} \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \leqslant 0).
\end{aligned}
$$

Равенства $b_\xi^\perp \vee e_\lambda^d = \mathbb{1}$ и $b_\xi \wedge e_\lambda^d = \mathbb{0}$ равносильны неравенствам $e_\lambda^d \geqslant b_\xi$ и $e_\lambda^d \leqslant b_\xi^\perp$ соответственно. Отсюда выводим $e_\lambda^d = \mathbb{1}$ при $\lambda > 0$ и $e_\lambda^d = \mathbb{0}$ при $\lambda \leqslant 0$, т. е. спектральная функция элемента d совпадает со спектральной функцией нуля. Значит, $d = 0$.

В общем случае произвольных $a_\xi \in U$ воспользуемся представлением $a_\xi = u_\xi + iv_\xi$, где i — мнимая единица, а u_ξ и v_ξ — однозначно определенные эрмитовы элементы из U, см. 11.6.1. В соответствии с уже доказанным, существуют эрмитовы элементы $u, v \in U$ такие, что $b_\xi u = b_\xi u_\xi$ и $b_\xi v = b_\xi v_\xi$ при всех $\xi \in \Xi$. Элемент $a = u + iv$ будет искомым. В самом деле, $b_\xi a = b_\xi a_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Кроме того, эрмитовы элементы $a_\xi^* a_\xi$ входят в U и $b_\xi a^* a = b_\xi a_\xi^* a_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Так как элемент $a^* a$, удовлетворяющий этим условиям, единствен, то $a^* a \in U$. Но тогда $a \in U$, ибо $\|a\|^2 = \|a^* a\| \leqslant 1$. $\rhd$

12.2.4. Теорема. *Пусть $\mathscr{A}$ — это AW^*-алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и A — ее ограниченный спуск. Тогда A — также AW^*-алгебра, причем в $\mathfrak{P}_c(A)$ имеется пра-*

вильная подалгебра, изоморфная B. Наоборот, пусть A — такая AW^*-алгебра, что B — правильная подалгебра булевой алгебры $\mathfrak{P}_c(A)$. Тогда в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ существует единственная с точностью до $*$-изоморфизма AW^*-алгебра $\mathscr{A}$, ограниченный спуск которой $*$-B-изоморфен A.

$\lhd$ В силу теорем 12.1.6 и 12.2.3 следует проверить лишь утверждение о бэровости C^*-алгебр A и $\mathscr{A}$. Последнее же элементарно выводится с помощью правил спуска и подъема поляр (в данном случае аннуляторов) (см. 5.3.5 (2), 5.5.7 (6)) с учетом 12.1.11. $\rhd$

12.2.5. *Центром* AW^*-алгебры A, как обычно, называют множество элементов $z \in A$, коммутирующих со всеми элементами A, т. е. $\mathscr{Z}(A) := \{z \in A : (\forall\, x \in A)\, xz = zx\}$. Понятно, что $\mathscr{Z}(A)$ — коммутативная AW^*-подалгебра A, причем $\lambda\mathbb{1} \in \mathscr{Z}(A)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Если $\mathscr{Z}(A) = \{\lambda\mathbb{1} : \lambda \in \mathbb{C}\}$, то AW^*-алгебру A называют *AW^*-фактором.*

Теорема. *Если алгебра $\mathscr{A}$ — это AW^*-фактор внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то ее ограниченный спуск A будет AW^*-алгеброй и булева алгебра всех ее центральных проекторов изоморфна B. Наоборот, если A — это AW^*-алгебра и $B := \mathfrak{P}_c(A)$, то в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ существует единственный с точностью до $*$-изоморфизма AW^*-фактор $\mathscr{A}$, ограниченный спуск которого $*$-B-изоморфен A.*

$\lhd$ Следует применить 12.2.4 и тот факт, что спуск двухэлементной булевой алгебры изоморфен B (см. 7.3.2). $\rhd$

12.2.6. Введем теперь классификацию AW^*-алгебр по типам и покажем, что при погружении в булевозначную модель тип AW^*-алгебры сохраняется. Тип алгебры задан строением ее решетки проекторов. Следовательно, нам необходимо проследить за тем, что происходит с классификацией проекторов при переходе к булевозначной реализации.

Возьмем произвольную AW^*-алгебру A. Ясно, что порядок $\leqslant$ на множестве всех проекторов $\mathfrak{P}(A)$, введенный в 12.1.1 и 12.1.2, можно задать формулой

$$q \leqslant p \leftrightarrow q = qp = pq \quad (q, p \in \mathfrak{P}(X)).$$

Говорят, что проекторы p и q *эквивалентны*, и пишут $p \sim q$, если существует элемент $x \in A$, удовлетворяющий условиям $x^*x = p$ и $xx^* = q$. В этом случае сам элемент x носит название *частичной изометрии* с *начальным проектором* p и *конечным проектором* q. Как легко проверить, отношение $\sim$ действительно является отношением эквивалентности на $\mathfrak{P}(A)$.

Проектор $\pi \in A$ принято называть

(a) *абелевым*, если алгебра $\pi A \pi$ коммутативна;

(b) *конечным*, если для любого проектора $\rho \in A$ из соотношений $\pi \sim \rho \leqslant \pi$ следует $\rho = \pi$;

(c) *бесконечным*, если π не является конечным;

(d) *чисто бесконечным*, если π не содержит ненулевых конечных проекторов.

Как обычно, фраза «проектор π содержит проектор ρ» означает, что $\rho \leqslant \pi$.

Определим AW^*-алгебры *типов* I, II и III. Говорят, что AW^*-алгебра имеет тип I, если каждый ненулевой проектор в A содержит ненулевой абелев проектор; AW^*-алгебру A относят к типу II, если A не содержит ненулевых абелевых проекторов и каждый ненулевой проектор в A содержит ненулевой конечный проектор. Наконец, AW^*-алгебра A имеет тип III, если единица A является чисто бесконечным проектором. В том случае, когда единица AW^*-алгебры A является конечным проектором, то A называют *конечной.* Мы будем также говорить, что AW^*-алгебра A является λ-*однородной,* если в A существует множество $\mathscr{P}$ попарно ортогональных эквивалентных абелевых проекторов, причем $\sup \mathscr{P} = \mathbb{1}$ и $|\mathscr{P}| = \lambda$. Соотношение $\pi \precsim \rho$ означает, что $\pi \sim \pi_0$ для некоторого $\pi_0 \leqslant \rho$.

12.2.7. Теорема. *Пусть $\mathscr{A}$ — это AW^*-алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и A — ее ограниченный спуск. Тогда для произвольного проектора $\pi \in \mathfrak{P}(A)$ имеют место эквивалентности*:

(1) π *абелев* $\leftrightarrow$ $[\![\, \pi$ *абелев* $]\!] = \mathbb{1}$;

(2) π *конечен* $\leftrightarrow$ $[\![\, \pi$ *конечен* $]\!] = \mathbb{1}$;

(3) π *чисто бесконечный* $\leftrightarrow [\![\, \pi$ *чисто бесконечен* $]\!] = \mathbb{1}$.

$\lhd$ Утверждение (1) очевидно. Заметим, что для произвольных $\pi, \rho \in \mathfrak{P}(A)$ отношения $\pi \sim \rho$, $\pi \leqslant \rho$ и $\pi \precsim \rho$ можно записать как алгебраические тождества (см. 12.2.6):

$$\pi \sim \rho \leftrightarrow xx^* = \pi \wedge x^*x = \rho,$$
$$\pi \leqslant \rho \leftrightarrow \pi\rho = \rho\pi = \pi,$$
$$\pi \precsim \rho \leftrightarrow \pi \sim \pi_0 \wedge \pi_0 \leqslant \rho.$$

Поскольку умножение, инволюция и равенство в A определены как спуски соответствующих объектов в $\mathscr{A}$, мы приходим к соотношениям

$$\pi \sim \rho \leftrightarrow [\![\, \pi \sim \rho \,]\!] = \mathbb{1},$$
$$\pi \leqslant \rho \leftrightarrow [\![\, \pi \leqslant \rho \,]\!] = \mathbb{1},$$
$$\pi \precsim \rho \leftrightarrow [\![\, \pi \precsim \rho \,]\!] = \mathbb{1}.$$

Теперь для доказательства (2) воспользуемся формулой

$$[\![\, (\forall\, x \in \mathscr{A})\, \varphi(x) \to \psi(x) \,]\!] = \bigwedge \big\{ [\![\, \psi(x) \,]\!] :\ x \in \mathscr{A}{\downarrow},\ [\![\, \varphi(x) \,]\!] = \mathbb{1} \big\}$$

и равенством $\mathfrak{P}(\mathscr{A}){\downarrow} = \mathfrak{P}(A)$. Зафиксировав $\pi \in \mathfrak{P}(A)$, возьмем в качестве $\varphi(\rho)$ и $\psi(\rho)$ формулы $\pi \sim \rho \leqslant \pi$ и $\pi = \rho$ соответственно. Тогда можно написать цепочку эквивалентностей:

$$[\![\, \pi \text{ конечен} \,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow [\![\, (\forall\, \rho \in \mathfrak{P}(\mathscr{A}))\, \pi \sim \rho \leqslant \pi \to \pi = \rho \,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\ (\forall\, \rho \in \mathfrak{P}(A))\, [\![\, \pi \sim \rho \leqslant \pi \,]\!] = \mathbb{1} \to [\![\, \pi = \rho \,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\ (\forall\, \rho \in \mathfrak{P}(A))\, \pi \sim \rho \leqslant \pi \to \pi = \rho.$$

Утверждение (3) можно установить аналогичными рассуждениями. $\rhd$

12.2.8. Теорема. *Пусть алгебры A и $\mathscr{A}$ такие же, как и в* 12.2.7. *Тогда справедливы следующие эквивалентности*:

(1) A *конечна* $\leftrightarrow [\![\, \mathscr{A}$ *конечна* $]\!] = \mathbb{1}$;

(2) A *имеет тип* I $\leftrightarrow [\![\, \mathscr{A}$ *имеет тип* I $]\!] = \mathbb{1}$;

(3) A *имеет тип* II $\leftrightarrow [\![\, \mathscr{A}$ *имеет тип* II $]\!] = \mathbb{1}$;

(4) A *имеет тип* III $\leftrightarrow [\![\, \mathscr{A}$ *имеет тип* III $]\!] = \mathbb{1}$.

$\lhd$ Все утверждения вытекают непосредственно из определений и 12.2.7. $\rhd$

12.2.9. Теорема. *Пусть X — модуль Капланского — Гильберта над алгеброй Стоуна Λ. Тогда алгебра $\mathscr{L}_\Lambda(X)$ непрерывных Λ-линейных операторов в X представляет собой AW^*-алгебру типа I, центр которой изоморфен Λ.*

$\lhd$ Пусть B — полная булева алгебра всех проекторов в Λ. По теореме 11.6.10 существует гильбертово пространство $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ такое, что X служит ограниченным спуском $\mathscr{X}$. В соответствии с теоремой 11.6.11 алгебра $\mathscr{L}_\Lambda(X)$ $*$-B-изоморфна ограниченному спуску $\mathscr{L}^B(\mathscr{X})\Downarrow$, где $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}) := \mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{X})$. Осталось заметить, что $\mathscr{L}^B(\mathscr{X})$ представляет собой AW^*-фактор типа I внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, и применить 12.2.4 и 12.2.8 (2). $\rhd$

12.2.10. Теорема. *Пусть A — произвольная AW^*-алгебра типа I с центром Λ. Тогда существует модуль Капланского — Гильберта X над Λ такой, что A и $\mathscr{L}_\Lambda(X)$ $*$-B-изоморфны.*

$\lhd$ Согласно теореме 12.2.5 можно предположить, что A — ограниченный спуск AW^*-фактора $\mathscr{A}$ из $\mathbb{V}^{(B)}$. В рассматриваемой ситуации $\mathscr{A}$ имеет тип I в соответствии с 12.2.8 (2). Известно, что AW^*-фактор типа I унитарно эквивалентен $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathscr{X}$ (см., например, [107, теорема 7.5.8]). Таким образом, $\mathscr{A} \simeq \mathscr{L}(\mathscr{X})$, где $\mathscr{X}$ — некоторое гильбертово пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Отсюда в силу теоремы 11.6.11 видно, что A $*$-B-изоморфна $\mathscr{L}_\Lambda(X)$, где X обозначает ограниченный спуск $\mathscr{X}$. $\rhd$

12.3. Булева размерность модуля Капланского — Гильберта

С каждым модулем Капланского — Гильберта можно однозначно связать некоторый нестандартный кардинал, служащий *гильбертовой размерностью* его булевозначной реализации. Внешняя расшифровка последнего понятия приводит к определению булевой размерности.

12.3.1. Пусть X — модуль Капланского — Гильберта над алгеброй Стоуна Λ и $B := \mathfrak{P}(\Lambda)$. (Последнее, как мы уже отмечали, равносильно равенству $\Lambda = \mathscr{S}(B)$.) Подмножество $\mathscr{E}$ в X называют *ортонормальным*, если

(1) $\langle x \mid y\rangle = 0$ для любых различных $x, y \in \mathscr{E}$;

(2) $\langle x \mid x\rangle = \mathbb{1}$ для любого $x \in \mathscr{E}$.

Ортонормальное множество $\mathscr{E} \subset X$ именуют *базисом* X, если

(3) из условия $(\forall\, e \in \mathscr{E})\langle x \mid e\rangle = 0$ следует, что $x = 0$.

Модуль Капланского — Гильберта X называют λ-*однородным,* если λ — кардинал и в X существует базис мощности λ. Модуль Капланского — Гильберта X называют *однородным,* если X — это λ-однородный модуль для некоторого λ. Взяв $\mathbb{0} \neq b \in B$, обозначим символом $\varkappa(b)$ наименьший кардинал γ такой, что модуль Капланского — Гильберта $bX := \{bx : x \in X\}$ над $b\Lambda := \{b\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ является γ-однородным. Если X однороден, то кардинал $\varkappa(b)$ определен для всех $\mathbb{0} \neq b \in B$. Удобно считать, что $\varkappa(\mathbb{0}) = 0$. Будем говорить, что модуль Капланского — Гильберта X *строго* γ-*однороден,* если X однороден и $\gamma = \varkappa(b)$ для всех ненулевых $b \in B$. Модуль X *строго однороден,* если X строго λ-однороден для некоторого кардинала λ.

Если γ — конечный кардинал, то свойства γ-однородности и строгой γ-однородности модуля Капланского — Гильберта равносильны. Пусть $|M|$ обозначает мощность множества M, т. е. кардинал, биективный с M. Всюду в этом параграфе X — модуль Капланского — Гильберта, а $\mathscr{X}$ — его булевозначная реализация (см. 11.6.10).

12.3.2. Теорема. *Для λ-однородности модуля Капланского — Гильберта X необходимо и достаточно, чтобы* $[\![\dim(\mathscr{X}) = |\lambda^\wedge|]\!] = \mathbb{1}$.

$\lhd$ По теореме 11.6.10 можно считать, что $X = \mathscr{X}{\Downarrow}$. Для элементов $x, y \in X$ и $a \in \Lambda$ равносильны соотношения $\langle x|y\rangle = a$ и $[\![(x|y) = a]\!] = \mathbb{1}$, ибо отображение $\langle \cdot | \cdot \rangle$ и спуск формы $(\cdot | \cdot)$ совпадают на $X \times X$. Отсюда, в частности, видно, что отношение ортогональности в X представляет собой ограничение на X спуска отношения ортогональности в $\mathscr{X}$. Из этих замечаний следует, что множество $\mathscr{E} \subset X$ ортонормированно тогда и только тогда, когда $[\![\mathscr{E}{\uparrow}$ — ортонормированное множество в $\mathscr{X}]\!] = \mathbb{1}$. Далее, пользуясь правилом спуска поляр 5.3.5 (2) и 5.5.7 (5, 6), для ортогональных дополнений в X и в $\mathscr{X}$, получим $(\mathscr{E}{\uparrow})^{\perp}{\downarrow} = (\mathscr{E}{\uparrow}{\downarrow})^{\perp}$. Заметим также, что $\mathscr{E}^{\perp} = (\mathscr{E}{\uparrow}{\downarrow})^{\perp}$. Значит, $\mathscr{E}^{\perp}{\uparrow} = (\mathscr{E}{\uparrow})^{\perp}$. В частности, $\mathscr{E}^{\perp} = \{0\}$ в том и только в том случае, если $[\![(\mathscr{E}{\uparrow})^{\perp} = \{0\}]\!] = \mathbb{1}$. Итак, $\mathscr{E}$ — базис в X лишь в том случае, когда $[\![\mathscr{E}{\uparrow}$ — базис в $\mathscr{X}]\!] = \mathbb{1}$. Если $|\mathscr{E}| = \lambda$ и $\varphi : \lambda \to \mathscr{E}$ — биекции, то модифицированный подъем $\varphi{\Uparrow}$ будет биекцией $\lambda^\wedge$ на $\mathscr{E}{\uparrow}$, т. е. $[\![\dim(\mathscr{X}) = |\mathscr{E}{\uparrow}| = |\lambda^\wedge|]\!] = \mathbb{1}$. Наоборот, пусть $\mathscr{D}$ — базис в $\mathscr{X}$ и $[\![\psi : \lambda^\wedge \to \mathscr{D}$ — биекция$]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого кардинала λ. Тогда модифицированный спуск $\varphi := \psi{\Downarrow} : \lambda \to \mathscr{D}{\downarrow}$ будет инъекцией. Следовательно, множество $\mathscr{E} := \operatorname{im}(\varphi)$ имеет мощность λ, а в силу сказанного выше оно ортонормированно. Осталось заметить, что $\mathscr{D}{\downarrow} = \operatorname{mix}(\mathscr{E}) = \mathscr{E}{\uparrow}{\downarrow}$, т. е. $[\![\mathscr{E}{\uparrow} = \mathscr{D}]\!] = \mathbb{1}$, а потому $\mathscr{E}$ — базис в X. $\rhd$

12.3.3. Теорема. *Для строгой λ-однородности модуля Капланского — Гильберта X необходимо и достаточно, чтобы* $[\![\dim(\mathscr{X}) = \lambda^\wedge]\!] = \mathbb{1}$.

$\lhd$ Если X строго λ-однороден, то X λ-однороден и по теореме 12.3.2 будет $[\![\dim(\mathscr{X}) = |\lambda^\wedge|]\!] = \mathbb{1}$. С другой стороны, существуют кардинал β и разбиение единицы $(b_\alpha)_{\alpha \in \beta}$ в булевой алгебре B, для которых $|\lambda^\wedge| = \operatorname{mix}_{\alpha\in\beta}(b_\alpha \alpha^\wedge)$. Так как $b_\alpha \leqslant [\![\mathscr{X} = b_\alpha \mathscr{X}]\!]$, то верно также соотношение $b_\alpha \leqslant [\![\dim(b_\alpha \mathscr{X}) = \alpha^\wedge]\!]$. Рассмотрим множество $B_\alpha := [\mathbb{0}, b_\alpha] := \{b' \in B : \ b' \leqslant b_\alpha\}$. Если $b_\alpha \neq \mathbb{0}$, то B_α — полная булева алгебра и $\mathbb{V}^{(B_\alpha)} \models$ «$b_\alpha \mathscr{X}$ — гильбертово пространство и $\alpha^\wedge = \dim(b_\alpha \mathscr{X})$». Ограниченный спуск $b_\alpha \mathscr{X}$ из модели $\mathbb{V}^{(B_\alpha)}$ есть $b_\alpha X$. Следовательно, $b_\alpha X$ — это α-однородный модуль Капланского — Гильберта. Кроме того, $\mathbb{V}^{(B_\alpha)} \models$ «$\alpha^\wedge$ — кардинал», а значит, и α будет кардиналом (см. 9.1.2 (1)). По определению строгой однородности $\lambda \leqslant \alpha$. Итак, $b_\alpha = \mathbb{0}$ при $\alpha < \lambda$ и поэтому $[\![\lambda^\wedge \leqslant |\lambda^\wedge|]\!] = \mathbb{1}$. Тем самым $[\![\lambda^\wedge = |\lambda^\wedge|]\!] = \mathbb{1}$, ибо соотношение $[\![|\lambda^\wedge| \leqslant \lambda^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ выполнено по определению мощности. Теперь мы вправе заключить, что $[\![\dim(\mathscr{X}) = \lambda^\wedge]\!] = \mathbb{1}$.

Допустим, что верно последнее равенство. Тогда λ — кардинал, ибо $\lambda^\wedge$ — кардинал внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. В силу 12.3.2 X будет λ-однородным модулем. Если X является γ-однородным для некоторого кардинала γ, то вновь по 12.3.2 мы получим $[\![\dim(\mathscr{X}) = |\gamma^\wedge|]\!] = \mathbb{1}$. Отсюда выводим $[\![\lambda^\wedge = |\gamma^\wedge| \leqslant \gamma^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ и далее $\lambda \leqslant \gamma$. Эти же рассуждения годны и для AW^*-алгебры bX, где $\mathbb{0} \neq b \in B$, если вместо модели $\mathbb{V}^{(B)}$ использовать $\mathbb{V}^{([\mathbb{0},b])}$. Таким образом, модуль Капланского — Гильберта X строго λ-однороден. $\rhd$

12.3.4. *Пусть X — модуль Капланского — Гильберта над Λ. Отображение $\varkappa$ сохраняет супремумы непустых множеств, т. е. $\varkappa(\sup(D)) = \sup(\varkappa(D))$ для любого непустого $D \subset \operatorname{dom}(\varkappa) \subset B$.*

$\lhd$ Положим $\bar{b} := \sup D$. Как видно из определения, $\varkappa$ возрастает: $b_1 \leqslant b_2 \to \varkappa(b_1) \leqslant \varkappa(b_2)$. Поэтому выполняется неравенство $\sup_{b\in D} \varkappa(b) \leqslant \varkappa(\bar{b})$. Докажем противоположное неравенство. Для произвольного $b \in B$ множество кардиналов $\{\varkappa(b') : \ \mathbb{0} \neq b' \leqslant b\}$ имеет наименьший элемент, скажем, $\gamma := \varkappa(b_0)$. Из выбора b_0 ясно, что $b_0 \neq \mathbb{0}$ и $\varkappa(b_0) = \varkappa(b')$ для всех ненулевых $b' \leqslant b_0$. Таким образом, множество D' всех $b \in B$, для которых модуль bX строго однороден, минорирует D. В силу принципа исчерпывания (см. 2.1.9) существует разбиение $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элемента $\bar b$ такое, что $b_\xi X$ — строго $\varkappa(b_\xi)$-однородный модуль Капланского — Гильберта над $b_\xi\Lambda$. Пусть $\mathscr{E}_\xi := (e_{\gamma,\xi})_{\gamma<\varkappa(b_\xi)}$ — базис в $b_\xi X$. Положим $\lambda := \sup_{\xi\in\Xi}\varkappa b_\xi$ и $e_{\gamma,\xi} = 0$ при $\varkappa(b_\xi) \leqslant \gamma < \lambda$. Введем теперь семейство $\mathscr{E} := (e_\gamma)_{\gamma\in\lambda}$, где

$$e_\gamma := bo\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} e_{\gamma,\xi} \quad (\gamma \in \lambda).$$

Семейство $\mathscr{E}$ ортонормально, поскольку

$$\begin{aligned}\langle e_\gamma \,|\, e_\beta\rangle = \left\langle bo\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} e_{\gamma,\xi} \,\middle|\, bo\text{-}\sum_{\eta\in\Xi} e_{\beta,\eta}\right\rangle = bo\text{-}\sum_{\xi,\eta\in\Xi}\big\langle e_{\gamma,\xi} \,|\, e_{\beta,\eta}\big\rangle =\\ = bo\text{-}\sum_{\xi,\eta\in\Xi}\big\langle b_\xi e_{\gamma,\xi} \,|\, b_\eta e_{\beta,\eta}\big\rangle = bo\text{-}\sum_{\xi,\eta\in\Xi} b_\xi b_\eta\big\langle e_{\gamma,\xi} \,|\, e_{\beta,\eta}\big\rangle =: e,\end{aligned}$$

причем $e = 0$, если $\gamma \neq \beta$, и $e = \mathbb{1}$, если $\gamma = \beta$. Семейство $\mathscr{E}$ является базисом в $\bar bX$. Действительно, если $x \in X$ и $\langle x \,|\, e_\gamma\rangle = 0$ для всех $\gamma \in \lambda$, то $\langle x \,|\, e_{\gamma,\xi}\rangle = 0$ при всех $\xi \in \Xi$ и $\gamma < \varkappa(b_\xi)$. Значит, $b_\xi x \perp \mathscr{E}_\xi$, откуда $b_\xi x = 0$. Согласно 11.6.9 (1) $x = 0$. Так как $|\mathscr{E}| \leqslant \lambda$, то, учитывая определение $\varkappa$, мы приходим к неравенству $\varkappa(b) \leqslant \lambda \leqslant \sup_{b\in D}\varkappa(b)$. $\triangleright$

12.3.5. Сейчас мы сформулируем основное понятие данного параграфа.

Разбиение единицы $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B называют *B-размерностью* модуля Капланского — Гильберта X, если Γ — непустое множество кардиналов, $b_\gamma \neq 0$ при всех $\gamma \in \Gamma$ и $b_\gamma X$ — строго γ-однородный AW^*-модуль для каждого $\gamma \in \Gamma$. При этом мы будем писать $B\text{-}\dim(X) = (b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. Заметим, что элементы B-размерности попарно различны в силу определения строгой однородности. Будем говорить, что B-размерность X равна γ (символически $B\text{-}\dim(X) = \gamma$), если $\Gamma = \{\gamma\}$ и $b_\gamma = \mathbb{1}$. Равенство $B\text{-}\dim(X) = \gamma$ означает, что X строго γ-однороден.

Функцию $\varkappa$ из 12.3.1 можно определить и на всей булевой алгебре $B := \mathfrak{P}(\Lambda)$. Пусть B' — множество элементов $b' \in B$, для которых $b'X$ однороден. Продолжим отображение $\varkappa$ с B' на всю алгебру B, полагая $\varkappa(b) := \sup\{\varkappa(b') : b' \in B',\, b' < b\}$. Это определение корректно ввиду предложения 12.3.4. Отображение $\varkappa$ принято называть *функцией кратности* модуля X. Ясно, что если $B\text{-}\dim(X) = (b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, то $\varkappa(b) = \sup\{\gamma \in \Gamma : b \wedge b_\gamma \neq \mathbb{0}\}$.

12.3.6. Теорема. *Пусть $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — разбиение единицы в B, где Γ — непустое множество кардиналов и $b_\gamma \neq \mathbb{0}$ $(\gamma \in \Gamma)$. Тогда $B\text{-}\dim(X) = (b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в том и только в том случае, если $[\![\, \dim(\mathscr{X}) = \operatorname{mix}_{\gamma\in\Gamma}(b_\gamma\gamma^\wedge)\,]\!] = \mathbb{1}$.*

$\triangleleft$ Как уже было отмечено, $b_\gamma X$ можно отождествить с ограниченным спуском гильбертова пространства $b_\gamma\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(B_\gamma)}$, где $B_\gamma := [\mathbb{0}, b_\gamma]$. В силу 12.3.3 γ-однородность $b_\gamma X$ равносильна соотношению $b_\gamma = [\![\, \dim(b_\gamma\mathscr{X}) = \gamma^\wedge\,]\!]^{B_\gamma} \leqslant [\![\, \dim(\mathscr{X}) = \gamma^\wedge\,]\!]^B$. Но тогда равенство $B\text{-}\dim(X) = (b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ верно в том и только в том случае, если $b_\gamma \leqslant [\![\, \dim(\mathscr{X}) = \gamma^\wedge\,]\!]$ $(\gamma \in \Gamma)$, ибо $b_\gamma \leqslant [\![\, \mathscr{X} = b_\gamma\mathscr{X}\,]\!] = [\![\, \dim(\mathscr{X}) = \dim(b_\gamma\mathscr{X})\,]\!]$. Значит, $[\![\, \dim(\mathscr{X}) = \operatorname{mix}_{\gamma\in\Gamma}(b_\gamma\gamma^\wedge)\,]\!] = \mathbb{1}$. $\triangleright$

12.3.7. Выясним, какие разбиения единицы могут служить B-размерностями модулей Капланского — Гильберта. Введем необходимое для этого определение. Для $b \in B$ и $\beta \in \mathrm{On}$ символом $b(\beta)$ мы обозначим множество всех разбиений элемента b, имеющих вид $(b_\alpha)_{\alpha\in\beta}$. Определим теперь $[\mathbb{0}, b]$-значную метрику d на $b(\beta)$ формулой:

$$d(u,v):=\Big(\bigvee_{\alpha\in\beta} u_\alpha\wedge v_\alpha\Big)^* \quad \big(u=(u_\alpha),\ \ v=(v_\alpha)\in b(\beta)\big).$$

Значит, $\big(b(\beta),d\big)$ — булево множество. Запись $b(\beta)\simeq b(\gamma)$ при $\gamma\in\mathrm{On}$ означает, что между $b(\beta)$ и $b(\gamma)$ существует биекция, сохраняющая булеву метрику, т. е. B-изометрия.

Напомним, что с булевым множеством $(b(\beta),d)$ мы уже имели дело в 5.9.2. Функциональное описание этого множества очевидно. Именно, пусть Q_b — открыто-замкнутое множество в стоуновом компакте $\mathrm{St}(B)$, соответствующее элементу $b\in B$. Определим множество $C_\infty(Q_b,\beta)$ всех непрерывных плотно определенных в Q_b функций $f:\mathrm{dom}(f)\to\beta$, снабдив β дискретной топологией (ср. с определением $C_\infty(Q,X)$ из 11.2.3). Как видно, для каждого $f\in C_\infty(Q_b,\beta)$ существует семейство попарно непересекающихся открыто-замкнутых множеств (Q_α) с плотным в Q_b объединением такое, что функция f постоянна на каждом из Q_α. Булево расстояние $d'(f,g)$ между произвольными $f,g\in C_\infty(Q_b,\beta)$ мы определим как замыкание открытого множества $\{q\in Q_b\ :\ f(q)\neq g(q)\}$. Биекцию между $(b(\beta),d)$ и $(C_\infty(Q_b,\beta),d')$ установим путем сопоставления разбиению единицы $(b_\alpha)_{\alpha\in\beta}$ функции, принимающей значение α на открыто-замкнутом множестве, соответствующем элементу b_α. Кроме того, соотношение $b(\beta)\simeq b(\gamma)$ означает, что существует такая биекция $\jmath:C_\infty(Q_b,\beta)\to C_\infty(Q_b,\gamma)$, что если f и g из $C_\infty(Q_b,\beta)$ совпадают на некотором открыто-замкнутом множестве Q_0, то $\jmath(f)$ и $\jmath(g)$ также совпадают на Q_0.

Возьмем кардинал λ. Булеву алгебру B мы назовем *λ-стабильной*, если для любого ненулевого $b\in B$ и произвольного ординала α из $b(\lambda)\simeq b(\alpha)$ следует $\lambda\leqslant\alpha$. О стоуновом компакте такой алгебры говорят, что он *λ-стабилен*. Ненулевой элемент $b\in B$ по определению мы будем считать *λ-стабильным*, если такова булева алгебра $[\mathbb{0},b]$.

12.3.8. Теорема. *Разбиение единицы $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в полной булевой алгебре B, состоящее из попарно различных элементов, будет B-размерностью некоторого модуля Капланского — Гильберта в том и только в том случае, если Γ — непустое множество кардиналов и b_γ — это γ-стабильный элемент для каждого $\gamma\in\Gamma$.*

$\lhd$ Положим $\lambda:=\mathrm{mix}_{\gamma\in\Gamma}(b_\gamma\gamma^\wedge)$. В модели $\mathbb{V}^{(B)}$ существует гильбертово пространство $\mathscr{X}$, для которого $[\![\,\mathrm{dim}(\mathscr{X})=|\lambda|\,]\!]=\mathbb{1}$. Из 12.3.6 видно, что B-$\mathrm{dim}(X)=$ $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ тогда и только тогда, когда $[\![\,|\lambda|=\lambda\,]\!]=\mathbb{1}$. Последнее же соотношение равносильно системе неравенств

$$b_\gamma\leqslant[\![\,|\gamma^\wedge|=\gamma^\wedge\,]\!]\quad(\gamma\in\Gamma).$$

Неравенство $b_\gamma\leqslant[\![\,|\gamma^\wedge|=\gamma^\wedge\,]\!]$ для ненулевого b_γ означает справедливость того, что $\mathbb{V}^{([\mathbb{0},b_\gamma])}\models\gamma^\wedge=|\gamma^\wedge|$. Следовательно, нам осталось показать, что γ-стабильность булевой алгебры $B_0:=[\mathbb{0},b]$ и соотношения $\mathbb{V}^{(B_0)}\models\gamma^\wedge=|\gamma^\wedge|$ имеют место или отсутствуют одновременно.

Заметим, что

$$\begin{aligned}[\![\,\gamma^\wedge=|\gamma^\wedge|\,]\!]&=[\![\,(\forall\,\alpha\in\mathrm{On})\,(\gamma^\wedge\sim\alpha\to\gamma^\wedge\leqslant\alpha)\,]\!]=\\&=\bigwedge\big\{[\![\,\gamma^\wedge\sim\alpha^\wedge\,]\!]\Rightarrow[\![\,\gamma^\wedge\leqslant\alpha\,]\!]:\ \alpha\in\mathrm{On}\,\big\}.\end{aligned}$$

Ясно, что $[\![\gamma^\wedge = |\gamma^\wedge|]\!] = \mathbb{1}$ лишь только в том случае, когда $c := [\![\gamma^\wedge \sim \alpha^\wedge]\!] \leqslant [\![\gamma^\wedge \leqslant \alpha^\wedge]\!]$ для любого ординала α. Если $c \neq \mathbb{0}$, то $\gamma \leqslant \alpha$. В то же время неравенство $c \leqslant [\![\gamma^\wedge \sim \alpha^\wedge]\!]$ означает, что $c(\gamma) \simeq c(\alpha)$. Таким образом, равенство $[\![\gamma^\wedge = |\gamma^\wedge|]\!] = \mathbb{1}$ равносильно γ-стабильности булевой алгебры B_0. $\triangleright$

12.3.9. Модули Капланского — Гильберта X и Y над Λ называют *унитарно эквивалентными*, если существует Λ-линейный оператор U из X на Y, сохраняющий внутреннее произведение (т. е. $\langle Ux_1|Ux_2\rangle = \langle x_1|x_2\rangle$).

Теорема. *Модули Капланского — Гильберта унитарно эквивалентны в том и только в том случае, если они имеют одну и ту же булеву размерность.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — булевозначные представления X и Y соответственно. В силу 11.6.11 модули Капланского — Гильберта X и Y унитарно эквивалентны в том и только в том случае, если $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ унитарно эквивалентны как гильбертовы пространства внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Осталось сослаться на 12.3.6 и использовать тот факт, что гильбертовы пространства унитарно эквивалентны лишь в том случае, когда имеют одну и ту же гильбертову размерность. $\triangleright$

12.4. Функциональное представление модулей Капланского — Гильберта

В этом параграфе мы установим, что любой модуль Капланского — Гильберта представим в виде прямой суммы семейства модулей непрерывных вектор-функций, причем такое представление в определенном смысле единственно.

Обозначим символом $C_\#(Q,H)$ подпространство $C_\infty(Q,H)$, состоящее из таких вектор-функций z, что $|\!|z|\!| \in C(Q)$ (см. 11.2.4).

12.4.1. *Предположим, что Q — экстремально несвязный компакт, а H — гильбертово пространство размерности λ. Пространство $C_\#(Q,H)$ служит λ-однородным модулем Капланского — Гильберта над алгеброй $\Lambda := C(Q,\mathbb{C})$.*

$\triangleleft$ Прежде всего видно, что $C_\#(Q,H)$ служит точным унитарным Λ модулем, при поточечном определении произведения вектор-функции $u : \mathrm{dom}(u) \to H$ и скалярной функции $\lambda \in \Lambda$, т. е. $\lambda u : q \mapsto \lambda(q)u(q)$ $(q \in \mathrm{dom}(u))$. Пусть $(\cdot\,|\,\cdot)$ обозначает внутреннее произведение гильбертова пространства H. Введем Λ-значное внутреннее произведение в $C_\#(Q,H)$ следующим образом. Возьмем непрерывные вектор-функции $u : \mathrm{dom}(u) \to H$ и $v : \mathrm{dom}(v) \to H$. Функция $q \mapsto \langle\, u(q)|v(q)\,\rangle$ $(q \in \mathrm{dom}(u)\cap\mathrm{dom}(v))$ непрерывна и допускает единственное продолжение $z \in C(Q)$ на все Q. Если x и y — классы эквивалентности, содержащие вектор-функции u и v соответственно, то положим $\langle x\,|\,y\rangle := z$. Ясно, что $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ — это Λ-значное внутреннее произведение и $|\!|x|\!| = \sqrt{\langle x\,|\,x\rangle}$ $\big(x \in C_\#(Q,H)\big)$. Пара $(C_\#(Q,H), |\!|\cdot|\!|)$ представляет собой пространство Банаха — Канторовича. По теореме 11.5.2 $C_\#(Q,H)$ — банахово пространство относительно смешанной нормы

$$\|x\| = \||\!|x|\!|\|_\infty = \sqrt{\|(x\,|\,x)\|_\infty} \quad \big(x \in C_\#(Q,H)\big).$$

Следовательно, $C_\#(Q,H)$ — модуль Капланского — Гильберта над Λ.

Предположим, что $\mathscr{E}$ — базис в H. Для данного $e \in \mathscr{E}$ введем вектор-функцию $\bar{e} : q \mapsto e \quad (q \in Q)$ и положим $\overline{\mathscr{E}} := \{\bar{e} : e \in \mathscr{E}\}$. Легко проверить, что $\overline{\mathscr{E}}$ — базис модуля $C_\#(Q,H)$, что и доказывает λ-однородность $C_\#(Q,H)$ при $\lambda = \dim(H)$. $\triangleright$

12.4.2. Нам потребуется еще один вспомогательный факт. Обозначим символом $\mathbb{P}$-lin(A) множество всех линейных комбинаций элементов A с коэффициентами из поля $\mathbb{P}$.

Пусть X — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$ и $\mathbb{P}$ — подполе $\mathbb{F}$. Тогда $X^\wedge$ — векторное пространство над полем $\mathbb{F}^\wedge$ и для любого множества $A \subset X$ верно $(\mathbb{P}\text{-lin}(A))^\wedge = \mathbb{P}^\wedge\text{-lin}(A^\wedge)$.

$\triangleleft$ Первая часть утверждения очевидна, ибо предложение «X — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$» записывается ограниченной формулой. По той же причине $(\mathbb{P}\text{-lin}(A))^\wedge$ — это $\mathbb{P}^\wedge$-линейное подпространство в $X^\wedge$, содержащее $A^\wedge$. Поэтому $\mathbb{P}^\wedge\text{-lin}(A^\wedge) \subset (\mathbb{P}\text{-lin}(A))^\wedge$. Наоборот, пусть элемент $x \in X$ имеет вид $\sum_{k\in n} \alpha(k)\, u(k)$, где $n \in \mathbb{N}$, $\alpha : n \to \mathbb{P}$ и $u : n \to A$. Тогда $\alpha^\wedge : n^\wedge \to \mathbb{P}^\wedge$, $u^\wedge : n^\wedge \to A^\wedge$ и $x^\wedge = \sum_{k\in n^\wedge} \alpha^\wedge(k) u^\wedge(k)$. Следовательно, $x^\wedge \in \mathbb{P}^\wedge\text{-lin}(A^\wedge)$, что показывает справедливость включения $\mathbb{P}\text{-lin}(A))^\wedge \subset \mathbb{P}^\wedge\text{-lin}(A^\wedge)$. $\triangleright$

12.4.3. Теорема. *Пусть H — гильбертово пространство и $\lambda = \dim(H)$. Пусть, далее, $\mathscr{H}$ — пополнение метрического пространства $H^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда $[\![\, \mathscr{H}$ — гильбертово пространство и $\dim(\mathscr{H}) = |\lambda^\wedge| \,]\!] = \mathbb{1}$.*

$\triangleleft$ По определению, $\mathscr{H}$ — банахово пространство. Если $b(\cdot\,,\,\cdot)$ — скалярное произведение в H, то $b^\wedge : H^\wedge \times H^\wedge \to \mathbb{C}^\wedge$ — равномерно непрерывная функция, имеющая единственное непрерывное продолжение на все $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$, которое мы обозначим $(\cdot\,|\,\cdot)$. Тогда $(\cdot\,|\,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathscr{H}$ и, как легко заметить,

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \|x\| = \sqrt{(x\,|\,x)} \quad (x \in \mathscr{H}).$$

Значит, $[\![\, \mathscr{H}$ — гильбертово пространство$]\!] = \mathbb{1}$. Пусть $\mathscr{E}$ — гильбертов базис H. Покажем, что $[\![\, \mathscr{E}^\wedge$ — базис $\mathscr{H} \,]\!] = \mathbb{1}$. Ортонормальность $\mathscr{E}^\wedge$ вытекает из определения скалярного произведения в $\mathscr{H}$, что видно из следующих вычислений:

$$[\![\, (\forall\, x \in \mathscr{E}^\wedge)\ (x\,|\,x) = 1 \,]\!] = \bigwedge_{x\in\mathscr{E}} [\![\, (x^\wedge\,|\,x^\wedge) = 1 \,]\!] = \bigwedge_{x\in\mathscr{E}} [\![\, b(x,x)^\wedge = \mathbb{1}^\wedge \,]\!] = \mathbb{1};$$

$$[\![\, (\forall\, x, y \in \mathscr{E}^\wedge)\ (x \neq y \to (x\,|\,y) = 0) \,]\!] = \bigwedge_{x,y\in\mathscr{E}} [\![\, x^\wedge \neq y^\wedge \,]\!] \Rightarrow [\![\, (x^\wedge\,|\,y^\wedge) = 0 \,]\!] =$$

$$= \bigwedge_{\substack{x,y\in\mathscr{E}\\ x\neq y}} [\![\, b^\wedge(x^\wedge, y^\wedge) = 0 \,]\!] = \bigwedge_{\substack{x,y\in\mathscr{E}\\ x\neq y}} [\![\, b(x,y)^\wedge = 0^\wedge \,]\!] = \mathbb{1}.$$

Так как $H^\wedge$ плотно в $\mathscr{H}$ и $\mathbb{C}^\wedge\text{-lin}(\mathscr{E}^\wedge) \subset \mathscr{C}\text{-lin}(\mathscr{E}^\wedge)$, то нужно лишь установить, что $\mathbb{C}^\wedge\text{-lin}(\mathscr{E}^\wedge)$ плотно в $H^\wedge$. Возьмем $x \in H$ и $\varepsilon > 0$. Поскольку $\mathscr{E}$ — базис H, найдется $x_\varepsilon \in \mathbb{C}\text{-lin}(\mathscr{E})$, для которого $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$. Отсюда вытекает, что $[\![\, \|x^\wedge - x_\varepsilon{}^\wedge\| < \varepsilon^\wedge \,]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\, x_\varepsilon^\wedge \in (\mathscr{C}\text{-lin}(\mathscr{E}))^\wedge \,]\!] = \mathbb{1}$. Привлекая 12.4.2, видим, что внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ верна формула

$$(\forall\, x \in H)\, (\forall\, 0 < \varepsilon \in \mathbb{R}^\wedge)\, (\exists\, x_\varepsilon \in \mathbb{C}^\wedge\text{-}\operatorname{lin}(\mathscr{E}^\wedge)\, (\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon),$$

т. е. $[\![\, \mathbb{C}^\wedge\text{-lin}(\mathscr{E}^\wedge)$ плотно в $H^\wedge \,]\!] = \mathbb{1}$. Осталось заметить, что если φ — биекция между множеством $\mathscr{E}$ и кардиналом λ, то $\varphi^\wedge$ — биекция между множествами $\mathscr{E}^\wedge$ и $\lambda^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. $\triangleright$

Отметим несколько следствий.

12.4.4. (1) *В предположениях теоремы* 12.4.3 *ограниченный спуск гильбертова пространства* $\mathscr{H}$ *внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ *унитарно эквивалентен модулю Капланского — Гильберта* $C_{\#}(Q, H)$, *где* Q *— стоунов компакт булевой алгебры* B.

◁ Это вытекает из 12.4.1 и 11.3.8. ▷

(2) *Пусть* M *— непустое множество. Ограниченный спуск гильбертова пространства* $l_2(M^{\wedge})$ *внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ *унитарно эквивалентен модулю Капланского — Гильберта* $C_{\#}(Q, l_2(M))$, *где* Q *— стоунов компакт булевой алгебры* B.

◁ В теореме 12.4.3 положим $H = l_2(M)$ и вспомним формулу $[\![\, \dim(\mathscr{H}) = |M^{\wedge}| \,]\!] = \mathbb{1}$. Теперь видно, что $[\![\, \mathscr{H}$ и $l_2(M^{\wedge})$ унитарно эквивалентны $]\!] = \mathbb{1}$. Переход к ограниченным спускам завершает доказательство. ▷

(3) *Пусть* $\lambda = \dim(H)$ *— бесконечный кардинал. Модуль Капланского — Гильберта* $C_{\#}(Q, H)$ *строго* λ*-однороден в том и только в том случае, если компакт* Q *является* λ*-стабильным.*

◁ Нужно лишь применить 12.3.3, 12.3.8 и 12.4.3. ▷

12.4.5. (1) *Для любых бесконечномерных гильбертовых пространств* H_1 *и* H_2 *существует экстремальный компакт* Q *такой, что модули Капланского — Гильберта* $C_{\#}(Q,\ H_1)$ *и* $C_{\#}(Q, H_2)$ *унитарно эквивалентны.*

◁ Положим $\lambda_k := \dim(H_k)$ $(k := 1, 2)$. Существует полная булева алгебра B, для которой ординалы $\lambda_1^{\wedge}$ и $\lambda_2^{\wedge}$ имеют одну и ту же мощность внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. (см. 9.3.6). Теперь требуемое вытекает из 12.4.3 и 12.4.4 (1). ▷

(2) *Пусть* H_k *— гильбертово пространство и* $\lambda_k := \dim(H_k) \geqslant \omega$ *при* $k := 1, 2$. *Предположим, что модули Капланского — Гильберта* $C_{\#}(Q,\ H_k)$ *строго* λ_k*-однородны. Если модули* $C_{\#}(Q, H_1)$ *и* $C_{\#}(Q, H_2)$ *унитарно эквивалентны, то гильбертовы пространства* H_1 *и* H_2 *также унитарно эквивалентны.*

◁ Из 12.3.3, 12.4.3 и 12.4.4 (1) видно, что $[\![\, \lambda_1^{\wedge} = |\lambda_1^{\wedge}| = |\lambda_2^{\wedge}| = \lambda_2^{\wedge} \,]\!] = \mathbb{1}$. Поэтому $\lambda_1 = \lambda_2$. ▷

Модуль Капланского — Гильберта X называют *B-сепарабельным,* если существует последовательность $(x_n) \subset X$ такая, что модуль Капланского — Гильберта, порожденный множеством $\{bx_n : n \in \mathbb{N},\ b \in B\}$, совпадает с X. Очевидно, что если H — сепарабельное гильбертово пространство, то модуль Капланского — Гильберта $C_{\#}(Q, H)$ будет B-сепарабельным.

(3) *Для каждого бесконечномерного гильбертова пространства* H *существует экстремальный компакт* Q, *для которого модуль Капланского — Гильберта* $C_{\#}(Q, H)$ *будет* B*-сепарабельным, где* B *— булева алгебра характеристических функций открыто-замкнутых подмножеств* Q.

◁ Положим в (1) $H_1 := l_2(\omega)$ и $H_2 := H$ и применим сепарабельность $l_2(\omega)$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. ▷

12.4.6. Теорема. *Для любого модуля Капланского — Гильберта* X *существует семейство непустых экстремальных компактов* $(Q_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *такое, что* Γ *— множество кардиналов,* Q_γ γ*-стабилен при всех* $\gamma \in \Gamma$ *и имеет место унитарная эквивалентность*

$$X \simeq \sum_{\gamma\in\Gamma}^{\oplus} C_{\#}\big(Q_\gamma, l_2(\gamma)\big).$$

Если некоторое семейство экстремальных компактов $(P_\delta)_{\delta\in\Delta}$ *удовлетворяет указанным условиям, то* $\Gamma = \Delta$ *и* P_γ *гомеоморфен* Q_γ *для каждого* $\gamma \in \Gamma$.

◁ В силу теоремы 11.6.10 можно предположить, что X является ограниченным спуском гильбертова пространства $\mathscr{X}$ из $\mathbb{V}^{(B)}$. Пусть $B\text{-}\dim(X) = (b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ и Q_γ — открыто-замкнутое множество стоунова компакта булевой алгебры B, соответствующее $b_\gamma \in B$ при стоуновом представлении. Используем тот факт, что X представляется в виде прямой суммы модулей вида $b_\gamma X$, где $b_\gamma X$ унитарно эквивалентен ограниченному спуску гильбертова пространства $b_\gamma \mathscr{X}$ из $\mathbb{V}^{(B_\gamma)}$, $B_\gamma = [\mathbb{0}, b_\gamma]$. Согласно 12.3.8 выполняется $b_\gamma \leqslant [\![\dim(b_\gamma \mathscr{X}) = \gamma^\wedge]\!]$. Следовательно, для ненулевого b_γ имеет место соотношение $\mathbb{V}^{(B_\gamma)} \models$«$b_\gamma \mathscr{X}$ — гильбертово пространство размерности $\gamma^\wedge$». Привлекая принцип переноса, выводим: $\mathbb{V}^{(B_\gamma)} \models$ «$b_\gamma \mathscr{X}$ унитарно эквивалентен $l_2(\gamma^\wedge)$». В соответствии с 12.4.4 (2) ограниченный спуск гильбертова пространства $l_2(\gamma^\wedge)$ внутри $\mathbb{V}^{(B_\gamma)}$ унитарно эквивалентен модулю Капланского — Гильберта $C_\#(Q_\gamma, l_2(\gamma))$. Пусть $u_\gamma \in \mathbb{V}^{(B_\gamma)}$ — унитарный изоморфизм из $b_\gamma \mathscr{X}$ на $l_2(\gamma^\wedge)$ внутри $\mathbb{V}^{(B_\gamma)}$ и U_γ — ограниченный спуск u_γ. Тогда U_γ устанавливает унитарную эквивалентность между модулями Капланского — Гильберта $b_\gamma X$ и $C_\#(Q_\gamma, l_2(\gamma))$. По определению элемент $b_\gamma \in B$, а с ним и компакт Q_γ γ-стабильны, как видно из 12.3.8.

Предположим теперь, что некоторое семейство экстремальных компактов $(P_\delta)_{\delta\in\Delta}$ удовлетворяет тем же условиям, что и $(Q_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. Тогда P_δ гомеоморфен некоторому открыто-замкнутому множеству P'_δ стоунова компакта B. Более того, P'_δ является δ-стабильным. Если $P_{\delta\gamma} := P'_\delta \cap Q_\gamma$ и $b_{\gamma\delta}$ — соответствующий $P_{\delta\gamma}$ элемент B, то модули Капланского — Гильберта $C_\#(P_{\delta\gamma}, l_2(\delta))$ и $C_\#(P_{\delta\gamma}, l_2(\gamma))$ унитарно эквивалентны одной и той же компоненте $b_{\delta\gamma}X$. Кроме того, экстремальный компакт $P_{\delta\gamma}$ должен быть δ- и γ-стабилен одновременно. Привлекая 12.4.4 (3) и 12.4.5 (2) видим, что либо $P_{\delta\gamma} = \varnothing$, либо $l_2(\delta) \sim l_2(\gamma)$. Так как последнее возможно лишь при $\delta = \gamma$, то должно быть $P'_\gamma = Q_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$. $\triangleright$

12.5. Функциональное представление AW^*-алгебр типа I

С помощью результатов предыдущего параграфа, сейчас мы получим функциональную реализацию AW^*-алгебр типа I. Отметим, что всюду в этом параграфе A — произвольная AW^*-алгебра типа I, через Λ обозначен центр A, а через B — полная булева алгебра центральных проекторов в A, так что $B \subset \Lambda \subset A$.

12.5.1. Пусть B_h — множество таких $b \in B$, что bA — однородная алгебра. Взяв $b \in B_h$, обозначим символом $\varkappa(b)$ наименьший кардинал λ, для которого bA — это λ-однородная AW^*-алгебра. Для произвольного $b \in B$ положим $\varkappa(b) := \sup\{\varkappa(b') : b' \leqslant b,\ b' \in B_h\}$. Тем самым определена функция $\varkappa$ на B, принимающая свои значения из некоторого множества кардиналов. Назовем $\varkappa$ *функцией кратности* алгебры A. Элемент $b \in B$, а также алгебру bA называют *строго λ-однородными,* если $\varkappa(b') = \lambda$ при $0 \neq b' \leqslant b$. Говорят также, что b и bA имеют *строгую кратность* λ. Существует единственное отображение $\overline{\varkappa} : \Gamma \to B$ такое, что Γ — некоторое множество кардинальных чисел, не превосходящих $\varkappa(\mathbb{1})$, семейство $(\overline{\varkappa}(\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ — разбиение единицы в B и элемент $\overline{\varkappa}(\gamma)$ имеет строгую кратность γ при всех $\gamma \in \Gamma$. Разбиение единицы $(\overline{\varkappa}(\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ называют *строгим декомпозиционным рядом* AW^*-алгебры A. Нетрудно заметить, что если $A = \mathscr{L}_\Lambda(X)$ (см. 11.6.10) для модуля Капланского — Гильберта X, то строгий декомпозиционный ряд алгебры A совпадает с B-$\dim(X)$, а $\varkappa$ совпадает с функцией кратности, введенной в 12.3.1. Функции кратности $\varkappa$ и $\varkappa'$ на булевых алгебрах B и B', а также соответствующие им разбиения единицы $\overline{\varkappa}$ и $\overline{\varkappa'}$ именуют *конгруэнтными*, если существует изоморфизм π из B на B' такой, что $\varkappa' \circ \pi = \varkappa$. Как видно, конгруэнтность $\overline{\varkappa}$ и $\overline{\varkappa'}$ означает, что эти функции определены на одном и том же множестве, причем $\pi \circ \overline{\varkappa} = \overline{\varkappa'}$.

12.5.2. Теорема. *Пусть X — модуль Капланского — Гильберта над алгеброй Стоуна Λ. Если X λ-однороден, то AW^*-алгебра $\mathscr{L}_\Lambda(X)$ непрерывных Λ-линейных операторов в X также будет λ-однородной.*

$\lhd$ Мы уже убедились в 12.2.9, что $\mathscr{L}_\Lambda(X)$ представляет собой AW^*-алгебру типа I. Предположим, что модуль X однороден и имеет базис $\mathscr{E}$ мощности $|\mathscr{E}| = \lambda$. Взяв произвольные $e, d \in \mathscr{E}$, определим операторы π_e и π_{ed} формулами

$$\pi_e x := \langle x \,|\, e\rangle e, \quad \pi_{ed} x := \langle x \,|\, e\rangle d \quad (x \in X).$$

Покажем, что π_e — абелев проектор. В самом деле, имеют место соотношения

$$\langle \pi_e x \mid y\rangle = \langle x \mid e\rangle\langle e \mid y\rangle = \langle x, \pi_e y\rangle,$$
$$\pi_e^2 x = \langle x \mid e\rangle\langle e \mid e\rangle e = \langle x \mid e\rangle e = \pi_e x,$$

первое из которых означает эрмитовость оператора π_e, а второе — его идемпотентность. Более того, $\pi_e \circ \pi_d = 0$ при $e \neq d$. Если ненулевой проектор $\pi \in \mathscr{L}_\Lambda(X)$ ортогонален ко всем π_e, $e \in \mathscr{E}$, то существует ненулевой элемент $x \in X$ такой, что $\pi x = x$, в то время как $0 = \pi_e x = \langle x \,|\, e\rangle e$ и $\langle x \,|\, e\rangle = 0$ для всех $e \in \mathscr{E}$. Это противоречие доказывает, что $\sup_{e \in \mathscr{E}} \pi_e = I_X$. Так как $\pi_{ed} \circ \pi_{de} = \pi_e$, то π_e и π_d эквивалентны. Это и доказывает λ-однородность $\mathscr{A}$. $\rhd$

12.5.3. Рассмотрим теперь экстремально несвязный компакт Q и гильбертово пространство H. Как обычно, пусть $\mathscr{L}(H)$ — пространство всех ограниченных линейных эндоморфизмов H.

Обозначим символом $\mathfrak{C}(Q, \mathscr{L}(H))$ множество всех оператор-функций $u : \operatorname{dom}(u) \to \mathscr{L}(H)$, определенных на котощих множествах $\operatorname{dom}(u) \subset Q$ и непрерывных в сильной операторной топологии.

Если $u \in \mathfrak{C}(Q, \mathscr{L}(H))$ и $h \in H$, то вектор-функция $uh : q \mapsto u(q)h$ $(q \in \operatorname{dom}(u))$ непрерывна и, значит, определяет единственный элемент $\widetilde{uh} \in C_\infty(Q, H)$, для которого $uh \in \widetilde{uh}$ (ср. 11.2.10). Введем отношение эквивалентности в $\mathfrak{C}(Q, \mathscr{L}(H))$ полагая $u \sim v$ в том и только в том случае, когда u и v совпадают на $\operatorname{dom}(u) \cap \operatorname{dom}(v)$. Если $\tilde{u}$ — класс эквивалентности оператор-функции $u : \operatorname{dom}(u) \to \mathscr{L}(H)$, то по определению $\tilde{u}h := \widetilde{uh}$ $(h \in H)$.

Обозначим символом $SC_\infty(Q, \mathscr{L}(H))$ множество всех классов эквивалентности $\tilde{u}$ таких, что $u \in \mathfrak{C}(Q, \mathscr{L}(H))$ и множество $\{|\tilde{u}h| : \|h\| \leqslant 1\}$ порядково ограничено в $C_\infty(Q)$.

Так как $|\tilde{u}h|$ совпадает с функцией $q \mapsto \|u(q)h\|$ $(q \in \operatorname{dom}(u))$ на некотором котощем множестве, то соотношение $\tilde{u} \in SC_\infty(Q, \mathscr{L}(H))$ означает, что функция $q \mapsto \|u(q)\|$ $(q \in \operatorname{dom}(u))$ непрерывна на некотором котощем множестве. Значит, существуют элемент $|\tilde{u}| \in C_\infty(Q)$ и котощее множество $Q_0 \subset Q$ такие, что $|\tilde{u}|(q) = \|u(q)\|$ $(q \in Q_0)$. Более того, $|\tilde{u}| = \sup\{|\tilde{u}h| : \|h\| \leqslant 1\}$, где супремум вычислен в $C_\infty(Q)$. Множество $SC_\infty(Q, \mathscr{L}(H))$ естественным образом оснащено структурой $*$-алгебры и унитарного $C_\infty(Q)$-модуля в соответствии со следующими формулами:

$$(u + v)(q) := u(q) + v(q) \quad (q \in \operatorname{dom}(u) \cap \operatorname{dom}(v)),$$
$$(uv)(q) := u(q) \circ v(q) \quad (q \in \operatorname{dom}(u) \cap \operatorname{dom}(v)),$$

$$(av)(q) := a(q)v(q) \quad (q \in \mathrm{dom}(a) \cap \mathrm{dom}(v)),$$
$$u^*(q) := u(q)^* \quad (q \in \mathrm{dom}(u)),$$

где $u, v \in \mathfrak{C}(Q, \mathscr{L}(H))$ и $a \in C_\infty(Q)$. Заметим теперь, что справедливы следующие соотношения:

$$|\tilde{u} + \tilde{v}| \leqslant |\tilde{u}| + |\tilde{v}|, \quad |\tilde{u}\tilde{v}| \leqslant |\tilde{u}| \cdot |\tilde{v}|,$$
$$|a\tilde{v}| = |a||\tilde{v}|, \quad |\tilde{u} \cdot \tilde{u}^*| = |\tilde{u}|^2.$$

Если $\tilde{u} \in SC_\infty(Q, \mathscr{L}(H))$ и элемент $\tilde{x} \in C_\infty(Q, H)$ задан непрерывной вектор-функцией $x : \mathrm{dom}(x) \to H$, то можно положить $\tilde{u}\tilde{x} := \widetilde{ux} \in C_\infty(Q, H)$, где $ux : q \mapsto u(q)x(q)$ ($q \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(x)$). Такое определение корректно, так как вектор-функция ux непрерывна. При этом имеет место неравенство

$$|\tilde{u}x| \leqslant |\tilde{u}| \cdot |x| \quad (x \in C_\infty(Q, H)).$$

Отсюда, в частности, вытекает формула для вычисления нормы

$$|\tilde{u}| = \sup \big\{ |\tilde{u}x| : x \in C_\infty(Q, H),\ |x| \leqslant \mathbb{1} \big\}.$$

Оператор $x \mapsto \tilde{u}x$, действующий в $C_\infty(Q, H)$, будет обозначен символом $S_{\tilde{u}}$. Введем теперь нормированную $*$-алгебру $SC_\#(Q, \mathscr{L}(H))$ формулами

$$SC_\#(Q, \mathscr{L}(H)) := \big\{ v \in SC_\infty(Q, \mathscr{L}(H)) : |v| \in C(Q) \big\},$$
$$\|v\| = \||v|\|_\infty \quad (v \in SC_\#(Q, \mathscr{L}(H))).$$

Положим $\Lambda := C(Q, \mathbb{C})$. Напомним, что $C_\#(Q, H)$ — это λ-однородный модуль Капланского — Гильберта над Λ, где $\lambda := \dim(H)$ (см. 12.4.1). Согласно 12.2.9 $\mathscr{L}_\Lambda(C_\#(Q, H))$ является λ-однородной AW^*-алгеброй типа I, центр которой изоморфен Λ. Следующий результат утверждает,что алгебра $\mathscr{L}_\Lambda(C_\#(Q, H))$ допускает представление в виде алгебры мажорируемых операторов, действующих в модуле $C_\#(Q, H)$. Ограничение оператора $S_{\tilde{u}}$ на $C_\#(Q, H)$ мы будем обозначать тем же самым символом $S_{\tilde{u}}$.

12.5.4. Теорема. *Пусть H — гильбертово пространство и $\lambda = \dim(H)$. Для каждого оператора $U \in \mathscr{L}_\Lambda(C_\#(Q, H))$ существует единственный элемент $u \in SC_\#(Q, \mathscr{L}(H))$ такой, что $U = S_u$. Отображение $U \mapsto u$ осуществляет $*$-B-изоморфизм $\mathscr{L}_\Lambda(C_\#(Q, H))$ на $A := SC_\#(Q, \mathscr{L}(H))$. В частности, A — это λ-однородная AW^*-алгебра. Если же компакт Q является λ-стабильным, то A — строго λ-однородная AW^*-алгебра.*

$\triangleleft$ Прежде всего отметим еще раз, что оператор S_u удовлетворяет неравенству $|S_u x| \leqslant |u| \cdot |x|$ для всех $x \in C_\#(Q, H)$ (см. 12.5.3). Следовательно, для произвольного $u \in SC_\#(Q, \mathscr{L}(H))$ оператор S_u действует из $C_\#(Q, H)$ в $C_\#(Q, H)$ и является ограниченным в смысле векторной нормы (см. 11.1.11 (2)). Более того,

$$\|S_u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \||S_u x|\|_\infty = \sup_{|x| \leqslant 1} \sup_{q \in Q} |ux|(q) = \sup_{q \in Q} |u|(q) = \|u\|.$$

Непосредственно из определения оператора S_u видно, что $S_{au} = aS_u$ и $S_{u^*} = {S_u}^*$ для любых $a \in \Lambda$ и $u \in SC_\#(Q, \mathscr{L}(H))$. Таким образом, отображение $u \mapsto S_u$ является $*$-B-изоморфным вложением $SC_\#(Q, \mathscr{L}(H))$ в $\mathscr{L}_\Lambda(C_\#(Q, H))$. Докажем сюръективность этого вложения. Оператор $U \in \mathscr{L}_\Lambda(C_\#(Q, H))$ ограничен в смысле 11.1.11 (2), т. е. имеет место неравенство $|Ux| \leqslant f \cdot |x|$ для всех $x \in C_\#(Q, H)$, где $f := \sup\{\lvert Ux\rvert : \lvert x\rvert \leqslant \mathbb{1}\} \in C(Q)$. По теореме 11.2.11 существует оператор-функция $u : \mathrm{dom}(u) \to \mathscr{L}(H)$, удовлетворяющая следующим условиям: (1) функция $q \mapsto \langle u(q)h|g\rangle$ $(q \in \mathrm{dom}(u))$ непрерывна для любых $g, h \in H$; (2) существует функция $\varphi \in C_\infty(Q)$, для которой $\|u(q)\| \leqslant \varphi(q)$ $(q \in \mathrm{dom}(u))$; (3) $Ux = \tilde{u}x$ для всех $x \in C_\#(Q, H)$ и $\lvert u\rvert = f$. Итак, $U = S_{\tilde{u}}$ и нам осталось показать, что u непрерывна в сильной операторной топологии. Принимая во внимание вид точных границ в K-пространстве $C_\infty(Q)$ (см. 10.5.6 (3)), можно заметить, что $\|u(q)\| = \lvert u\rvert(q)$ $(q \in Q_0)$, где Q_0 — котощее подмножество Q. Поэтому, заменив $\mathrm{dom}(u)$ на $Q_0 \cap \mathrm{dom}(u)$, если это необходимо, мы можем предположить, что функция $q \mapsto \|u(q)\|$ $(q \in \mathrm{dom}(u))$ непрерывна. Вместе с указанным выше условием (1) это влечет непрерывность u в сильной операторной топологии, т. е. $u \in SC_\#(Q, \mathscr{L}(H))$. Доказательство завершают ссылки на 12.2.9 и 12.4.1. $\triangleright$

Будем говорить, что семейства непустых компактов $(Q_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ и $(P_\delta)_{\delta\in\Delta}$ *конгруэнтны*, если $\Gamma = \Delta$, а компакты Q_γ и P_γ гомеоморфны при всех $\gamma \in \Gamma$.

12.5.5. Теорема. *Для произвольной AW^*-алгебры A типа* I *существует единственное с точностью до конгруэнции семейство непустых экстремально несвязных компактов $(Q_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ такое, что выполнены условия:*

(1) Γ — *непустое множество кардиналов и компакт Q_γ является γ-стабильным при каждом $\gamma \in \Gamma$;*

(2) *имеет место $*$-изоморфизм алгебр*

$$A \simeq \sum_{\gamma\in\Gamma}^{\oplus} SC_\#(Q_\gamma, \mathscr{L}(l_2(\gamma))).$$

$\triangleleft$ По теореме 12.2.5 можно считать, что A — это ограниченный спуск AW^*-фактора $\mathscr{A}$ из $\mathbb{V}^{(B)}$. При этом $\mathscr{A}$ имеет тип I, а значит, $\mathscr{A} \simeq \mathscr{L}(\mathscr{X})$, где $\mathscr{X}$ — гильбертово пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Отсюда видно, что A и $\mathscr{L}_\Lambda(X)$, где X — ограниченный спуск $\mathscr{X}$, являются $*$-B-изоморфными алгебрами.

Пусть $B\text{-}\dim(X) = (b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, а Q_γ — открыто-замкнутое множество стоунова компакта алгебры B, соответствующее элементу $b_\gamma \in B$. В силу 12.3.8 компакт Q_γ будет γ-стабильным. Тем самым выполнено (1).

В силу теоремы 12.4.6 существует унитарная эквивалентность $X \simeq \sum_{\gamma\in\Gamma}^{\oplus} C_\#(Q_\gamma, l_2(\gamma))$. Но тогда имеет место $*$-изоморфизм AW^*-алгебр

$$\mathscr{L}_\Lambda(X) \simeq \sum_{\gamma\in\Gamma}^{\oplus} \mathscr{L}_\Lambda(C_\#(Q_\gamma, l_2(\gamma))).$$

Привлекая теорему 12.5.4, приходим к (2). Требуемая единственность вытекает из 12.4.6. $\triangleright$

12.5.6. Отметим еще три следствия из приведенных в этом параграфе результатов.

(1) *Любая AW^*-алгебра типа* I *разлагается в прямую сумму строго однородных компонент. Такое разложение единственно с точностью до $*$-B-изоморфизма.*

$\triangleleft$ См. 12.4.6. $\triangleright$

(2) *Две AW^*-алгебры типа* I *будут $*$-изоморфными в том и только в том случае, если они имеют $*$-изоморфные центры и конгруэнтные функции кратности или, что то же самое, конгруэнтные строго декомпозиционные ряды.*

$\lhd$ Это утверждение вытекает из (1), если заметить, что в представлении из теоремы 12.5.5 размерность A конгруэнтна разбиению единицы $(\chi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, где χ_γ — характеристическая функция множества Q_γ в дизъюнктной сумме Q семейства (Q_γ), а центр A является $*$-изоморфным алгебре $C(Q,\mathbb{C})$. $\rhd$

(3) *Пусть Γ — множество кардиналов и (b_γ) — разбиение единицы в B, состоящее из ненулевых элементов. Тогда $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — строгий декомпозиционный ряд некоторой AW^*-алгебры в том и только в том случае, если b_γ — это γ-стабильный элемент для каждого $\gamma\in\Gamma$.*

$\lhd$ Это следует из 12.3.8 и 12.5.4. $\rhd$

12.6. Вложимые C^*-алгебры

Алгебры типа I имеют наиболее простое строение в классе AW^*-алгебр. Естественный интерес вызывают алгебры, которые могут быть реализованы как бикоммутанты в AW^*-алгебре типа I. Такие алгебры называют *вложимыми.* Как можно усмотреть из результатов 12.2, при погружении в подходящую булевозначную модель эти алгебры превращаются в алгебры фон Неймана. Тем самым возникает возможность трансформировать результаты об алгебрах фон Неймана в утверждения о вложимых алгебрах. В текущем параграфе мы иллюстрируем этот подход несколькими примерами.

12.6.1. Начнем с необходимых определений и фактов.

(1) Пусть, как и раньше, H — гильбертово пространство, а $\mathscr{L}(H)$ — пространство линейных ограниченных эндоморфизмов H. Для множества $M\subset\mathscr{L}(H)$ *коммутант* M' определяют как множество операторов из $\mathscr{L}(H)$, коммутирующих с каждым оператором из M. Ясно, что M' — банахова алгебра операторов, содержащая единицу $\mathbb{1}:=I_H$. *Бикоммутант* M — это множество $M'':=(M')'$.

Алгеброй фон Неймана в H называют $*$-подалгебру A' алгебры $\mathscr{L}(H)$, содержащую единицу и совпадающую со своим бикоммутантом, т. е. $\mathbb{1}\in A$ и $A=A''$.

Центр алгебры фон Неймана A определяют формулой $\mathscr{Z}(A)=A\cap A'$. Алгебру фон Неймана A именуют *фактором,* если ее центр тривиален, т. е. $\mathscr{Z}(A)=\mathbb{C}\cdot\mathbb{1}:=\{x\cdot I_H:\lambda\in\mathbb{C}\}$ (ср. 12.2.5).

(2) Теорема о бикоммутанте. *Пусть A — инволютивная алгебра операторов в гильбертовом пространстве H, причем $I_H\in A$. Тогда A совпадает со своим бикоммутантом A'' в том и только в том случае, если алгебра A замкнута в сильной (или, что равносильно, в слабой) операторной топологии пространства $\mathscr{L}(H)$.*

(3) C^*-алгебру A принято называть *B-вложимой*, если существуют AW^*-алгебра N типа I и $*$-мономорфизм $\imath:A\to N$ такие, что $B=\mathfrak{P}_c(N)$ и $\imath(A)=\imath(A)''$, где $\imath(A)''$ — бикоммутант $\imath(A)$ в N. Заметим, что в этом случае A будет AW^*-алгеброй и B лежит в $\mathfrak{P}_c(A)$ в качестве правильной подалгебры. В частности, A это B-циклическая алгебра (см. 12.2.3).

Говорят, что C^*-алгебра A *вложима*, если она B-вложима для некоторой правильной подалгебры $B\subset\mathfrak{P}_c(A)$. Если $B=\mathfrak{P}_c(A)$ и A является B-вложимой, то A называют *централъно вложимой алгеброй.*

Напомним, что мы всегда предполагаем наличие единицы в C^*-алгебре. Кроме того, запись $B\sqsubset A$ по-прежнему означает B-цикличность алгебры A.

12.6.2. Теорема. *Пусть $\mathscr{A}$ — это C^*-алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и A — ограниченный спуск $\mathscr{A}$. Тогда A будет B-вложимой AW^*-алгеброй в том и только в том случае, если $\mathscr{A}$ — алгебра фон Неймана внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Алгебра A центрально вложима в том и только в том случае, если $\mathscr{A}$ — фактор фон Неймана внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.*

$\triangleleft$ Допустим, что A — бикоммутант в AW^*-алгебре N типа I, причем $\mathfrak{P}_c(N) = B$. Учитывая 12.2.5 и 12.2.8, можно считать, что N — ограниченный спуск некоторого AW^*-фактора $\mathscr{N}$ типа I внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Из соотношений $A'' \subset N$ и $A'' = A$ непосредственно видно, что $[\![\mathscr{A} = A{\uparrow} \subset N]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\mathscr{A}'' = (A{\uparrow})'' = A''{\uparrow} = \mathscr{A}]\!] = \mathbb{1}$. Значит, $\mathscr{A}$ — бикоммутант в $\mathscr{N}$ и нам осталось заметить, что AW^*-фактор $\mathscr{N}$ типа I изоморфен алгебре $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathscr{H}$.

Наоборот, пусть $[\![\mathscr{A}$ — алгебра фон Неймана $]\!] = \mathbb{1}$. Это означает, что $[\![\mathscr{A}$ — бикоммутант в $\mathscr{L}(\mathscr{H})]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого гильбертова пространства $\mathscr{H}$ в модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Пусть N — ограниченный спуск $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Тогда N — это AW^*-алгебра типа I в силу 12.2.8 (2), а A — бикоммутант в N и $\mathfrak{P}_c(N) = B$ (см. 12.2.5). Вторая часть требуемого утверждения следует из теоремы 12.2.5, согласно которой $\mathscr{A}$ будет фактором фон Неймана внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{P}_c(A) = B$. $\triangleright$

12.6.3. Охарактеризуем вложимые C^*-алгебры. Напомним, что для нормированного B-пространства X символ $X^{\#}$ обозначает B-сопряженное пространство (см. 11.5.9). Будем говорить, что C^*-алгебра A является B-сопряженной, если A содержит булеву алгебру B центральных проекторов и B-изометрична B-сопряженному пространству $X^{\#}$ к некоторому нормированному B-пространству X. Пространство X при этом называют *B-предсопряженным* к A и пишут $A_{\#} = X$.

Теорема Сакаи. *C^*-алгебра $\mathscr{A}$ является алгеброй фон Неймана (с точностью до $*$-изоморфизма) в том и только в том случае, если $\mathscr{A}$ представляет собой сопряженное банахово пространство.*

12.6.4. Теорема. *C^*-алгебра B-вложима в том и только в том случае, если она B-сопряжена. В классе B-циклических банаховых пространств B-предсопряженное пространство единственно с точностью до B-изометрии.*

$\triangleleft$ Пусть A — это C^*-алгебра и $B \sqsubset \mathfrak{P}_c(A)$. В силу 12.1.6 можно предположить, что A совпадает с ограниченным спуском C^*-алгебры $\mathscr{A}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Применяя теорему Сакаи и принципа переноса, получим $[\![\mathscr{A}$ — алгебра фон Неймана $]\!] =$ $[\![$ алгебра $\mathscr{A}$ линейно изометрична сопряженному банахову пространству $\mathscr{X}']\!]$. Если X — ограниченный спуск банахова пространства $\mathscr{X}$, то пространство $X^{\#}$ является B-линейно изометричным ограниченному спуску пространства $\mathscr{X}'$ (см. 11.5.11). Теперь из теоремы 12.6.2 видно, что если A является B-вложимой, то A также и B-сопряжена, причем $A_{\#} = X$ — это B-циклическое пространство.

Наоборот, пусть A является B-сопряженной и $A_{\#} = X_0$ — нормированное B-пространство. Если X — это B-циклическое расширение X_0, то $X_0^{\#} = X^{\#}$, т. е. $A_{\#} = X$. Обозначим через $\mathscr{X}$ булевозначную реализацию пространства X. Тогда $\mathscr{A} \simeq \mathscr{X}^{\#}$. По теореме 12.6.2 алгебра A будет B-вложимой.

Предположим теперь, что B-циклические пространства X и Y являются B-предсопряженными к A. В модели $\mathbb{V}^{(B)}$ через $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ мы обозначим реализации пространств X и Y. Тогда $[\![\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ предсопряженные пространства к $\mathscr{A}]\!] = \mathbb{1}$. Так как алгебра фон Неймана имеет единственное с точностью до линейной изометрии предсопряженное пространство, то $[\![\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ линейно изометричны$]\!] = \mathbb{1}$. Так как X и Y совпадают с ограниченными спусками $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ соответственно, то X и Y являются B-изометричными пространствами. $\triangleright$

12.6.5. Теорема. *Пусть N — некоторая AW^*-алгебра типа* I *и A является AW^*-подалгеброй в N, содержащей центр $\mathscr{Z}(N)$. Тогда алгебра A и ее коммутант A' в N имеют один и тот же тип* I, II *или* III.

$\lhd$ Согласно 12.2.5 и 12.2.8 можно считать, что N и A — ограниченные спуски $\mathscr{N}$ и $\mathscr{A}$ соответственно из модели $\mathbb{V}^{(B)}$, где $B = \mathfrak{P}_c(N)$, $[\![\mathscr{N} = \mathscr{L}(\mathscr{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathscr{H}]\!] = \mathbb{1}$, $[\![\mathscr{A}$ — это AW^*-подалгебра $\mathscr{N}]\!] = \mathbb{1}$. Таким образом, $\mathscr{A}$ — алгебра фон Неймана внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Но для алгебр фон Неймана требуемое утверждение справедливо (см. [364]), т. е. алгебры $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}'$ имеют один и тот же тип I, II или III. В то же время алгебра A' совпадает с ограниченным спуском $\mathscr{A}'$, ибо $\mathscr{A}'{\downarrow} = (\mathscr{A}{\downarrow})^{\circ}$, где $(\cdot)^{\circ}$ — коммутант в алгебре $\mathscr{N}{\downarrow}$. Осталось привлечь еще раз теорему 12.2.8. $\rhd$

12.6.6. Теорема. *Пусть C^*-алгебра A является B_0-вложимой для некоторой правильной подалгебры $B_0 \subset \mathfrak{P}_c(A)$. Тогда A будет B-вложимой для любой правильной подалгебры $B_0 \subset B \subset \mathfrak{P}_c(A)$.*

$\lhd$ Предположим, что A служит бикоммутантом в AW^*-алгебре N типа I и $\mathfrak{P}_c(N) = B_0$. Пусть B — правильная подалгебра булевой алгебры $\mathfrak{P}_c(A)$, причем $B_0 \subset B$. Символом $\mathscr{C}(B)$ мы обозначим C^*-алгебру, порожденную множеством B. Так как B — правильная подалгебра, то $\mathscr{C}(B)$ будет AW^*-подалгеброй в N (см. 12.2.1 (1, 2)). Кроме того, $\mathscr{C}(B)$ содержит центр N, так как $B_0 = \mathfrak{P}_c(N)$. По теореме 12.6.5 коммутант $\mathscr{C}(B)' = B'$ алгебры $\mathscr{C}(B)$ в N имеет тот же тип, что и алгебра $\mathscr{C}(B)$. Но $\mathscr{C}(B)$ — коммутативная AW^*-алгебра и, значит, $\mathscr{C}(B)'$ — алгебра типа I. Из-за коммутативности $\mathscr{C}(B)$ центр $\mathscr{C}(B)'$ совпадает с $\mathscr{C}(B)$. Поскольку $\mathscr{C}(B)$ лежит в центре алгебры A, то коммутант A', вычисленный в N, лежит в $\mathscr{C}(B)'$. Следовательно, бикоммутант алгебры A в $\mathscr{C}(B)'$ совпадает с бикоммутантом той же алгебры в N, т. е. A — бикоммутант в $\mathscr{C}(B)$. Значит, A — это B-вложимая алгебра. $\rhd$

12.6.7. В качестве следствий отметим следующие два утверждения.

(1) *C^*-алгебра вложима в том и только в том случае, если она центрально вложима.*

(2) *Алгебра фон Неймана A является B-вложимой для любой правильной подалгебры $B \subset \mathfrak{P}_c(A)$.*

12.6.8. Пусть A — это C^*-алгебра и $B \sqsubset A$. Линейный оператор $T : A \to B(\mathbb{C})$ называют *положительным*, если $T(x^*x) \geqslant 0$ для всех $x \in A$. Положительный B-линейный оператор T называют *состоянием*, если $\|T\| = 1$. Состояние T называют *нормальным*, если $T(\sup(x_\alpha)) = \sup(T(x_\alpha))$ для любой возрастающей сети (x_α) эрмитовых элементов, имеющей супремум. Говорят, что A имеет *разделяющее множество $B(\mathbb{C})$-значных нормальных состояний*, если положительность элемента $x \in A$ равносильна тому, что $Tx \geqslant 0$ для каждого нормального $B(\mathbb{C})$-значного состояния T. Если вместо $B(\mathbb{C})$ взять $\mathbb{C}$, то говорят просто о нормальных состояниях.

Монотонная полнота C^*-алгебры A означает, что любая ограниченная сверху монотонно возрастающая сеть эрмитовых элементов в A имеет точную верхнюю границу. Легко проверить, что монотонная полнота A равносильна монотонной полноте ее булевозначной реализации.

Теорема Кэйдисона. *Произвольная C^*-алгебра изоморфна алгебре фон Неймана в том и только в том случае, если она монотонно полна и допускает разделяющее множество нормальных состояний.*

12.6.9. Теорема. *Пусть $\mathscr{A}$ — некоторая C^*-алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и A — ее ограниченный спуск. Для любого $B(\mathbb{C})$-значного состояния Φ на A верно $[\![\phi := \Phi\uparrow$ — состояние на $\mathscr{A}\,]\!] = \mathbb{1}$. Всякое состояние на $\mathscr{A}$ имеет вид $\Phi\uparrow$, где Φ — некоторое $B(\mathbb{C})$-значное состояние на A. Состояние Φ нормально в том и только в том случае, если $[\![\phi := \Phi\uparrow$ — нормальное состояние$]\!] = \mathbb{1}$.*

$\triangleleft$ Первая часть теоремы следует из 11.5.10. Нужно только учесть, что соответствие $\Phi \mapsto \phi := \Phi\uparrow$ сохраняет положительность, ибо $\Phi(A^+)\uparrow = \phi(A^+\uparrow) = \phi(\mathscr{A}^+)$. Утверждение о нормальности легко выводится с помощью правил спуска и подъема поляр (см. 5.3.5 (2), 5.5.7 (6)). $\triangleright$

12.6.10. Теорема. *Для B-циклической C^*-алгебры A равносильны утверждения*:

(1) *A является B-вложимой алгеброй*;

(2) *A монотонно полна и имеет разделяющее множество $B(\mathbb{C})$-значных состояний.*

$\triangleleft$ В соответствии с теоремой 12.1.6 можно считать A ограниченным спуском некоторой C^*-алгебры $\mathscr{A}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. По теореме 12.6.2 A будет B-вложимой тогда и только тогда, когда $[\![\,\mathscr{A}$ — алгебра фон Неймана$\,]\!] = \mathbb{1}$. Воспользуемся теперь теоремой Кэйдисона из 12.6.8. Не углубляясь в детали, разберемся с существованием нормальных состояний. Пусть $\mathscr{S}_n(\mathscr{A})$ — множество всех нормальных состояний алгебры $\mathscr{A}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а $\mathscr{S}_n(A,B)$ — множество всех нормальных $B(\mathbb{C})$-значных состояний на A. Соответствие $\Phi \mapsto \phi := \Phi\uparrow$ служит биекцией между $\mathscr{S}_n(\mathscr{A})\!\downarrow$ и $\mathscr{S}_n(A,B)$ (см. 12.6.9).

Допустим, что $\mathscr{S}_n(A,B)$ — разделяющее множество. Для ненулевого элемента $x \in A$ подберем такое $\Phi_0 \in \mathscr{S}_n(A,B)$, что $\Phi_0 x \neq 0$. Ввиду B-линейности Φ имеем $[\![\,0 \neq x\,]\!] \leqslant [\![\,\Phi_0(x) \neq 0\,]\!]$. Привлекая правила вычисления булевых оценок истинности, можно написать:

$$[\![\,\mathscr{S}_n(\mathscr{A}) \ \text{— разделяющее множество}\,]\!] =$$

$$= [\![\,(\forall\, x \in \mathscr{A})\ (x \neq 0 \to (\exists\, \phi \in \mathscr{S}_n(\mathscr{A}))\ \phi(x) \neq 0)\,]\!] =$$

$$= \bigwedge_{x\in A} [\![\,x \neq 0\,]\!] \Rightarrow \bigvee_{\Phi\in\mathscr{S}_n(A,B)} [\![\,\Phi\uparrow(x) \neq 0\,]\!] \geqslant \bigwedge_{x\in A} [\![\,x \neq 0\,]\!] \Rightarrow [\![\,\Phi_0\uparrow(x) \neq 0\,]\!] = \mathbb{1}.$$

Таким образом, $\mathscr{S}_n(\mathscr{A})$ — разделяющее множество внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Наоборот, пусть выполнено последнее утверждение. Для ненулевого $x \in A$ имеем $b := [\![\,x \neq 0\,]\!] > \mathbb{0}$. По принципу максимума существует $\phi \in \mathscr{S}_n(\mathscr{A})\!\downarrow$ такое, что $b \leqslant [\![\,\phi(x) \neq 0\,]\!]$. Пусть Φ — ограничение на $A \subset \mathscr{A}\!\downarrow$ оператора $\phi\!\downarrow$. Тогда $\Phi \in \mathscr{S}_n(A,B)$ и $b \leqslant [\![\,\Phi(x) \neq 0\,]\!]$. Следовательно, след $e_{\Phi(x)}$ элемента $\Phi(x)$ больше или равен b (см. 10.3.11), а значит, $\Phi(x) \neq 0$. $\triangleright$

12.6.11. Теорема. *Для AW^*-алгебры A равносильны утверждения*:

(1) *A вложима*;

(2) *A центрально вложима*;

(3) *A обладает разделяющим множеством центрозначных нормальных состояний*;

(4) *A является $\mathfrak{P}_c(A)$-сопряженным пространством.*

$\triangleleft$ См. 12.6.4, 12.6.7 (1), 12.6.10. $\triangleright$

12.7. JB-алгебры

В этом параграфе мы рассмотрим вещественные неассоциативные аналоги C^*-алгебр и возможность их булевозначного представления.

12.7.1. Пусть A — векторное пространство над некоторым полем $\mathbb{F}$. Говорят, что A — *йорданова алгебра,* если в A задана, вообще говоря, неассоциативная бинарная операция, называемая *умножением*, $A \times A \ni (x, y) \mapsto xy \in A$ такая, что для любых $x, y, z \in A$ и $\alpha \in \mathbb{F}$ выполнены соотношения

(1) $xy = yx$;

(2) $(x + y)z = xz + yz$;

(3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y$;

(4) $(x^2y)x = x^2(yx)$.

Элемент e йордановой алгебры A называют *единичным* или *единицей алгебры*, если $e \neq 0$, и при этом $ea = a$ для всех $a \in A$.

Йордановы алгебры связаны с ассоциативными алгебрами следующим образом. Пусть A — ассоциативная алгебра над полем характеристики, отличной от 2. Определим на векторном пространстве алгебры A новую операцию умножения $a \circ b := 1/2(ab + ba)$. Обозначим полученную алгебру через A^J. Алгебра A^J является йордановой. Если подпространство $A_\circ$ алгебры A замкнуто относительно операции $a \circ b$, то оно вместо с этой операцией образует подалгебру алгебры A^J и является, следовательно, йордановой алгеброй. Такую йорданову алгебру $A_\circ$ называют *специальной.* Неспециальные йордановы алгебры принято называть *исключительными.*

12.7.2. Рассмотрим примеры, играющие ключевые роли в теории йордановых алгебр.

(1) Возьмем ассоциативную алгебру A с инволюцией $*$. Множество эрмитовых элементов $\{h \in A : h^* = h\}$ замкнуто относительно йорданова умножения $a \circ b = 1/2(ab + ba)$ и поэтому является специальной йордановой алгеброй.

(2) Пусть $\mathbb{O}$ — алгебра *чисел Кэли* (или, как еще говорят, *октав*). $M_n(\mathbb{O})$ — алгебра $n \times n$-матриц с элементами из $\mathbb{O}$. Инволюция $*$ в $M_n(\mathbb{O})$ представляет собой, как обычно, композицию транспонирования матрицы и сопряжения каждого ее элемента. Множество $M_n(\mathbb{O})_{\mathrm{sa}} := \{x \in M_n(\mathbb{O}) : x^* = x\}$ эрмитовых матриц замкнуто в $M_n(\mathbb{O})$ относительно йорданова умножения $x \circ y := 1/2(xy + yx)$. Действительное векторное пространство $M_n(\mathbb{O})_{\mathrm{sa}}$ с операцией $\circ$ является йордановой алгеброй только при $n \leqslant 3$. Йорданова алгебра $M_3(\mathbb{O})_{\mathrm{sa}}$ специальна; ее принято обозначать символом M_3^8.

(3) Пусть X — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$. Предположим, что на X задана симметрическая невырожденная билинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$. На прямой сумме $\mathbb{F} \oplus X$ можно определить умножение формулой

$$(s, x) \circ (t, y) := (st + \langle x, y\rangle, sy + tx) \quad (s, t \in \mathbb{F};\ x, y \in X).$$

Тогда $\mathbb{F} \oplus X$ — специальная йорданова алгебра.

12.7.3. Йорданову алгебру A с единицей $\mathbb{1}$ называют *JB-алгеброй,* если она одновременно является вещественным банаховым пространством, в котором норма удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in A)$;

(2) $\|x^2\| = \|x\|^2 \quad (x \in A)$;

(3) $\|x^2\| \leqslant \|x^2 + y^2\| \quad (x, y \in A)$.

Пересечение всех максимальных ассоциативных подалгебр называют *центром* и обозначают через $\mathscr{Z}(A)$. Элемент a входит в $\mathscr{Z}(A)$ тогда и только тогда, когда $(ax)y = a(xy)$ для произвольных $x, y \in A$. Если $\mathscr{Z}(A) = \mathbb{R}\cdot\mathbb{1}$, то A именуют JB-фактором.

12.7.4. Сформулируем несколько важных свойств JB-алгебр. Доказательства этих свойств можно найти у Ш. А. Аюпова [3], Т. А. Сарымсакова, Ш. А. Аюпова, Дж. Хаджиева и В. И. Чилина [100], Х. Ханш-Олсена и Э. Штёрмера [152].

(1) Пусть A — некоторая JB-алгебра. Множество $A^+ := \{x^2 : x \in A\}$ является острым выпуклым конусом и определяет в A структуру упорядоченного векторного пространства такого, что единица $\mathbb{1}$ алгебры A служит сильной порядковой единицей, а порядковый интервал $[-\mathbb{1}, \mathbb{1}] := \{x \in A : \ -\mathbb{1} \leqslant x \leqslant \mathbb{1}\}$ — единичным шаром. При этом неравенства $-\mathbb{1} \leqslant x \leqslant \mathbb{1}$ и $0 \leqslant x^2 \leqslant \mathbb{1}$ равносильны.

(2) Наоборот, пусть A — упорядоченное банахово пространство с сильной единицей $\mathbb{1}$, единичный шар которого совпадает с порядковым интервалом $[-\mathbb{1}, \mathbb{1}]$. Если в A задано йорданово умножение так, что неравенства $-\mathbb{1} \leqslant x \leqslant \mathbb{1}$ и $0 \leqslant x^2 \leqslant \mathbb{1}$ равносильны, то A является JB-алгеброй.

(3) Если A_0 — замкнутая ассоциативная подалгебра JB-алгебры A, то алгебра A_0 порядково и алгебраически изоморфна и изометрично вещественной банаховой алгебре $C(Q)$ для некоторого компакта Q. (Напомним, что под компактом понимается хаусдорфово компактное топологическое пространство.) В частности, центр $\mathscr{Z}(A)$ рассматриваемой JB-алгебры A представляет вещественную банахову алгебру, изометрически изоморфную $C(Q)$.

(4) В йордановой алгебре для произвольного элемента $a \in A$ вводят оператор $U_a : A \to A$, действующий по правилу $U_a x := 2a(ax) - a^2 x$. Для любой JB-алгебры A оператор U_a положителен, т. е. $U_a(A^+) \subset A^+$.

12.7.5. Идемпотенты JB-алгебры, A часто называют *проекторами*, а их совокупности обозначают символом $\mathfrak{P}(A)$, ср. 11.6.1. Множество всех проекторов, входящих в центр, образует булеву алгебру, обозначаемую символом $\mathfrak{P}_c(A)$. Предположим, что $\mathbb{B}$ является подалгеброй булевой алгебры $\mathfrak{P}_c(A)$ или, что равносильно, $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ — подалгебра с единицей в центре $\mathscr{Z}(A)$. Алгебру A мы будем называть *$\mathbb{B}$-JB-алгеброй*, если для любого разбиения единицы $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathbb{B}$ и любого ограниченного по норме семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в A существует и притом единственное $\mathbb{B}$-перемешивание $x := \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(e_\xi x_\xi)$, т. е. единственный элемент $x \in A$ такой, что $e_\xi x_\xi = e_\xi x$ для всех $\xi \in \Xi$. Если $\mathbb{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{Z}(A)$, то $\mathbb{B}$-JB-алгебру называют также центрально расширенной JB-алгеброй.

(1) *Единичный шар $\mathbb{B}$-JB-алгебры замкнут относительно $\mathbb{B}$-перемешиваний.*

$\lhd$ Так как единичный шар JB-алгебры совпадает с порядковым интервалом $[-\mathbb{1}, \mathbb{1}]$, то требуемое равносильно следующему. Если $x \in A$ и разбиение единицы $(e_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathbb{B}$ таковы, что $e_\xi x \geqslant 0$ при всех $\xi \in \Xi$, то $x \geqslant 0$. Последнее же следует из того, что если $e_\xi x = a_\xi^2$ при некотором $a_\xi \in A$, то для элемента $a = \operatorname{mix}(e_\xi a_\xi)$ имеем $x = a^2$. $\rhd$

(2) *Всякая $\mathbb{B}$-JB-алгебры является $\mathbb{B}$-циклическим банаховым пространством.*

$\lhd$ Следует из (1) и 11.5.4. $\rhd$

В соответствии с (1) результаты параграфа 11.5 применимы и к $\mathbb{B}$-*JB*-алгебрам.

12.7.6. Теорема. *Ограниченный спуск JB-алгебры внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ представляет собой $\mathbb{B}$-JB-алгебру. Наоборот, для любой $\mathbb{B}$-JB-алгебры A существует единственная с точностью до изоморфизма JB-алгебра $\mathscr{A}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, ограниченный спуск которой изометрически $\mathbb{B}$-изоморфен A. При этом $[\![\,\mathscr{A}$ является JB-фактором$\,]\!] = \mathbb{1}$ в том и только в том случае, если $\mathbb{B}\,(\mathbb{R}) = \mathscr{Z}(A)$.*

$\triangleleft$ Возьмем произвольную $\mathbb{B}$-*JB*-алгебру A. В силу теоремы 11.5.8 можно считать, что A совпадает как банахово пространство с ограниченным спуском некоторого банахова пространства $\mathscr{A} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Определим на $\mathscr{A}$ структуру йордановой алгебры. Для этого установим, что умножение в A является экстенсиональной операцией. Возьмем $x, y, x', y' \in A$ и положим $e := [\![\, x = x' \,]\!] \wedge [\![\, y = y' \,]\!]$. Поскольку соотношения $e \leqslant [\![\, u = v \,]\!]$ и $eu = ev$ равносильны, будет $ex = ex'$ и $ey = ey'$. Учитывая, что e — центральный проектор, можно написать

$$e(xy) = (ex)y = (ex')y = (ey)x' = (ey')x' = e(x'y').$$

Значит,

$$[\![\, x = x' \,]\!] \wedge [\![\, y = y' \,]\!] = e \leqslant [\![\, xy = x'y' \,]\!],$$

т. е. умножение в A экстенсионально.

Определим теперь в $\mathscr{A}$ бинарную операцию $(x, y) \mapsto x \circ y$ как подъем операции умножения в A. Таким образом, для любых $x, y \in A$ существует единственный элемент $x \circ y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ такой, что $[\![\, x \circ y \in \mathscr{A} \,]\!] = [\![\, x \circ y = xy \,]\!] = \mathbb{1}$. Покажем, что $(\mathscr{A}, \circ)$ — это *JB*-алгебра внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Из сказанного выше видно, что оператор T_a в A, действующий по правилу $x \mapsto ax$, экстенсионален. Если $\mathscr{T}_a$ — оператор $x \mapsto a \circ x$ $(x \in \mathscr{A})$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, то очевидным образом $[\![\, \mathscr{T}_a = T_a{\uparrow} \,]\!] = \mathbb{1}$. Следовательно, операторы T_x и T_y коммутируют в том и только в том случае, когда внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ коммутируют операторы $\mathscr{T}_x$ и $\mathscr{T}_y$. Отсюда, в частности, при $y = x^2$ получаем справедливость йордановой аксиомы $x \circ (y \circ x^2) = (x \circ y) \circ x^2$ для алгебры $\mathscr{A}$. Кроме того, из сказанного видно, что элемент $x \in A$ входит в центр $\mathscr{Z}(A)$ в том и только в том случае, если $[\![\, x \in \mathscr{Z}(\mathscr{A}) \,]\!] = \mathbb{1}$. Но последнее равносильно равенству

$$[\![\, \mathscr{Z}(A){\uparrow} = \mathscr{Z}(\mathscr{A}) \,]\!] = \mathbb{1}.$$

Осталось показать, что в $\mathscr{A}$ выполнены условия 12.7.1 (1–3). Для этого достаточно установить, что векторная норма в A удовлетворяет условиям, аналогичным 12.7.1 (1–3). Заметим вначале, что справедливы эквивалентности

$$\|x\| \leqslant 1 \leftrightarrow \|{\boldsymbol|}x{\boldsymbol|}\|_\infty \leqslant 1 \leftrightarrow {\boldsymbol|}x{\boldsymbol|} \leqslant \mathbb{1}.$$

Возьмем теперь произвольные $x, y \in A$ и $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Положим $x_0 := \alpha^{-1}x$, $y_0 := \beta^{-1}y$, где $\alpha := {\boldsymbol|}x{\boldsymbol|} + \varepsilon\mathbb{1}$, $\beta := {\boldsymbol|}y{\boldsymbol|} + \varepsilon\mathbb{1}$. Так как ${\boldsymbol|}x_0{\boldsymbol|} = |\alpha^{-1}|{\boldsymbol|}x{\boldsymbol|} \leqslant \mathbb{1}$, то $\|x_0\| \leqslant 1$. Аналогично $\|y_0\| \leqslant 1$. Значит, $\|x_0y_0\| \leqslant 1$ или ${\boldsymbol|}x_0y_0{\boldsymbol|} \leqslant \mathbb{1}$. Отсюда выводим:

$${\boldsymbol|}xy{\boldsymbol|} \leqslant {\boldsymbol|}x{\boldsymbol|} \cdot {\boldsymbol|}y{\boldsymbol|} + \varepsilon({\boldsymbol|}x{\boldsymbol|} + {\boldsymbol|}y{\boldsymbol|}) + \varepsilon^2\mathbb{1}.$$

Устремив ε к нулю, найдем ${\boldsymbol|}xy{\boldsymbol|} \leqslant {\boldsymbol|}x{\boldsymbol|} \cdot {\boldsymbol|}y{\boldsymbol|}$. Далее, положим $\gamma^2 := {\boldsymbol|}x^2{\boldsymbol|} + \varepsilon\mathbb{1}$ и $x' := \gamma^{-1}x$. Тогда ${\boldsymbol|}x^2{\boldsymbol|} = \gamma^{-2}{\boldsymbol|}x^2{\boldsymbol|}$, а значит, $\|x'\|^2 = \|x'^2\| \leqslant 1$ или $\|x'\| \leqslant 1$. Отсюда ${\boldsymbol|}x'{\boldsymbol|} \leqslant \mathbb{1}$, а также ${\boldsymbol|}x'{\boldsymbol|}^2 \leqslant \mathbb{1}$ и ${\boldsymbol|}x{\boldsymbol|}^2 \leqslant \gamma^2$. Стало быть, ${\boldsymbol|}x{\boldsymbol|}^2 \leqslant {\boldsymbol|}x^2{\boldsymbol|} + \varepsilon\mathbb{1}$, и при $\varepsilon \to 0$ получаем ${\boldsymbol|}x{\boldsymbol|}^2 \leqslant {\boldsymbol|}x^2{\boldsymbol|}$. Из уже доказанного следует противоположное неравенство и поэтому $|x|^2 = |x^2|$. Наконец, полагая $\delta^2 := |x^2 + y^2| + \varepsilon\mathbb{1}$, легко заметить, что $|\delta^{-2}x^2| \leqslant \mathbb{1}$, ибо

$$\|\delta^{-2}x^2\| \leqslant \|\delta^{-2}x^2 + \delta^{-2}y^2\| = \|\delta^{-2}|x^2 + y^2|\|_\infty \leqslant 1.$$

Но тогда $|x^2| \leqslant \delta^2$ и при $\varepsilon \to 0$ мы приходим к неравенству $|x^2| \leqslant |x^2 + y^2|$.

Учитывая соотношение $[\![\, \|x\|_{\mathscr{A}} = |x| \,]\!] = \mathbb{1}$ и доказанные свойства векторной нормы, простыми вычислениями булевых оценок выводится утверждение: $[\![$ норма в $\mathscr{A}$ удовлетворяет условиям 12.7.1 (1–3) $]\!] = \mathbb{1}$.

Пусть $\Lambda := \mathbb{B}\,(\mathbb{R})$. Если $\Lambda = \mathscr{Z}(A)$, то

$$\mathbb{1} = [\![\, \mathscr{Z}(\mathscr{A}){\uparrow} = \Lambda{\uparrow} = \mathscr{R}\cdot 1 \,]\!] \wedge [\![\, \mathscr{Z}(A) = \mathscr{Z}(\mathscr{A}) \,]\!] \leqslant [\![\, \mathscr{Z}(\mathscr{A}) = \mathscr{R}\cdot 1 \,]\!].$$

Следовательно, $[\![\, \mathscr{A}$ — это JB-фактор $]\!] = \mathbb{1}$. Наоборот, допустим, что $[\![\, \mathscr{Z}(\mathscr{A}) = \mathscr{R}\cdot 1 \,]\!] = \mathbb{1}$. Тогда $[\![\, \mathscr{Z}(A){\uparrow} = \mathscr{R}\cdot 1 \,]\!] = \mathbb{1}$ и поэтому

$$\mathrm{mix}(\mathscr{Z}(A)) = \mathscr{Z}(A){\uparrow}{\downarrow} = \mathscr{R}{\downarrow}\cdot\mathbb{1} = \mathrm{mix}(\Lambda).$$

Выделяя ограниченные части, видим, что $\Lambda = \mathscr{Z}(A)$. $\triangleright$

12.7.7. Рассмотрим интересный класс AJW-алгебр, содержащийся в классе $\mathbb{B}$-JB-алгебр. Под *AJW-алгеброй* мы будем понимать JB-алгебру A, удовлетворяющую следующим двум условиям:

(1) в частично упорядоченном множестве проекторов $\mathfrak{P}(A)$ любое множество попарно ортогональных элементов имеет точную верхнюю границу;

(2) любая максимальная сильно ассоциативная подалгебра порождена своими проекторами (т. е. совпадает с наименьшей замкнутой подалгеброй, содержащей ее проекторы).

Из этого определения видно, что любая максимальная сильно ассоциативная подалгебра AJW-алгебры является порядково полной векторной решеткой ограниченных элементов и, следовательно, изоморфна алгебре и решетке $C(Q,\mathbb{R})$ для некоторого стоунова компакта Q.

Пусть A — некоторая AJW-алгебра, а $\mathbb{B}$ — булева алгебра ее центральных проекторов. Тогда A является $\mathbb{B}$-JB-алгеброй: для любого разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathbb{B}$ и ограниченного семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в A существует и притом единственный элемент $x \in A$, для которого $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ при всех $\xi \in \Xi$.

В самом деле, семейство $(b_\xi x_\xi)$ состоит из попарно совместных элементов. Следовательно, оно лежит в максимальной сильно ассоциативной подалгебре A_0 с единицей. Но так как A_0 является порядково полной векторной решеткой, а семейство $(b_\xi x_\xi)$ порядково ограничено в A_0, то в A_0 существует элемент $x := o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi$. Очевидно, что $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ для всех ξ.

Таким образом к AJW-алгебре применима реализационная теорема 12.7.6. Однако здесь возможны некоторые уточнения.

12.7.8. Теорема. *Ограниченный спуск A произвольной AJW-алгебры $\mathscr{A}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ является AJW-алгеброй, причем $\mathfrak{P}_c(A)$ содержит правильную подалгебру, изоморфную $\mathbb{B}$. Наоборот, если A — некоторая AJW-алгебра и $\mathfrak{P}_c(A)$ содержит правильную подалгебру, изоморфную $\mathbb{B}$, то в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ существует единственная с точностью до изоморфизма AJW-алгебра $\mathscr{A}$, ограниченный спуск которой $\mathbb{B}$-изоморфен A. При этом $\mathscr{A}$ является AJW-фактором внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ в том и только в том случае, если $\mathbb{B} = \mathfrak{P}_c(A)$.*

$\triangleleft$ В 12.7.6 установлено, что сформулированная теорема справедлива с заменой AJW-алгебры $\mathscr{A}$ на *JB*-алгебру, а AJW-алгебры A на $\mathbb{B}$-*JB*-алгебру. Следовательно, нужно доказать лишь, что $\mathbb{B}$-*JB*-алгебра A будет AJW-алгеброй в том и только в том случае, если ее булевозначная реализация $\mathscr{A}$ является AJW-алгеброй. Другими словами, нужно обосновать следующую эквивалентность:

$$\mathscr{F}_1(A) \wedge \mathscr{F}_2(A) \leftrightarrow [\![\mathscr{F}_1(\mathscr{A})]\!] = 1 \wedge [\![\mathscr{F}_2(\mathscr{A})]\!] = 1.$$

где символами $\mathscr{F}_1(A)$ и $\mathscr{F}_2(A)$ обозначены 12.7.7 (1) и 12.7.7 (2) соответственно.

(1): Вначале установим, что $\mathscr{F}_1(A) \leftrightarrow [\![\mathscr{F}_1(\mathscr{A})]\!] = \mathbb{1}$. Нам потребуется следующее вспомогательное равенство: $\mathfrak{P}(\mathscr{A}){\downarrow} = \mathfrak{P}(A)$. Если e — проектор в A, т. е. $[\![e \in \mathfrak{P}(\mathscr{A})]\!] = \mathbb{1}$, то по определению $[\![e \in \mathscr{A}]\!] = [\![e^2 = e]\!] = \mathbb{1}$. Значит, $e \in \mathscr{A}$ и $e^2 = e$. Так как $[\![\|e\| = 1]\!] = \mathbb{1}$, то $|e| = \mathbb{1}$ и поэтому $e \in A$ и $e \in \mathfrak{P}(A)$. Итак, $\mathfrak{P}(\mathscr{A}){\downarrow} \subset \mathfrak{P}(A)$. Обратное включение очевидно.

Возьмем теперь множество попарно ортогональных проекторов $\mathscr{E} \subset \mathfrak{P}(\mathscr{A})$, и пусть $E := \mathscr{E}{\downarrow}$. Из сказанного вытекает, что $E \subset \mathfrak{P}(A)$. Тот факт, что $\mathscr{E}$ состоит из попарно ортогональных элементов, можно записать в виде

$$[\![(\forall\, e \in \mathfrak{P}(\mathscr{A}))\, (\forall\, c \in \mathfrak{P}(\mathscr{A}))\ (e \neq c \to ec = 0)]\!] = \mathbb{1}.$$

После раскрытия булевых оценок истинности для кванторов, с учетом сказанного выше мы приходим к следующему утверждению: для любых $e, c \in \mathfrak{P}(A)$ и проектора $b := \bigvee \{ b \in \mathbb{B} : be = bc \}$ имеет место равенство $b^* ec = 0$. Элементы E не являются, вообще говоря, попарно ортогональными и, значит, нельзя воспользоваться справедливостью $\mathscr{F}_1(A)$. Необходимо подправить E, заменив его новым множеством E'. Если $\gamma := \operatorname{card}(E)$, то элементы E можно занумеровать кардиналами из γ, т. е. справедливо представление $E = (e_\beta)_{\beta \in \gamma}$. Положим $e'_1 := e_1$ и

$$e'_\alpha := b^*_\alpha e_\alpha, \quad b_\alpha := \bigvee_{\beta < \alpha} [\![e_\alpha = e_\beta]\!] \quad (1 < \alpha < \gamma).$$

Если $d_{\alpha\beta} := [\![e_\alpha = e_\beta]\!]$, то в силу отмеченного выше свойства множества $\mathscr{E}$ будет $d_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta = 0$. Используя это обстоятельство и определение e'_α, при $\beta < \alpha$ выводим:

$$e'_\alpha e'_\beta = b^*_\alpha e_\alpha b^*_\beta e_\beta = \Big(\bigvee_{\nu < \alpha} d_{\alpha\nu} \Big)^* e_\alpha b^*_\beta e_\beta = \bigwedge_{\nu < \alpha} d^*_{\alpha\nu} e_\alpha e_\beta b^*_\beta \leqslant d^*_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta = \mathbb{0}.$$

Таким образом, множество $E' := (e'_\alpha)_{\alpha \in \gamma}$ состоит из попарно ортогональных проекторов. Согласно нашему предположению о справедливости $\mathscr{F}_1(A)$ для каждого $\alpha \in \gamma$ существует $e''_\alpha := \bigvee_{\beta \leqslant \alpha} e'_\beta$. Покажем индукцией по α, что $e_\alpha \leqslant e''_\alpha \quad (\alpha \in \gamma)$. При $\alpha = 1$ имеем $e_1 = e'_1 = e''_1$. Допустим, что $e_\beta \leqslant e''_\beta$ при всех $\beta < \alpha$. Тогда с учетом выше изложенного имеют место соотношения

$$e_\alpha = e'_\alpha \vee b_\alpha e_\alpha = e'_\alpha \vee \bigvee_{\beta < \alpha} d_{\alpha\beta} e_\alpha = e'_\alpha \vee \bigvee_{\beta < \alpha} e_\beta \leqslant e'_\alpha \vee \bigvee_{\beta < \alpha} e''_\beta = e''_\alpha,$$

т. е. $e_\alpha \leqslant e''_\alpha$. Из $\mathscr{F}_1(A)$ вытекает существование $e := \sup E' = \sup_{\alpha < \gamma} e'_\alpha$. Но так как $e'_\alpha \leqslant e_\alpha \leqslant e''_\alpha \leqslant e \ (\alpha \in \gamma)$, то множество E также имеет точную верхнюю границу и $\sup E = \sup \mathscr{E}{\downarrow} = e$. Теперь ясно, что $[\![\sup \mathscr{E} = e]\!] = \mathbb{1}$. Следовательно, $\mathscr{F}_1(A) \to [\![\mathscr{F}_1(\mathscr{A})]\!] = \mathbb{1}$.

Обратная импликация проста и вытекает из следующего соображения: если E — множество попарно ортогональных проекторов в A, что $\mathscr{E} := E{\uparrow}$ — множество попарно ортогональных проекторов в $\mathscr{A}$, причем из существования $\sup \mathscr{E} \in \mathscr{A}$ по принципу максимума следует существование $\sup E$.

(2): Покажем теперь, что справедливы импликации

$$\mathscr{F}_2(A) \to [\![\mathscr{F}_2(\mathscr{A})]\!] = \mathbb{1}, \quad [\![\mathscr{F}_1(\mathscr{A}) \wedge \mathscr{F}_2(\mathscr{A})]\!] = \mathbb{1} \to \mathscr{F}_2(A).$$

Прежде всего убедимся, что отображение ограниченного спуска $\mathscr{A}_0 \mapsto \mathscr{A}_0{\downarrow} \cap A$ $(\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A})$ осуществляет биекцию между множествами $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ и $\mathscr{M}(A)$ максимальных сильно ассоциативных подалгебр $\mathscr{A}$ и A соответственно.

Возьмем $x \in \mathscr{A}_0{\downarrow}$. Так как $\mathscr{A}{\downarrow} = \mathrm{mix}(A)$, то $x = \mathrm{mix}(b_\xi a_\xi)$ для некоторых разбиений единицы $(b_\xi) \subset \mathbb{B}$ и семейства $(a_\xi) \subset A$. В частности $[\![a_\xi \in \mathscr{A}_0]\!] \geqslant b_\xi$. Если a'_ξ — перемешивание элементов a_ξ и 0 с весами b_ξ и $\mathbb{1} - b_\xi$ соответственно, то по-прежнему $x = \mathrm{mix}(b_\xi a'_\xi)$, но $a'_\xi \in \mathscr{A}_0{\downarrow} \cap A$. Значит, $\mathscr{A}_0{\downarrow} = \mathrm{mix}(\mathscr{A}_0{\downarrow} \cap A)$, что равносильно соотношению $[\![\mathscr{A}_0{\uparrow} = (\mathscr{A}_0{\downarrow} \cap A){\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$.

Пусть $\mathscr{A}_0 \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$ и $A_0 := \mathscr{A}_0{\downarrow} \cap A$. Тогда для ассоциативной подалгебры $A_0 \subset A_1 \subset A$ будет $[\![\mathscr{A}_0 = A_0{\uparrow} \subset A_1{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$ и, в силу ассоциативности подалгебры $A_1{\uparrow}$ выполняется $[\![\mathscr{A}_0 = A_1{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$. Отсюда выводим: $A_0 = \mathscr{A}_0{\downarrow} \cap A = A_1{\uparrow}{\downarrow} \cap A \supset A_1$. Значит, $A_0 \in \mathscr{M}(A)$. Наоборот, возьмем $A_0 \in \mathscr{M}(A)$ и положим $\mathscr{A}_0 := A_0{\uparrow}$. Если $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$ — сильно ассоциативная подалгебра, содержащая $\mathscr{A}_0$, то $\mathscr{A}_1{\downarrow} \cap A$ — сильно ассоциативная подалгебра A, содержащая $\mathscr{A}_0{\downarrow} \cap A = A_0{\uparrow}{\downarrow} \cap A \supset A_0$. Тем самым $A_0 = \mathscr{A}_1{\downarrow} \cap A$ и, применив операцию подъема, получим $\mathscr{A}_0 = A_0{\uparrow} = (\mathscr{A}_1{\downarrow} \cap A){\uparrow} = \mathscr{A}_1$. Это доказывает максимальность $\mathscr{A}_0$. В дальнейших рассуждениях $\mathscr{A}_0$ и A_0 соответствуют друг другу в силу указанной биекции. Отметим также равенство $\mathfrak{P}(\mathscr{A}_0){\downarrow} = \mathfrak{P}(A_0)$, вытекающее из приведенных в (1) соображений.

Допустим, что выполнено $\mathscr{F}_2(A)$. Возьмем замкнутую подалгебру $\bar{\mathscr{A}}$ в $\mathscr{A}_0$, содержащую $\mathfrak{P}(\mathscr{A}_0)$. Тогда $\bar{A} := \bar{\mathscr{A}}{\downarrow} \cap A$ — замкнутая подалгебра A_0. Следовательно, $A_0 = \bar{A}$. Отсюда выводим $\bar{A} = \bar{A}{\uparrow} = A_0{\uparrow} = \mathscr{A}_0$, т. е. имеет место $\mathscr{F}_2(\mathscr{A})$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Предположим теперь, что $[\![\mathscr{F}_1(\mathscr{A})]\!] = [\![\mathscr{F}_2(\mathscr{A})]\!] = \mathbb{1}$. Пусть $\bar{A}$ — наименьшая замкнутая подалгебра A_0, содержащая $\mathfrak{P}(A_0)$. В соответствии с уже доказанным в (1) имеет место $\mathscr{F}_1(A)$ и, стало быть, $\bar{A}$ — порядково полная векторная решетка ограниченных элементов. Кроме того, $\mathbb{B} \subset \mathfrak{P}(A_0) \subset \bar{A}$ и, следовательно, $\bar{A} = \mathrm{mix}(\bar{A}) \cap A$. Если $\bar{\mathscr{A}} := \bar{A}{\uparrow}$, то $[\![\bar{\mathscr{A}}$ — замкнутая подалгебра $\mathscr{A}_0]\!] = [\![\mathfrak{P}(\mathscr{A}_0) \subset \bar{\mathscr{A}}]\!] = \mathbb{1}$. Так как внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ будет $\mathscr{F}_2(\mathscr{A})$, то $\bar{\mathscr{A}} = \mathscr{A}_0$ и $\bar{\mathscr{A}}{\downarrow} = \mathscr{A}_0{\downarrow}$. Ограничив спуски на A, получим $\bar{A} = (A{\uparrow}{\downarrow}) \cap A = \mathscr{A}_0{\downarrow} \cap A = A_0$. Итак, имеет место утверждение $\mathscr{F}_2(A)$. Теорема доказана полностью. $\rhd$

12.8. Предсопряженные *JB*-алгебры

Здесь мы приведем несколько приложений результатов о булевозначной реализации к изучению строения $\mathbb{B}$-*JB*-алгебр. Новые теоремы возникают как перенос соответствующих фактов из теории *JB*-алгебр. Для начала мы приведем результат о булевозначном представлении гомоморфизмов *JB*-алгебр.

12.8.1. Рассмотрим две *JB*-алгебры A и D с единицами $\mathbb{1}$ и $\bar{\mathbb{1}}$ соответственно. Линейный оператор $\Phi : A \to D$ будет йордановым гомоморфизмом (т. е. гомоморфизмом йордановых алгебр) лишь в том случае, если $\Phi(a^2) = \Phi(a)^2$ $(a \in A)$.

Если $\Phi(\mathbb{1}) = \bar{\mathbb{1}}$ и Φ инъективен, то $\|a\| = \|\Phi(a)\|$ $(a \in A)$. В частности, йорданов изоморфизм JB-алгебр является изометрией. Если $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра и в каждой из алгебр $\mathfrak{P}_c(A)$ и $\mathfrak{P}_c(D)$ имеется правильная подалгебра, изоморфная $\mathbb{B}$, то мы будем считать, допуская вольность, что $\mathbb{B} \subset \mathfrak{P}_c(A)$ и $\mathbb{B} \subset \mathfrak{P}_c(D)$. В этой ситуации гомоморфизм (изоморфизм) принято называть $\mathbb{B}$-*гомоморфизмом* ($\mathbb{B}$-*изоморфизмом*), если $b\Phi(a) = \Phi(ba)$ $(a \in A,\ b \in \mathbb{B})$. Гомоморфизм Φ именуют *нормальным*, если для любой возрастающей сети (x_α) из A, имеющей точную верхнюю границу $x = \sup_\alpha x_\alpha$, будет $\Phi(x) = \sup_\alpha \Phi(x_\alpha)$.

12.8.2. Теорема. *Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{D}$ — это JB-алгебры внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, а A и D — их ограниченные спуски. Пусть Φ — это $\mathbb{B}$-линейный оператор из A в D и $\varphi := \Phi\!\uparrow$. Тогда имеют место утверждения*:

(1) Φ *— это $\mathbb{B}$-гомоморфизм $\leftrightarrow [\![\, \varphi$ — гомоморфизм $]\!] = \mathbb{1}$;*

(2) Φ *положителен $\leftrightarrow [\![\, \varphi$ положителен $]\!] = \mathbb{1}$;*

(3) Φ *нормален $\leftrightarrow [\![\, \varphi$ нормален $]\!] = \mathbb{1}$.*

$\lhd$ Все следует из 12.1.10. $\rhd$

12.8.3. Сформулируем теперь несколько фактов о строении JB-алгебр. Существование исключительных JB-алгебр приводит к тому, что не всякая JB-алгебра изоморфна алгебре операторов в гильбертовом пространстве, а значит, нельзя ввести понятие слабо замкнутой JB-алгебры операторов в классе всех JB-алгебр, как это делается в случае C^*-алгебр. Однако для JB-алгебр можно адаптировать характеризации слабо замкнутых алгебр операторов, содержащиеся в теореме Кэйдисона и теореме Сакаи. Оказывается, что и для JB-алгебр эти две характеризации эквивалентны, как и в случае C^*-алгебр.

Пусть A — некоторая $\mathbb{B}$-JB-алгебра и $\Lambda := \mathbb{B}\,(\mathbb{R})$. Оператор $\Phi \in A^\#$ называют Λ-*значным состоянием*, если $\Phi \geqslant 0$ и $\Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. В случае $\Lambda := \mathbb{R}$, говорят просто о состояниях вместо Λ-значных состояний. Если $\mathscr{A}$ — булевозначная реализация алгебры A, то $\phi := \Phi\!\uparrow$ будет, как видно из 12.7.8, ограниченным линейным функционалом на $\mathscr{A}$. Более того, ϕ положителен и o-непрерывен, т. е. ϕ — нормальное состояние на $\mathscr{A}$. Верно и обратное: если $[\![\, \phi$ — нормальное состояние на $\mathscr{A}\,]\!] = \mathbb{1}$, то ограничение на A оператора $\phi\!\downarrow$ служит Λ-значным нормальным состоянием. Приведем теперь характеризацию $\mathbb{B}$-JB-алгебр, являющихся $\mathbb{B}$-сопряженными пространствами.

12.8.4. Теорема. *Произвольная JB-алгебра изометрически изоморфна сопряженному банахову пространству в том и только в том случае, если она монотонно полна и имеет разделяющее семейство нормальных состояний*

$\lhd$ Доказательство см. у Ф. Шульца [373, теорема 2.3]. $\rhd$

Если JB-алгебра удовлетворяет любому из эквивалентных условий сформулированной теоремы, то ее называют JBW-*алгеброй.*

12.8.5. Теорема. *Для $\mathbb{B}$-JB-алгебры A равносильны утверждения*:

(1) *A является $\mathbb{B}$-сопряженным пространством*;

(2) *A монотонно полна и имеет разделяющее множество Λ-значных нормальных состояний.*

Если выполнено одно из этих условий, то $\mathbb{B}$-предсопряженным пространством к A будет часть $A^\#$, состоящая из порядково непрерывных операторов.

$\lhd$ По теореме 12.7.6 можно считать, что A совпадает с ограниченным спуском JB-алгебры $\mathscr{A}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. В силу принципа переноса, 12.8.4 и 11.5.11 нужно лишь показать, что:

(a) алгебры A и $\mathscr{A}$ монотонно полны одновременно;

(b) A имеет разделяющее множество нормальных Λ-значных состояний в том и только в том случае, если $[\![\, \mathscr{A}$ имеет разделяющее множество нормальных состояний $]\!] = \mathbb{1}$.

Утверждение (a) следует из того, что операции спуска и подъема сохраняют поляры (см. теоремы 5.3.5 и 5.5.7). При этом нужно учесть, что поляра $\pi_{\leqslant}(M)$ относительно соответствия $\leqslant$ (где $\leqslant$ означает порядок в $\mathscr{A}$ или A) представляет собой множество всех верхних границ M, а если существует $\sup M$, то $\{\sup M\} = \pi_{\leqslant}(M) \cap \pi_{\leqslant}^{-1}(\pi_{\leqslant}(M))$ (см. доказательство порядковой полноты для булевой алгебры в 7.3.8 и для упорядоченных групп в 8.5.1).

Докажем (b). Пусть $\mathscr{S}(\mathscr{A})$ — множество всех состояний алгебры $\mathscr{A}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, а $\mathscr{S}_{\mathbb{B}}(A)$ — множество всех Λ-значных состояний A. Поскольку состояние $\Phi \in \mathscr{S}_{\mathbb{B}}(A)$ является $\mathbb{B}$-линейным, оно экстенсионально и допускает подъем $\phi := \Phi\uparrow$, представляющий собой функционал $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Подъем сохраняет линейность и положительность, и, как видно из 11.5.10 $[\![\, \|\phi\| = |\!\Phi\!| \,]\!] = \mathbb{1}$. Следовательно, соответствие $\Phi \mapsto \phi$ — это биекция между $\mathscr{S}_{\mathbb{B}}(A)$ и $\mathscr{S}(\mathscr{A})\!\downarrow$. При этом состояние Φ будет нормальным в том и только в том случае, если $[\![\, \phi$ — нормальное состояние $]\!] = \mathbb{1}$ (см. 12.7.8). Предположим, что $\mathscr{S}_{\mathbb{B}}(A)$ — разделяющее множество состояний. Возьмем ненулевой элемент $x \in A$. Подберем состояние $\Phi_0 \in \mathscr{S}_{\mathbb{B}}(A)$ так, чтобы $\Phi_0(x) \neq 0$. Ввиду экстенсиональности Φ имеем $[\![\, x \neq 0 \,]\!] \leqslant [\![\, \Phi_0(x) \neq 0 \,]\!]$. Используя правила вычисления булевых оценок и учитывая сказанное выше, можно написать

$$[\![\, \mathscr{S}(\mathscr{A}) \text{ — разделяющее множество состояний} \,]\!] =$$

$$= [\![\, (\forall\, x \in \mathscr{A})(x \neq 0 \to (\exists\, \phi \in \mathscr{S}(\mathscr{A}))\phi(x) \neq 0 \,]\!] =$$

$$= \bigwedge_{x\in A} [\![\, x \neq 0 \,]\!] \Rightarrow \bigvee_{\Phi\in\mathscr{S}_{\mathbb{B}}(A)} [\![\, \Phi\uparrow(x) \neq 0 \,]\!] \geqslant \bigwedge_{x\in A} [\![\, x \neq 0 \,]\!] \Rightarrow [\![\, \Phi_0(x) \neq 0 \,]\!] = \mathbb{1}.$$

Таким образом, $\mathscr{S}(\mathscr{A})$ — разделяющее множество состояний внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Наоборот, пусть выполнено последнее утверждение. Тогда для любого $0 \neq x \in A$ выполнено $b := [\![\, x \neq 0 \,]\!] > 0$. Поэтому на основании принципа максимума существует $\phi \in \mathscr{S}(\mathscr{A})\!\downarrow$ такой, что $b \leqslant [\![\, \phi(x) \neq 0 \,]\!]$. Обозначим через Φ ограничение $\phi\!\downarrow$ на $A \subset \mathscr{A}\!\downarrow$. Тогда $\Phi \in \mathscr{S}_{\mathbb{B}}(A)$ и $b \leqslant [\![\, \Phi(x) \neq 0 \,]\!]$. Отсюда видно, что носитель элемента $\Phi(x)$ не меньше b, а значит, $\Phi(x) \neq 0$. $\rhd$

12.8.6. Алгебру A, удовлетворяющую одному из эквивалентных условий 12.8.5 (1) и 12.8.5 (2), называют $\mathbb{B}$-*JBW-алгеброй.* Если при этом $\mathbb{B}$ совпадает с множеством всех центральных проекторов, то A именуют $\mathbb{B}$-*JBW-фактором.* Из теорем 12.7.6 и 12.8.5 видно, что A будет $\mathbb{B}$-*JBW*-алгеброй ($\mathbb{B}$-*JBW*-фактором) в том и только в том случае, если булевозначная реализация $\mathscr{A} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ алгебры A является *JBW*-алгеброй (*JBW*-фактором).

Рассмотрим пример. Пусть X — некоторый модуль Капланского — Гильберта над алгеброй $\overline{\Lambda} := \mathbb{B}\,(\mathbb{C})$. Тогда X — это $\mathbb{B}$-циклическое банахово пространство, а $\mathscr{L}_{\overline{\Lambda}}(X)$ — это AW^*-алгебра типа I (см. 12.2.9). Взяв $x, y \in X$, определим полунорму

$$p_{x,y}(a) := \|\langle ax \mid y\rangle\|_\infty \quad (a \in \mathscr{L}_{\overline{\Lambda}}(X)),$$

где $\langle\,\cdot \mid \cdot\,\rangle$ — внутреннее произведение в X со значениями в $\overline{\Lambda}$. Обозначим символом σ_∞ топологию на $\mathscr{L}_{\overline{\Lambda}}(X)$, порожденную системой полунорм вида $p_{x,y}$. Можно показать (см. ниже доказательство из 12.8.8), что σ_∞-замкнутая $\mathbb{B}$-*JB*-алгебра самосопряженных операторов из $\mathscr{L}_{\overline{\Lambda}}(X)$ будет монотонно замкнутой подалгеброй $\mathscr{L}_{\overline{\Lambda}}(X)_{\mathrm{sa}}$. В то же время последняя алгебра монотонно полна и имеет разделяющее множество Λ-значных нормальных состояний. Таким образом, σ_∞-замкнутая $\mathbb{B}$-*JB*-алгебра самосопряженных операторов служит примером $\mathbb{B}$-*JBW*-алгебры.

12.8.7. Замкнутые по норме (слабо замкнутые) йордановы алгебры самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве принято называть *JC-алгебрами* (соответственно *JW-алгебрами*).

(1) *Произвольная JC-алгебра будет JW-алгеброй в том и только в том случае, если она монотонно полна и допускает разделяющее множество нормальных ($\mathbb{C}$-значных) состояний или, что равносильно, линейно изометрична сопряженному банахову пространству.*

$\triangleleft$ Следует непосредственно из 12.8.3. $\triangleright$

(2) Теорема Капланского о плотности. *Пусть A — сильно плотная подалгебра JBW-алгебры M. Тогда единичный шар A сильно плотен в единичном шаре M.*

12.8.8. Теорема. *Специальная $\mathbb{B}$-JB-алгебра A будет $\mathbb{B}$-JBW-алгеброй в том и только в том случае, если алгебра A изоморфна σ_∞-замкнутой $\mathbb{B}$-JB-подалгебре в $\mathscr{L}_{\overline{\Lambda}}(X)_{\mathrm{sa}}$ для некоторого модуля Капланского — Гильберта X.*

$\triangleleft$ Достаточность видна из 12.8.4; докажем необходимость. Пусть A — специальная $\mathbb{B}$-*JBW*-алгебра. Вновь можно предположить, что A совпадает с ограниченным спуском некоторой *JB*-алгебры $\mathscr{A}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. При этом легко показать, что алгебра $\mathscr{A}$ также специальна.

Из 12.8.7 (1) видно, что специальная *JBW*-алгебра $\mathscr{A}$ является *JW*-алгеброй, т. е. алгебра A изоморфна слабо замкнутой подалгебре алгебры вида $\mathscr{L}(\mathscr{X})_{\mathrm{sa}}$, где $\mathscr{X}$ — комплексное гильбертово пространство внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Таким образом, можно предположить, что $\mathscr{A}$ — равномерно замкнутая йорданова подалгебра $\mathscr{L}(\mathscr{X})_{\mathrm{sa}}$, и нужно лишь доказать, что A будет σ_∞-замкнутой подалгеброй $\mathscr{L}_{\overline{\Lambda}}(X)_{\mathrm{sa}}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models$ «$\mathscr{A}$ — слабо замкнутая подалгебра $\mathscr{L}(\mathscr{X})_{\mathrm{sa}}$».

Алгебраическая часть очевидна. Пусть $\psi(\mathscr{A}, u)$ — формула, означающая, что оператор u входит в слабое замыкание $\mathscr{A}$. Тогда эту формулу можно записать в виде

$$(\forall\, n \in \omega)(\forall\, \theta_1, \theta_2 \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{X}))(\exists\, v \in \mathscr{A})(\forall\, x \in \theta_1)(\forall\, y \in \theta_2)\ |\langle u(x) - v(x), y\rangle| \leqslant n^{-1},$$

где ω — множество целых положительных чисел, $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ — внутреннее произведение в $\mathscr{X}$, а $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{X})$ — множество всех конечных подмножеств X. Допустим, что $[\![\, \psi(\mathscr{A}, u) \,]\!] = \mathbb{1}$. Вычисление булевых оценок с применением принципа максимума и соотношения

$$\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{X}) = \{\theta{\uparrow} : \theta \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)\}{\uparrow}$$

приводит к следующему утверждению. Для любого $n \in \omega$ и любых конечных наборов $\theta_1 := \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ и $\theta_2 := \{y_1, \dots, y_m\} \subset X$ существует $v \in \mathscr{A}{\downarrow}$ такой, что

$$[\![\, (\forall\, x \in \theta_1{\uparrow})(\forall\, y \in \theta_2{\uparrow}) |\langle u(x) - v(x), y\rangle| \leqslant n^{-1} \,]\!] = \mathbb{1}.$$

По теореме Капланского о плотности (см. 12.8.7 (2)) можно выбрать v так, чтобы дополнительно было выполнено следующее: $[\![\, \|v\| \leqslant \|u\| \,]\!] = \mathbb{1}$. Если U и V — ограничения на X операторов $u{\downarrow}$ и $v{\downarrow}$ соответственно, то

$$|\!|V|\!| \leqslant |\!|U|\!|, \quad |\langle (U - V)(x_k) \mid y_l\rangle| < n^{-1}\mathbb{1} \quad (k := 1, \dots, n;\ l := 1, \dots, m).$$

Существует фиксированное разбиение единицы $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в булевой алгебре $\mathbb{B}$, зависящее только от u, для которого $e_\xi|U| \in \Lambda$ при всех ξ. Отсюда видно, что $e_\xi U \in A$ и $e_\xi V \in A$. Кроме того,

$$\|\langle e_\xi(U-V)(x_k) \mid y_l\rangle\|_\infty < n^{-1} \quad (k := 1,\dots,n;\ l := 1,\dots,m).$$

Повторив приведенные рассуждения в обратном направлении, мы приходим к следующему заключению. Формула $\psi(\mathscr{A}, u)$ истинна внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ в том и только в том случае, если существует разбиение единицы $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathbb{B}$ и семейство $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$, где U_ξ входит в σ_∞-замыкание A, такие, что $e_\xi \leqslant [\![\, u = U_\xi{\uparrow} \,]\!]$ для всех ξ, т. е. $u = \operatorname{mix}(e_\xi U_\xi{\uparrow})$.

Допустим теперь, что алгебра A является σ_∞-замкнутой и формула $\psi(\mathscr{A}, u)$ истинна внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Тогда U_ξ лежит в A по условию и $[\![\, U_\xi{\uparrow} \in \mathscr{A} \,]\!] = \mathbb{1}$. Значит, $e_\xi \leqslant [\![\, u \in \mathscr{A} \,]\!]$ при всех ξ, т. е. $[\![\, u \in \mathscr{A} \,]\!] = \mathbb{1}$. Следовательно,

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models (\forall\, u \in \mathscr{L}(\mathscr{X}))\psi(\mathscr{A}, u) \to u \in \mathscr{A}.$$

Наоборот, пусть $\mathscr{A}$ слабо замкнута. Если U входит в σ_∞-замыкание A, то $u = U{\uparrow}$ лежит в слабом замыкании $\mathscr{A}$. По условию $[\![\, u \in \mathscr{A} \,]\!] = \mathbb{1}$ или $u \in \mathscr{A}{\downarrow}$. Ограничение оператора $u{\downarrow}$ на X, совпадающее с U, входит в A. $\triangleright$

12.8.9. Пусть $M_3^8 := M_3(\mathbb{O})$ — алгебра эрмитовых (3×3)-матриц над числами Кэли (октавами). Если $(\cdot)^\wedge$ обозначает каноническое вложение в булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, то $[\![\, \mathbb{O}^\wedge$ — нормированная алгебра над полем $\mathbb{R}^\wedge \,]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\, (M_3^8)^\wedge$ — это $\mathbb{R}^\wedge$-алгебра эрмитовых (3×3)-матриц над $\mathbb{O}^\wedge \,]\!] = \mathbb{1}$. Пусть $\mathscr{O}$ и $\mathscr{M}_3^8$ — пополнения по норме алгебр $\mathbb{O}^\wedge$ и $(M_3^8)^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Можно легко показать (используя, например, теорему Гурвица), что $[\![\, \mathscr{O}$ — алгебра чисел Кэли $]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\, \mathscr{M}_3^8$ — алгебра эрмитовых (3×3)-матриц над числами Кэли $]\!] = \mathbb{1}$. По теореме 12.7.6 ограниченный спуск $\mathscr{M}_3^8$ — это $\mathbb{B}$-*JB*-алгебра. В то же время ограниченный спуск *JB*-алгебры $\mathscr{M}_3^8$ изометрически изоморфен алгебре непрерывных вектор-функций $C(Q, M_3^8)$, где Q — стоунов компакт булевой алгебры $\mathbb{B}$ (см. 11.3.8). Учитывая сказанное, дадим булевозначную интерпретацию следующего факта (см. [12, теорема 8.6]): *любой JBW-фактор изоморфен либо M_3^8, либо JC-алгебре.*

12.8.10. Теорема. *Любой $\mathbb{B}$-JBW-фактор A допускает единственное разложение $A = eA \oplus e^*A$ с центральным проектором $e \in \mathbb{B}$, $e^* := \mathbb{1} - e$, такое, что алгебра eA специальна, а алгебра e^*A чисто исключительна. Более того, алгебра eA будет $\mathbb{B}$-изоморфной σ_∞-замкнутой подалгебре самосопряженных эндоморфизмов некоторого модуля Капланского — Гильберта, а алгебра e^*A будет изоморфной $C(Q, M_3^8)$, где Q — стоунов компакт алгебры $e^*\mathbb{B} := [0, e^*]$.*

$\triangleleft$ Если $\mathscr{A}$ — булевозначная реализация алгебры A, то $[\![\mathscr{A}$ — *JBW*-фактор$]\!] = \mathbb{1}$ (см. 12.8.4). Стало быть, по принципу переноса $[\![\, \mathscr{A}$ изоморфна либо *JC*-алгебре, либо $M_3^8 \,]\!] = \mathbb{1}$. Положим $e := [\![\, \mathscr{A}$ специальна$]\!]$. Тогда $e^* = [\![\, \mathscr{A}$ изоморфна $\mathscr{M}_3^8 \,]\!]$. Более того, справедливы следующие утверждения:

$$\mathbb{V}^{(e\mathbb{B})} \models [\![\, e\mathscr{A} \text{ — специальный } JBW\text{-фактор} \,]\!];$$

$$\mathbb{V}^{(e^*\mathbb{B})} \models [\![\, e^*\mathscr{A} \text{ — алгебра, изоморфная } \mathscr{M}_3^8 \,]\!].$$

Ограниченный спуск $e\mathscr{A}$ будет специальной $e\mathbb{B}$-алгеброй. Осталось привлечь теорему 12.8.8 и замечание из 12.8.9. $\triangleright$

12.9. Комментарии

12.9.1. (1) Инволютивные операторные алгебры возникли у Дж. фон Неймана в связи с математическими проблемами квантовой механики, см. [150, 151, 325, 326]. В серии работ Ф. Дж. Мюррея и Дж. фон Неймана [318]–[320], [324] были исследованы слабо замкнутые инволютивные подалгебры алгебры $\mathscr{L}(H)$ всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, которые впоследствии были названы алгебрами фон Неймана. Дальнейшее развитие теории алгебр фон Неймана связано с именами Ж. Диксемье, А. Конна, С. Сакаи, И. Сигала, М. Такесаки, М. Томиты и др.

(2) Традиции связей с теоретической физикой живы и поныне (см., например, книгу У. Браттели и Д. Робинсона [17]). Современная теория инволютивных топологических алгебр включает несколько абстрактных направлений, использующих разнообразный математический инструментарий. Необходимые сведения об общих инволютивных алгебрах и бэровских инволютивных алгебрах имеются в книге С. К. Бербериана [193]. С основными разделами современной теории инволютивных нормированных алгебр и ее разнообразными приложениями можно ознакомиться по монографиям В. Арвесона [188], Ж. Диксмье [58, 213], Р. Кэйдисона [263], М. А. Наймарка [149], Ш. Сакаи [364], В. Сандера [382], Ю. П. Соловьева и Е. В. Троицкого [163], М. Такесаки [383] и др.

(3) Изучение C^*-алгебр и алгебр фон Неймана методом булевозначных моделей начал Г. Такеути в [389, 390]. Он же получил теорему 12.1.6, см. [389]. В этих же работах Г. Такеути даны и другие приложения. Теоремы 12.1.7 и 12.1.8 — интерпретация в булевозначной модели классических фактов теории банаховых алгебр: теоремы Гельфанда — Мазура и теоремы Глисона — Желязко — Кахана (см., например, [128, 362]). Отметим также монографию Х. Дейлза и У. Вудина [206], освещающую приложения булевозначных моделей к проблемам независимости в соответствующих разделах функционального анализа.

(4) В доказательстве теоремы 12.1.9 попутно установлено, что для модульно выпуклого множества K множество крайних точек $\operatorname{ext}(K)$ и множество модульно крайних точек $\operatorname{Ext}(K)$ совпадают. Этот эффект обнаружил С. С. Кутателадзе при изучении экстремальной структуры выпуклых множеств линейных операторов, см. [121, 122]. Построенная им теория экстремальных операторов освещена в монографиях А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [112], А. Г. Кусраева [107].

12.9.2. (1) Современная структурная теория AW^*-алгебр начинается с работ И. Капланского [266, 268, 269]. Эти объекты естественно возникают на пути алгебраизации теории операторных алгебр фон Неймана. Теоремы 12.2.9 (с уточнением из 12.5.5) и 12.2.10 взяты из работы И. Капланского [269]. Укажем еще два результата, полученных в этой же статье.

(2) Пусть A — это C^*-алгебра с единицей $\mathbb{1}$. Элемент $x \in A$ называют *унитарным,* если $x^*x = \mathbb{1} = xx^*$. Автоморфизм (биективный гомоморфизм) $\alpha : A \to A$ алгебры A именуют *внутренним,* если существует унитарный элемент $u \in A$ такой, что $\alpha(x) = uxu^*$ $(x \in A)$. Если H — гильбертово пространство и $A := \mathscr{L}(H)$ — алгебра линейных ограниченных операторов в H, то всякий автоморфизм A является внутренним. Другие факторы фон Неймана этим свойством не обладают. Тем не менее справедлива следующая теорема, доказанная в той же работе И. Капланского [269].

Теорема. *Пусть A — это AW^*-алгебра типа* I. *Любой автоморфизм A, оставляющий неподвижным каждый элемент центра, является внутренним.*

(3) *Дифференцированием* в алгебре A называют линейное отображение $x \mapsto x'$ $(x \in A)$, удовлетворяющее соотношению $(xy)' = x'y + xy'$. Ясно, что для любого $a \in A$ отображение $x \mapsto xa - ax$ $(x \in A)$ служит дифференцированием. Такие дифференцирования принято называть *внутренними.* Теория ограниченных дифференцирований C^*-алгебр и AW^*-алгебр начинается с работы И. Капланского [269] (см. также книгу С. Сакаи [364]). Следующий факт также установил И. Капланский:

Теорема. *Любое дифференцирование в AW^*-алгебре типа* I *является внутренним.*

Несмотря на это дифференцирование C^*-алгебры (с единицей) не обязательно является внутренним. В приложениях к математической физике значительный интерес представляют также и неограниченные дифференцирования. Подробный комментарий к работам в этом направлении дан в книге У. Браттели и Д. Робинсона [17].

(4) Теоремы 12.2.4 и 12.2.5 получены М. Озавой в [347], см. также [349]. Теоремы 12.2.7 и 12.2.8 для алгебр фон Неймана установил Г. Такеути в [389, 390]. Затем М. Озава в [347] отметил, что эти же факты остаются в силе и для произвольных AW^*-алгебр. Значительный вклад в булевозначный анализ алгебр фон Неймана и AW^*-алгебр внес Х. Нишимура, см. [328, 329, 332], [336]–[340].

(5) Одна из наиболее плодотворных идей теории инволютивных операторных алгебр состоит в рассмотрении алгебры фон Неймана в качестве некоммутативного аналога классического пространства L^∞ и развития на этой основе *теории некоммутативного интегрирования.* Некоммутативный интеграл относительно нормального полуконечного следа восходит к работам Ж. Диксмье [211] и И. Сигала [371] (лапидарное изложение имеется в статьях Ф. Дж. Йедона [406] и Э. Нельсона [323]). В частности, введенное И. Сигалом кольцо измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, предоставляет возможность построить теорию некоммутативного интегрирования на полуконечных алгебрах фон Неймана относительно следа.

(6) Теория некоммутативного интегрирования нашла важные приложения в квантовой механике и теории двойственности для унимодулярных локально компактных групп, стимулировала целый ряд исследований по некоммутативной геометрии и некоммутативной теории вероятностей. Дальнейший прогресс в некоммутативном интегрировании связан с теорией Томиты — Такесаки [383], позволившей описать L^p-пространства, ассоциированные с полуконечным весом. Обзор теории некоммутативных L^p-пространств см. в статье Ж. Пизье и К. Шу [355]. Отметим также работу А. М. Короля и В. И. Чилина [83], в которой булевозначный подход применен к изучению алгебр измеримых операторов, присоединенных к AW^*-алгебре.

12.9.3. (1) Определение булевой размерности модуля Капланского — Гильберта, данное в 12.3.5, принадлежит А. Г. Кусраеву [103]. Ранее М. Озава [344] определил булеву размерность модуля Капланского — Гильберта как размерность гильбертова пространства, служащего булевозначной реализацией этого модуля, т. е. как внутренний объект булевозначного универсума. Определение 12.3.5 является внешней расшифровкой определения М. Озавы [344]. Понятия однородного и строго однородного модуля Капланского — Гильберта из 12.3.1 введены соответственно И. Капланским [269] и А. Г. Кусраевым [103].

(2) Теоремы 12.3.2 и 12.3.3 получены М. Озавой [344] и А. Г. Кусраевым [103] соответственно. Теорема 12.3.8 приведена в работе А. Г. Кусраева [103], а ее булевозначная версия — в работе М. Озавы [344].

12.9.4. (1) Результаты параграфа 12.4 взяты из статьи А. Г. Кусраев [103]. Там же установлена теорема о функциональном представлении модуля Капланского — Гильберта, сформулированная выше как теорема 12.4.6.

(2) Отметим, что 12.4.5 (1) влечет отрицательное решение проблемы И. Капланского о единственности разложения AW^*-алгебры типа I в прямую сумму однородных компонент. Это решение нашел М. Озава [345, 346]. Неединственность разложения AW^*-алгебры типа I в прямую сумму однородных компонент связана с эффектом смещения кардинальных чисел при погружении в булевозначную модель $\mathbb{V}^{(B)}$. Ввиду 9.1.6 в случае булевой алгебры B счетного типа смещение кардинальных чисел невозможно. Следовательно, разложение AW^*-алгебры типа I в прямую сумму однородных компонент единственно. И. Капланский установил этот факт и высказал гипотезу о том, что в общем случае единственность не имеет места [269].

12.9.5. (1) Результаты о функциональном представлении AW^*-алгебр типа I (теоремы 12.5.4 и 12.5.5) получены А. Г. Кусраевым в [103]. В этой же работе введены понятия строгой кратности и строго декомпозиционного ряда из 12.5.1.

(2) Классификация AW^*-алгебр типа I, содержащаяся в утверждениях 12.5.6 (1–3), получена М. Озавой [344] и А. Г. Кусраевым [103] в разных формах. Основное отличие состоит в описании инварианта, характеризующего AW^*-алгебру типа I с точностью до $*$-изоморфизма: в [346] такой инвариант представляет собой булевозначный кардинал, т. е. внутренний объект рассматриваемого булевозначного универсума, в то время как определение в [103] не апеллирует к конструкции булевозначного универсума.

(3) Из 12.3.2, 12.4.1, 12.4.5 (1) и 12.5.2 вытекает следующее утверждение: *для любых бесконечных кардиналов α и β, $\alpha < \beta$, существует модуль Капланского — Гильберта, γ-однородный для любого кардинала $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$, и существует AW^*-алгебра, γ-однородная для любого кардинала $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$* (см. у М. Озавы [344]).

12.9.6. (1) C^*-алгебры, которые могут быть реализованы как бикоммутанты в AW^*-алгебре типа I, привлекают интерес исследователей давно, см., например, у С. К. Берввериана в [194] и М. Озавы в [345], а также указанную ими литературу. С. К. Бербериан в [194] назвал такие алгебры вложимыми. Теория вложимых алгебр параллельна теории алгебр фон Неймана. Теорема 12.6.2, установленная М. Озавой в [345], объясняет природу этого параллелизма и в то же время дает метод перевода теорем об алгебрах фон Неймана в соответствующие (но, вообще говоря, не идентичные) теоремы о вложимых C^*-алгебрах. Несколько результатов в этом направлении получены М. Озавой в работах [345, 347, 348], из которых взяты теоремы 12.6.4–12.6.7, 12.6.10 и 12.6.11.

(2) Приведем еще один результат М. Озавы из [345]. Алгебру фон Неймана A на гильбертовом пространстве H называют *стандартной,* если существует сопряжение $J : H \to H$ такое, что отображение $x \mapsto J \circ x^* \circ J$ представляет собой $*$-антиизоморфизм алгебры A на ее коммутант A'. Из *теории Томиты — Такесаки* известно, что всякая алгебра фон Неймана $*$-изоморфна некоторой стандартной алгебре фон Неймана (см., например, книгу У. Браттели и Д. Робинсона [17, теорема 2.5.14]). Пользуясь булевозначным принципом переноса для вложимых алгебр (теорема 12.6.2), М. Озава получил следующий результат:

Теорема. *Любая вложимая AW^*-алгебра с центром Λ $*$-изоморфна стандартному Λ-фактору на некотором модуле Капланского — Гильберта над Λ.*

Отображение $J : H \to H$, действующее в модуле Капланского — Гильберта H над Λ, называют Λ-сопряжением, если выполнены следующие условия:

(a) $J(u + v) = J(u) + J(v) \quad (u, v \in H)$;

(b) $J(au) = a^* J(u) \quad (a \in \Lambda,\ u \in H)$;

(c) $\langle Ju|v\rangle = \langle u|Jv\rangle \quad (u, v \in H)$;

(d) $J = J^{-1}$.

Подмножество $A \subset \mathscr{L}_\Lambda(H)$ именуют Λ-*фактором*, если A служит AW^*-подалгеброй алгебры $\mathscr{L}_\Lambda(H)$, причем центр совпадает с центром $\mathscr{L}_\Lambda(H)$. Если для Λ-фактора A существует Λ-сопряжение J на H такое, что отображение $x \mapsto J \circ x^* \circ J$ осуществляет $*$-антиизоморфизм A на A', то A называют стандартным.

(3) AW^*-алгебру A мы назовем *чисто невложимой*, если A не имеет вложимых прямых слагаемых. Можно показать, что для произвольной AW^*-алгебры A существует единственный центральный проектор $e \in A$ такой, что алгебра eA вложима, а алгебра $(\mathbb{1} - e)A$ чисто невложима. Более того, алгебра A будет чисто невложимой в том и только в том случае, если в A нет ни одного положительного линейного оператора из A в $\Lambda \subset \mathscr{Z}(A)$, который представляет собой проектор единичной нормы на некоторую AW^*-подалгебру $\Lambda \subset \mathscr{Z}(A)$ и вполне аддитивен на решетке $\mathfrak{P}(A)$, см. у М. Озавы [345, теоремы 4.2 и 4.3].

12.9.7. (1) JB-алгебры представляют собой вещественные неассоциативные аналоги C^*-алгебр и операторных алгебр фон Неймана. Теория таких алгебр восходит к работе П. Йордана, Дж. фон Неймана и Ю. Вигнера [262] и как раздел функционального анализа существует с середины 1960-х годов. Именно в это время Д. М. Топпинг [396] и Э. Штёрмер [381] начали изучение неассоциативных вещественных аналогов алгебр фон Неймана — JW-алгебр — слабо замкнутых йордановых алгебр самосопряженных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Затем в работе Э. Альфсена, Ф. Шульца и Э. Штёрмера [183] были введены JB-алгебра, а в статье Ф. Шульца [373] выделен класс предсопряженных JB-алгебр, названных JBW-алгебрами. Последующий прогресс в изучении JB-алгебр отражен в монографиях Ш. А. Аюпова [13], Ш. А. Аюпова, Ш. А. Усманова и А. А. Рахимова [182], Т. А. Сарымсакова, Ш. А. Аюпова, Дж. Хаджиева и В. И. Чилина [159], Х. Ханш-Олсена и Э. Штёрмера [244].

(2) Булевозначный подход к изучению JB-алгебр намечен в работах А. Г. Кусраева [104, 106]. Результаты пунктов 12.7.5–12.7.8 взяты из [104]. Теория JB-алгебр интенсивно разрабатывается, круг приложений расширяется. Среди основных направлений исследований имеются: структура и классификация JB-алгебр, неассоциативное интегрирование и квантовая теория вероятностей, геометрия состояний JB-алгебр и др.

(3) Класс AJW-алгебр впервые упомянут в работе Д. М. Топпинга [396] в 1965 году, однако удовлетворительная теория этого класса алгебр до сих пор не построена. Ф. Н. Арзикулов исследовал йорданов аналог условия Бэра для AJW-алгебр, используя различные йордановы аналоги аннуляторов. В частности, им установлен следующий факт, см. [8, 9].

Теорема. *Для произвольной JB-алгебры равносильны условия*:

(a) *A является AJW-алгеброй*;

(b) *для непустого подмножества $M \subset A$ существует проектор $p \in \mathfrak{P}(A)$ такой, что $M^\perp = U_p(A)$, где $M^\perp := \{a \in A : \ (\forall\, x \in M)\, U_a x = 0\}$.*

(4) Если в основу теории интегрирования (см. 12.9.2 (5)) вместо алгебры фон Неймана положить JW-алгебру (или AJW-алгебру), то возникающую теорию принято называть *неассоциативным интегрированием.* Измеримые операторы, присоединенные к JW-алгебре, начал изучать Ш. А. Аюпов, см. [13]. Аналогичное исследование для класса AJW-алгебр провел Ф. Н. Арзикулов, см. [9]. Пространства L^p на JBW-алгебрах были введены в работах Р. З. Абдуллаева [1], Ш. А. Аюпова [11], М. А. Бердикулова [15] и Б. Йохума [251].

12.9.8. (1) Результаты 12.8.2, 12.8.5, 12.8.8 и 12.8.9 принадлежат А. Г. Кусраеву, см. [104, 106]. Им же введен класс $\mathbb{B}$-JBW-алгебр, который шире, чем класс JBW-алгебр. Принципиальное отличие состоит в том, что $\mathbb{B}$-JBW-алгебра имеет точное представление в алгебре самосопряженных операторов на некотором AW^*-модуле, а не на гильбертовом пространстве, как в случае JBW-алгебр. Относительно чисел Кэли и теоремы Гурвица см. у А. Г. Куроша [90].

(2) Приложения из 12.8 лишь иллюстрируют возможности метода булевозначных реализаций. В этом направлении можно продвинуться существенно дальше и получить разнообразные результаты, используя прямую булевозначную интерпретацию по аналогии с главами 10–12 или же прибегая к подбору специфической булевой алгебры (форсинг), как в главе 9. Например, в [106] дано полное описание структуры AJW-алгебр типа I_2 и, в частности, указаны кардинальнозначные инварианты, характеризующие любую такую алгебру с точностью до изоморфизма.

(3) Существуют различные классы упорядоченных и инволютивных алгебр, родственные AW^*-алгебрам и JB-алгебрам (см. работы Ш. А. Аюпова, Ш. М. Усманова и А. А. Рахимова [182], С. К. Бербериана [193], К. Р. Гудерла [237], Т. А. Сарымсакова, Ш. А. Аюпова, Дж. Хаджиева и В. И. Чилина [159], Х. Ханш-Олсена и Э. Штёрмера [244], В. И. Чилина [173]). К этим классам также успешно может быть применена техника булевозначных реализаций.

О других приложениях булевозначных моделей, примыкающих к теме настоящей главы, см. у А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [277, 279], Х. Нишимуры [328, 332], [336]–[339], М. Озавы [342]–[349], Г. Такеути [389, 390]. О несколько иных приложениях булевозначного анализа см. также у Е. И. Гордона [42, 45], В. А. Любецкого [137, 138], В. А. Любецкого и Е. И. Гордона [46, 139, 140], А. Г. Кусраева [97, 274], А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе [112], А. Г. Кусраева и С. А. Малюгина [117, 118], С. С. Кутателадзе [125]–[127], [280], Х. Нишимуры [327]–[335] и Г. Такеути [384, 388].

Литература

1. *Абдуллаев Р. З.* Неассоциативные L_p-пространства // Изв. АН УзССР. — 1983.—№ 6.—С. 3–5.
2. *Абрамович Ю. А.* Инъективные оболочки нормированных структур // Докл. АН СССР.—1971.—Т. 197, № 4.—С. 743–745.
3. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Операторы, сохраняющие дизъюнктность // Там же.—1979.—Т. 248, № 5.—С. 1033–1036.
4. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Операторы, сохраняющие дизъюнктность, их непрерывность и мультипликативное представление // Линейные операторы и их приложения: Межвуз. сб. науч. тр.—Л.: ЛГПИ, 1981.—С. 3–34.
5. *Акилов Г. П., Колесников Е. В., Кусраев А. Г.* Порядково непрерывное расширение положительного оператора // Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 29, № 5.—С. 24–55.
6. *Акилов Г. П., Колесников Е. В., Кусраев А. Г.* Лебегово расширение положительного оператора // Докл. АН СССР.—1988.—Т. 298, № 3.—С. 521–524.
7. *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.
8. *Арзикулов Ф. Н.* Об абстрактных JW-алгебрах // Сиб. мат. журн.—1998.—Т. 39, № 1.—С. 20–27.
9. *Арзикулов Ф. Н.* AJW-алгебры и приложения к теории измеримых операторов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Новосибирск: ИМ СО РАН, 1998.
10. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях.—М.: Наука, 1974.—424 с.
11. *Аюпов Ш. А.* Интегрирование на йордановых алгебрах // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1983.—Т. 47, № 1.—С. 3–25.
12. *Аюпов Ш. А.* Йордановы операторные алгебры // Итоги науки и техники. Математический анализ.—М.: ВИНИТИ, 1985.—Т. 27.—С. 67–97.
13. *Аюпов Ш. А.* Классификация и представления упорядоченных йордановых алгебр.—Ташкент: Фан, 1986.
14. *Бейдар К. И., Михалев А. В.* Ортогональная полнота и алгебраические системы // Успехи мат. наук.—1985.—Т. 40, вып. 6. —С. 79–115.
15. *Бердикулов М. А.* Пространства L_1 и L_2 для полуконечных JBW-алгебр // Докл. АН УзССР.—1982.—№ 6.—С. 3–4.
16. *Биркгоф Г.* Теория решеток.—М.: Наука, 1984.—566 с.
17. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.— М.: Мир, 1982.—511 с.
18. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов.—М.: Мир, 1972.—260 с.
19. *Бурбаки Н.* Теория множеств.—М.: Мир, 1965.—455 с.

20. *Бурбаки Н.* Интегрирование: Векторное интегрирование, меры Хаара, свертка и представления.—М.: Наука, 1970.—320 с.
21. *Бурбаки Н.* Интегрирование: Меры на локально компактных пространствах, продолжение меры, интегрирование мер, меры на отделимых пространствах.—М.: Наука, 1977.—600 с.
22. *Бухвалов А. В.* Пространства вектор-функций и тензорные произведения // Сиб. мат. журн.—1972.—Т. 13, № 6.—С. 1229–1238.
23. *Бухвалов А. В.* Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой // Докл. АН СССР.—1973.—Т. 208, № 5.—С. 1012–1015.
24. *Бухвалов А. В.* Порядково ограниченные операторы в векторных решетках и пространствах измеримых функций // Итоги науки и техники. Математический анализ.—М.: ВИНИТИ, 1988.—Т. 26.—С. 3–63.
25. *Бухвалов А. В., Векслер А. И., Гейлер В. А.* Нормированные решетки // Итоги науки и техники. Математический анализ.—М.: ВИНИТИ, 1980.—Т. 18.—С. 125–184.
26. *Бухвалов А. В., Векслер А. И., Лозановский Г. Я.* Банаховы решетки — некоторые банаховы аспекты теории // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, вып. 2.—С. 137–183.
27. *Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров Б. М.* Векторные решетки и интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1991.—214 с.
28. *Ван Хао, Мак-Нотон Р.* Аксиоматические системы теории множеств.—М.: ИЛ, 1963.—54 с.
29. *Векслер А. И.* О новой конструкции дедекиндова пополнения векторных структур и l-групп с делением // Сиб. мат. журн.—1969.—Т. 10, № 6.—С. 70–73.
30. *Векслер А. И.* Банаховы циклические пространства и банаховы структуры // Докл. АН СССР.—1973.—Т. 213, № 4.—С. 770–773.
31. *Векслер А. И., Гейлер В. А.* О порядковой и дизъюнктной полноте линейных полуупорядоченных пространств // Сиб. мат. журн.—1972.—Т. 13, № 1.—С. 43–51.
32. *Владимиров Д. А.* О счетной аддитивности булевых мер // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия.—1961.—№ 19.—С. 5–15.
33. *Владимиров Д. А.* Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.—318 с.
34. *Вопенка П.* Математика в альтернативной теории множеств.—М.: Мир, 1983.—150 с.
35. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.—407 с.
36. *Гёдель К.* Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 8, вып. 1.— С. 96–149.
37. *Гейтинг А.* Интуиционизм. Введение.—М.: Мир, 1965.
38. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики.—М.: Наука, 1979.—558 с.
39. *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков.—М.: ИЛ, 1961.
40. *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики.—М.: Мир, 1983.—488 с.
41. *Гордон Е. И.* Вещественные числа в булевозначных моделях теории мно-

жеств и K-пространства // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 237, № 4.—С. 773–775.

42. *Гордон Е. И.* K-пространства в булевозначных моделях теории множеств // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 258, № 4.—С. 777–780.
43. *Гордон Е. И.* К теоремам о сохранении соотношений в K-пространствах // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 5.—С. 55–65.
44. *Гордон Е. И.* Рационально полные полупервичные коммутативные кольца в булевозначных моделях теории множеств.—Горький: ВИНИТИ, № 3286-83Деп, 1983.—35 с.
45. *Гордон Е. И.* Элементы булевозначного анализа. Учебное пособие.—Горький: Горьковск. ун-т, 1991.
46. *Гордон Е. И., Любецкий В. А.* Некоторые применения нестандартного анализа в теории булевозначных мер // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 256, № 5. — С. 1037–1041.
47. *Гордон Е. И., Морозов С. Ф.* Булевозначные модели теории множеств.—Горький: Горьковск. ун-т, 1982.—72 с.
48. *Гретцер Г.* Общая теория решеток.—М.: Мир, 1982.—454 с.
49. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 63–211.
50. *Гутман А. Е., Лосенков Г. А.* Функциональное представление булевозначного универсума // Математические труды, 1998.—Т. 1, № 1.—С. 54–77.
51. *Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартные методы анализа и векторные решетки.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999.—379 с.
52. *Гутман А. Е.* и др. Нестандартный анализ и векторные решетки.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999.—380 с.
53. *Гутман А. Е., Рябко Д. Б.* Критерий полноты нестандартной оболочки нормированного пространства в булевозначном универсуме // Докл. РАН.—2002.—Т. 384, № 2.—-С. 153–155.
54. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория.—М.: ИЛ, 1962.—897 с.
55. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория.—М.: Мир, 1966.—664 с.
56. *Джекобсон Н.* Строение колец.—М.: ИЛ, 1961.
57. *Джонстон П. Т.* Теория топосов.—М.: Наука, 1986.—438 с.
58. *Диксмье Ж.* C^*-алгебры и их представления.—М.: Наука, 1974.—399 с.
59. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств.— Киев: Вища школа, 1980.—215 с.
60. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика.—М.: Наука, 1987.—320 с.
61. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений.—М.: Мир, 1976.—165 с.
62. *Захаров В. К., Михалев А. В.* Локальная теория классов и множеств как основание для теории категорий // Математические методы и приложения. Тр. девятых математических чтений МГСУ.—М.: МГСУ, 2002.—С. 91–94.

63. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач.—М.: Наука, 1974.—479 с.
64. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга.—М.: Мир, 1973.—150 с.
65. *Кантор Г.* Труды по теории множеств.—М.: Наука, 1985.—430 с.
66. *Канторович Л. В.* О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР.—1935.—Т. 4, № 1–2.—С. 11–14.
67. *Канторович Л. В.* К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Там же.—1936.—Т. 1, № 7.—С. 271–274.
68. *Канторович Л. В.* О некоторых классах линейных операций // Там же.—1936.—Т. 3, № 1.—С. 9–13.
69. *Канторович Л. В.* Общие формы некоторых классов линейных операций // Там же.—1936.—Т. 3, № 9.—С. 101–106.
70. *Канторович Л. В.* Об одном классе функциональных уравнений // Там же.—1936.—Т. 4, № 5.—С. 211–216.
71. *Канторович Л. В.* О функциональных уравнениях // Труды ЛГУ.—1937.—Т. 3, № 7.—С. 17–33.
72. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.
73. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.—548 с.
74. *Кейслер Г., Чен Ч.* Теория моделей.—М.: Мир, 1977.—614 с.
75. *Келли Дж. Л.* Общая топология.—М.: Наука, 1968.—383 с.
76. *Каш Ф.* Модули и кольца.—М.: Мир, 1981.—368 с.
77. *Клини С.* Математическая логика.—М.: Мир, 1973.—480 с.
78. *Кокорин А. И., Копытов В. М.* Линейно упорядоченные группы.—М.: Наука, 1972.
79. *Колдуэлл С.* Логический синтез релейных устройств.—М.: ИЛ, 1962.
80. *Колесников Е. В., Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* О мажорируемых операторах.—Новосибирск, 1988.—32 с.—(Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 26).
81. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика.—М.: Мир, 1969.—417 с.
82. *Копытов В. М.* Решеточно упорядоченные группы.—М.: Наука, 1984.—320 с.
83. *Король А. М., Чилин В. И.* Измеримые операторы в булевозначной модели теории множеств // Докл. АН УзССР.—1989.— № 3.—С. 7–9.
84. *Коэн П. Дж.* Теория множеств и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1973.—347 с.
85. *Коэн П. Дж.* Об основании теории множеств // Успехи мат. наук.—1974.—Т. 29, вып. 5.—С. 169–176.
86. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений.—М.: Физматгиз, 1962.
87. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. Метод положительных операторов.—М.: Наука, 1985.—255 с.
88. *Куратовский К.* Топология. Т. 1.—М.: Мир, 1966.—594 с.
89. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств.—М.: Мир, 1970.—416 с.

90. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре.—М.: Наука, 1973.—399 с.
91. *Кусраев А. Г.* Об одном свойстве базы K-пространства регулярных операторов и некоторых его приложениях.—Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1977.
92. *Кусраев А. Г.* Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 267, № 5.—С. 1049–1052.
93. *Кусраев А. Г.* Некоторые применения теории булевозначных моделей в функциональном анализе.—Новосибирск, 1982.—42 с.—(Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 5).
94. *Кусраев А. Г.* Общие формулы дезинтегрирования // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 6.—С. 1312–1316.
95. *Кусраев А. Г.* О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа // Докл. АН СССР.—1983.—Т. 271, № 2.—С. 283–286.
96. *Кусраев А. Г.* Порядково непрерывные функционалы в булевозначных моделях теории множеств // Сиб. мат. журн.—1984.—Т. 25, № 1.—С. 69–79.
97. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.
98. *Кусраев А. Г.* О пространствах Банаха — Канторовича // Сиб. мат. журн.—1985.—Т. 26, № 2.—С. 119–126.
99. *Кусраев А. Г.* Числовые системы в булевозначных моделях теории множеств // VIII Всесоюз. конф. по мат. логике.—М.: 1986.—С. 99.
100. *Кусраев А. Г.* Булевозначный анализ алгебраических систем.—Владикавказ: Изд-во Северо-Осетинского ун-та, 1987.—78 с.
101. *Кусраев А. Г.* Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Исследования по геометрии в «целом» и математическому анализу.—Новосибирск: Наука, 1987.—С. 84–123.
102. *Кусраев А. Г.* Элементы булевозначного анализа.—Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1987.—182 с.
103. *Кусраев А. Г.* О функциональной реализации AW^*-алгебр типа I // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 3.—С. 78–88.
104. *Кусраев А. Г.* Булевозначный анализ и JB-алгебры // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 1.—С. 124–134.
105. *Кусраев А. Г.* Булевозначный анализ инволютивных банаховых алгебр.—Владикавказ: Изд-во Северо-Осетинского ун-та, 1996.—96 с.
106. *Кусраев А. Г.* О структуре AJW-алгебр типа I_2 // Сиб. мат. журн.—1999.—Т. 40, № 4.—С. 905–917.
107. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
108. *Кусраев А. Г.* О нерасширяющих операторах // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, № 3.—С. 47–58.
109. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Анализ субдифференциалов с помощью булевозначных моделей // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 5.—С. 1061–1064.
110. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Записки по булевозначному анализу.—Новосибирск: Новосибирск. ун-т, 1984.—80 с.
111. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.—344 с.; Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1994.—435 p.

112. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992.—270 с.; Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1995.—398 p.

113. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Булевозначный анализ.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999.—383 с.; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.—322 p.

114. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* О комбинировании нестандартных методов // Сиб. мат. журн.—2000.—Т. 31, № 5.—С. 111–113.

115. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. I.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2002.—viii+372 с.

116. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. II.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2003.—viii+413 с.

117. *Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* Некоторые вопросы теории векторных мер.—Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988.—190 с.

118. *Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* Об атомическом разложении векторных мер // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 5.—С. 101–110.

119. *Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* Произведение и проективный предел векторных мер // Современные проблемы геометрии и анализа.—Новосибирск: Наука, 1989.—С. 132–152.

120. *Кусраев А. Г., Стрижевский В. З.* Решеточно нормированные пространства и мажорируемые операторы // Исследования по геометрии и функциональному анализу.—Новосибирск: Наука, 1987.—С. 132–157.

121. *Кутателадзе С. С.* Крайние точки субдифференциалов // Докл. АН СССР.—1978.—Т. 242, № 5.—С. 1001–1003.

122. *Кутателадзе С. С.* Теорема Крейна — Мильмана и ее обращение // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 1.—С. 130–138.

123. *Кутателадзе С. С.* О технике спусков и подъемов // Оптимизация.—1983.—Вып. 33.—С. 17–43.

124. *Кутателадзе С. С.* Спуски и подъемы // Докл. АН СССР.—1983.—Т. 272, № 2.—С. 521–524.

125. *Кутателадзе С. С.* Циклические монады и их применения // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 1.—С. 100–110.

126. *Кутателадзе С. С.* Монады ультрафильтров и экстенсиональных фильтров // Там же.—1989.—Т. 30, № 1.—С. 129–133.

127. *Кутателадзе С. С.* Об осколках положительных операторов // Там же.—1989.—Т. 30, № 5.—С. 111–119.

128. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—225 с.; Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1996. —276 p.

129. *Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.* Двойственность Минковского и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1976.—254 с.

130. *Лавров И. А., Максимова Л. Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.—М.: Физматлит, 2001.—256 с.

131. *Ламбек И.* Кольца и модули.—М.: Мир, 1971.—279 с.

132. *Левин В. Л.* Тензорные произведения и функторы в категории банаховых пространств, определяемые *KB*-линеалами // Докл. АН СССР.—1965.—Т. 163, № 5.—С. 1058–1060.

133. *Левин В. Л.* Тензорные произведения и функторы в категории банаховых пространств, определяемые *KB*-линеалами // Тр. Моск. мат. о-ва.—1969.—Т. 20.—С. 43–82.
134. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применения в математической экономике.—М.: Наука, 1985.—352 с.
135. *Ленг С.* Алгебра.—М.: Мир, 1968.—564 с.
136. *Лузин Н. Н.* Современное состояние теории функций действительного переменного // Тр. Всероссийского съезда математиков в Москве 27 апреля–4 мая 1927 г.—М.-Л.: Главнаука, 1928.—С. 11–32.
137. *Любецкий В. А.* О некоторых алгебраических вопросах нестандартного анализа // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 280, № 1.—С. 38–41.
138. *Любецкий В. А.* Некоторые применения теории топосов к изучению алгебраических систем // П. Т. Джонстон. Теория топосов.— М.: Наука, 1986.—С. 376–433.
139. *Любецкий В. А., Гордон Е. И.* Булевы расширения равномерных структур // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам.—М.: Наука, 1983.—С. 82–153.
140. *Любецкий В. А., Гордон Е. И.* Вложение пучков в гейтинговозначный универсум и теоремы переноса // Докл. АН СССР. —1983.—Т. 268, № 4.—С. 794–798.
141. *Маклейн С.* Гомология.—М.: Мир, 1966.
142. *Маклейн С.* Категории для работающего математика.—М.: Физматлит, 2004.—352 с.
143. *Малыхин В. И.* Новые моменты в общей топологии, связанные с форсингом // Успехи мат. наук.—1988.—Т. 43, вып. 4.—С. 83–94.
144. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы.—М.: Наука, 1970.—392 с.
145. *Манин Ю. И.* Доказуемое и недоказуемое.—М.: Сов. радио, 1979.—168 с.
146. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику.—М.: Наука, 1971.—320 с.
147. *Мерфи Дж.* C^*-алгебры и теория операторов.—М.: Факториал, 1997.—332 с.
148. *Мостовский А.* Конструктивные множества и их приложения. —М.: Мир, 1973.—256 с.
149. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца.—М.: Наука, 1968.—664 с.
150. *фон Нейман Дж.* Математические основы квантовой механики.—М.: Наука, 1964.—367 с.
151. *фон Нейман Дж.* Избранные труды по функциональному анализу. Т. 1, 2.—М.: Наука, 1987.
152. *Новиков П. С.* Избранные труды.—М.: Наука, 1973.—396 с.
153. *Партасарати К.* Введение в теорию вероятностей и теорию меры.—М.: Мир, 1983.—336 с.
154. *Проблемы Гильберта.* Под ред. П. С. Александрова.—М.: Наука, 1969.—240 с.
155. *Расёва Е., Сикорский Р.* Метаматематика математики.—М.: Наука, 1972.—592 с.
156. *Рисс Ф., Сёкефальви–Надь Б.* Лекции по функциональному анализу.—М.: Мир, 1979.—587 с.

157. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ.—М.: Мир, 1973.—470 с.
158. *Рябко Д. Б.* О некоторых свойствах непрерывного поливерсума и полноты нестандартной оболочки нормированного пространства в булевозначном универсуме: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Новосибирск: НГУ, 2003.
159. *Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И.* Упорядоченные алгебры.—Ташкент: Фан, 1983.
160. *Сикорский Р.* Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.—376 с.
161. *Самородницкий А. А.* Теория пространства Лебега — Рохлина.—Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарск. ун-та, 1997.—288 с.
162. *Соболев В. И.* О полуупорядоченной мере множеств, измеримых функциях и некоторых абстрактных интегралах // Докл. АН СССР.—1953.—Т. 91, № 1.—С. 23–26.
163. *Соловьёв Ю. П., Троицкий Е. В.* C^*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии.—М.: Факториал, 1996.—352 с.
164. *Столл Р. Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории.—М.: Просвещение, 1968.—231 с.
165. *Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ // Анализ II. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.—М.: ВИНИТИ, 1987.—Т. 14.—С. 5–102.
166. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1.—М.: Мир, 1977.—688 с.
167. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств.—М.: Мир, 1966.—555 с.
168. *Фукс Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы.—М.: Мир, 1965.—342 с.
169. *Фурман М. П.* Логика топосов // Справочная книга по математической логике.—М.: Наука, 1983.—Ч. 4.—С. 241–277.
170. *Халмош П.* Теория меры.—М.: Факториал, 2003.—256 с.
171. *Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г.* Основы теории категорий.—М.: Наука, 1974.—256 с.
172. *Чёрч А.* Введение в математическую логику.—М.: ИЛ, 1965.—488 с.
173. *Чилин В. И.* Частично упорядоченные бэровские инволютивные алгебры // Современные проблемы математики. Новейшие достижения.—М.: ВИНИТИ, 1985.—Т. 27.—С. 99–128.
174. *Чупин Н. А.* О проблеме 18 из книги Гудерла ‘Регулярные кольца фон Неймана’ // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 1.—С. 132-137.
175. *Шенфильд Дж. Р.* Математическая логика.—М.: Наука, 1975.—520 с.
176. *Шенфильд Дж. Р.* Аксиомы теории множеств // Справочная книга по математической логике.—М.: Наука, 1982.—Ч. 2.—С. 9–34.
177. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера и производная.—М.: Наука, 1967.—212 с.
178. *Шотаев Г. Н.* О билинейных операторах в решеточно нормированных пространствах // Оптимизация.—1986.—Вып. 37.— С. 38–50.
179. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ: Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1071 с.
180. *Энгелькинг Р.* Общая топология.—М.: Мир, 1986.—751 с.
181. *Яглом И. М.* Булева структура и ее модели.—М.: Сов. радио, 1980.—192 с.

182. *Ajupov Sh. A, Usmanov Sh. M., Rakhimov A. A.* Jordan Real and Li Structures in Operator Algebras.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.—225 p.
183. *Alfsen E. M., Shultz F. W., Størmer E.* A Gel′fand — Neumark theorem for Jordan algebras // Adv. in Math.—1978.—V. 28, No. 1.—P. 11–56.
184. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Locally Solid Riesz Spaces.—New York etc.: Academic Press, 1978.—xii+198 p
185. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—New York: Academic Press, 1985.—367 p.
186. *Anderson M., Feil T.* Lattice-Ordered Groups. An Introduction.—Dordrecht etc.: Reidel Publishing Company, 1988.—vii+190 p.
187. *Arens R. F., Kaplansky I.* Topological representation of algebras // Trans. Amer. Math. Soc.—1948.—V. 63, No. 3.— P. 457–481.
188. *Arveson W.* An Invitation to C^*-Algebras.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1976.—106 p.
189. *Badé W. G.* On Boolean algebras of projections and algebras of operators // Trans. Amer. Math. Soc.—1955.—V. 80.—P. 343–359.
190. *Badé W. G.* A multiplicity theory for Boolean algebras of projections in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1958.—V. 92.—P. 508–530.
191. *Bell J. L.* Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—New York etc.: Clarendon Press, 1985.—xx+165 p.
192. *Bell J. L., Slomson A. B.* Models and Ultraproducts: an Introduction.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1969.—ix+322 p.
193. *Berberian S. K.* Baer $*$-Rings.—Berlin: Springer-Verlag, 1972.—xii+296 p.
194. *Berberian S. K.* Normality and embedding of AW^*-algebras // Bull. London Math. Soc.—1983.—V. 15.—P. 255–259.
195. *Bigard A., Keimel K., Wolfenstein S.* Groupes et Anneaux Réticulés, —Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977.—xi+334 p. (Lecture Notes in Math.; 608.)
196. *Bishop E., Bridges D.* Constructive Analysis.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1985.
197. *Blumenthal L. M.* Theory and Applications of Distance Geometry. —Oxford: Clarendon Press, 1953.—xi+347 p.
198. *Boole G.* An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.— New York: Dover, 1957.—xi+424 p.
199. *Boole G.* Selected Manuscripts on Logic and Its Philosophy.—Basel: Birkhäuser-Verlag, 1997.—xiv+236 p. (Science Networks. Historical Studies; 20.)
200. *Buck R. C.* Multiplication operators // Pacific J. Math.—1961.—V. 11.—P. 95–103.
201. *Burden C. W., Mulvey C. J.* Banach spaces in categories of sheaves // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 169–196. (Lecture Notes in Math.; 753.)
202. *Ciesielski K.* Set Theory for the Working Mathematician.—Cambridge, Cambridge University Press, 1997.—xi+236 p.
203. *Cignoli A.* A Hahn–Banach theorem for distributive lattices // Rev. Un. Mat. Argentina.—1971.—V. 25.—P. 335–342.

204. *Cohen P.* The discovery of forcing // Rocky Mountain J. Math.—2001.—V. 32, No. 4.—P. 1071–1100.

205. *Conrad P. F., Diem J. E.* The ring of polar preserving endomorphisms of an abelian lattice-ordered group // Illinois J. Math.—1971.—V. 15.—P. 222–240.

206. *Dales H., Woodin W.* An Introduction to Independence for Analysts.—Cambridge: Cambridge University Press, 1987.—viii +242 p.

207. *Day M.* Normed Linear Spaces.—New York; Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.—viii+211 p.

208. *Diaconescu R.* Axiom of choice and complementation // Proc. Amer. Math. Soc.— 1975.— V. 51.— P. 176–178.

209. *Diestel J., Uhl J. J.* Vector Measures.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1977.—322 p.—(Math. Surveys; 15.)

210. *Dinculeanu N.* Vector Measures.—Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.—432 p.

211. *Dixmier J.* Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs // Bull. Soc. Math. France.—1951.—V. 81.—P. 9–39.

212. *Dixmier J.* C^*-Algebras.—Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland, 1977.—xiii+492 p.

213. *Dixmier J.* Les Algebres d'Operateurs dans l'Espace Hilbertien (Algebres de von Neumann).—Paris: Gauthier–Villars, 1996.—x+367 p.

214. *Dragalin A. G.* An explicit Boolean-valued model for nonstandard arithmetic // Publ. Math. Debrecen.—1993.—V. 42, No. 3–4.—P. 369–389.

215. *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear Operators. Vol. 1: General Theory.—New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.—xiv+858 p.

216. *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear Operators. Vol. 2: Spectral Theory. Selfadjoint Operators in Hilbert Space.—New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.—P. i–x, 859–1923; 1–7.

217. *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear Operators. Vol. 3: Spectral Operators.—New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.—P. i–xx+1925–2592.

218. *Eda K.* A Boolean power and a direct product of abelian groups // Tsukuba J. Math.—1982.—V. 6, No. 2.—P. 187–194.

219. *Eda K.* On a Boolean power of a torsion free abelian group // J. Algebra.—1983.—V. 82, No. 1.—P. 84–93.

220. *Ellis D.* Geometry in abstract distance spaces // Publ. Math. Debrecen.— 1951.—V. 2.—P. 1–25.

221. *Ellis H. W., Halperin I.* Function spaces determined by a levelling length function // Canad. J. Math.—1953.—V. 5, No. 4.—P. 576–592.

222. *Espanol L.* Dimension of Boolean valued lattices and rings // J. Pure Appl. Algebra.—1986.—No. 42.—P. 223–236.

223. *Foster A. L.* Generalized 'Boolean' theory of universal algebras. I. Subdirect sums and normal representation theorems // Math. Z.—1953.—V. 58, No. 3.—P. 306–336.

224. *Foster A. L.* Generalized 'Boolean' theory of universal algebras. II. Identities and subdirect sums of functionally complete algebras // Math. Z.—1953.—V. 59, No. 2.—P. 191–199.

225. *Fourman M. P., Mulvey C. J., Scott D. S.* (eds.) Applications of Sheaves // Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic. Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977.—Berlin: Springer-Verlag, 1979.
226. *Fourman M. P., Scott D. S.* Sheaves and logic // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 302–401.
227. *Frank M.* Geometrical aspects of Hilbert C^*-modules // Positivity.— 1999.—V. 3, No. 3.—P. 215–243.
228. *Fremlin D. H.* Abstract Köthe spaces. II // Proc. Cambridge Philos. Soc.—1967.—V. 63, No. 4.—P. 951–956.
229. *Fremlin D. H.* Topological Riesz Spaces and Measure Theory.—Cambridge: Cambridge University Press, 1974.—xiv+266 p.
230. *Freyd P.* Aspects of topoi // Bull. Austral. Math. Soc.—1972.—No. 7.—P. 1–76.
231. *Fukamiya M., Misonou M., Takeda Z.* On order and commutativity of B^*-algebras // Tôhoku Math. J.—1954.—V. 6.—P. 89–93.
232. *Georgescu G., Voiculescu I.* Eastern model theory for Boolean-valued theories // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1985.—No. 31.—P. 79–88.
233. *Gierz G.* Bundles of Topological Vector Spaces and Their Duality.—Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1982.—iv+296 p. (Lecture Notes in Math.; 955.)
234. *Gillman L., Jerison M.* Rings of Continuous Functions.—New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1976.—xiii+300 p. (Graduate Texts in Math.; 43.)
235. *Gödel K.* What is Cantor's continuum problem // Amer. Math. Monthly.—1947.—V. 54, No. 9.—P. 515–525.
236. *Godement R.* Théorie générale des sommes continues d'espaces de Banach // C. R. Acad. Sci. Paris.—1949.—V. 228.—P. 1321–1323.
237. *Goodearl K. R.* Von Neumann Regular Rings.—Malabar, Fl: Krieger Publishing Company, 1991.—xvi+412 p.
238. *Grayson R. J.* Heyting-valued models for intuitionistic set theory // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 40.
239. *Grothendieck A., Verdier J. L.* Théorie des Topos.— Berlin etc.: Springer-Verlag, 1972. (SGA 4, Exposés I–VI).
240. *Gutman A. E.* Locally one-dimensional K-spaces and σ-distributive Boolean algebras // Siberian Adv. Math.—1995.—V. 5, No. 2. —P. 99–121.
241. *Gutman A. E.* Disjointness preserving operators // Vector lattices and integral operators / Ed. S. S. Kutateladze.—Dordrecht etc.: Kluwer, 1996.—P. 361–454.
242. *Hallet M.* Cantorian Set Theory and Limitation of Size.—Oxford: Clarendon Press, 1984.—xix+343 p.
243. *Halmos P. R.* Lectures on Boolean Algebras.—Toronto; New York; London: Van Nostrand, 1963.—147 p.
244. *Hanche-Olsen H., Størmer E.* Jordan Operator Algebras.—Boston etc.: Pitman Advanced Publishing Program, 1984.—viii+183 p.—(Monogr. Stud. in Math.; 21.)
245. *Hernandez E. G.* Boolean-valued models of set theory with automorphisms // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1986.—V. 32, No. 2.—P. 117–130.
246. *Hoehle U.* Almost everywhere convergence and Boolean-valued topologies /

Topology, Proc. 5th Int. Meet., Lecce/Italy 1990, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. 29.—1992.—P. 215–227.

247. *Hofmann K. H., Keimel K.* Sheaf theoretical concepts in analysis: Bundles and sheaves of Banach spaces, Banach $C(X)$-modules // Applications of Sheaves. Proc. Res. Symp., Durham 1977.—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 415–441.—(Lecture Notes in Math.; 753.)
248. *Hofstedter D. R.* Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid.—New York: Vintage Books, 1980.—778 p.
249. *Horiguchi H.* A definition of the category of Boolean-valued models // Comment. Math. Univ. St. Paul.—1981.—V. 30, No. 2.—P. 135–147.
250. *Horiguchi H.* The category of Boolean-valued models and its applications // Comment. Math. Univ. St. Paul.—1985.—V. 34, No. 1.—P. 71–89.
251. *Iochum B.* Non associative L_p-spaces // Pacific J. Math.—1986.—V. 122, No. 2.—P. 417–433.
252. *Ionescu Tulcea A., Ionescu Tulcea C.* Topics in the Theory of Lifting.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1969.—190 p.
253. *Jameson G. J. O.* Ordered Linear Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1970.—194 p.—(Lecture Notes in Math.; 141.)
254. *Jech T. J.* The Axiom of Choice.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1973.—xi+202 p.
255. *Jech T. J.* Abstract theory of abelian operator algebras: an application of forcing // Trans. Amer. Math. Soc.—1985.—V. 289, No. 1.—P. 133–162.
256. *Jech T. J.* First order theory of complete Stonean algebras (Boolean-valued real and complex numbers) // Canad. Math. Bull.—1987.—T. 30, No. 4.—P. 385–392.
257. *Jech T. J.* Boolean-linear spaces // Adv. in Math. — 1990. — V. 81, No. 2. — P. 117–197.
258. *Jech T. J.* Set Theory.—Berlin: Springer-Verlag, 1997.—634 p.
259. *Johnstone P. T.* Stone Spaces.—Cambridge; New York: Cambridge University Press, 1986.—xxi+370 p.
260. *Johnstone P. T.* Sketches of an Elephant. A Topos Theory Compendium.—Oxford: Clarendon Press, 2002.—1600 p.—(Oxford Logic Guides; 438.)
261. *de Jonge E., van Rooij A. C. M.* Introduction to Riesz Spaces.—Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977.
262. *Jordan P., von Neumann J., Wigner E.* On an algebraic generalization of the quantum mechanic formalism // Ann. Math.—1944.—V. 35.—P. 29–64.
263. *Kadison R. V., Ringrose J. R.* Fundamentals of the Theory of Operator Algebras.—Vol. 1, 2.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. Vol. 3, 4.—Boston: Birkhäuser Boston, Inc., 1991–1992.
264. *Kan D. M.* Adjoint functors // Trans. Amer. Math. Soc. — 1958. — V. 87. — P. 294–329.
265. *Kantorovich L. V.* The method of successive approximation for functional equations // Acta Math.—1939.—V. 71.—P. 63–97.
266. *Kaplansky I.* Projections in Banach algebras // Ann. of Math. (2).—1951.—V. 53.—P. 235–249.
267. *Kaplansky I.* The structure of certain operator algebras // Trans. Amer. Math. Soc.—1951.—V. 70.—P. 219–255.

268. *Kaplansky I.* Algebras of type I // Ann. of Math. (2).—1952.—V. 56.—P. 460–472.
269. *Kaplansky I.* Modules over operator algebras // Amer. J. Math.—1953.—V. 75, No. 4.—P. 839–858.
270. *Kock A., Wraith C.* Elementary Toposes.—Aarhus: Matematisk Institut, Aarhus Universitet, 1971.—118 p.—(Lecture Notes Series; 30.)
271. *Kramosil I.* Comparing alternative definitions of Boolean-valued fuzzy sets // Kybernetika.—1992.—V. 28, No. 6.—P. 425–443.
272. *Kripke S.* An extension of a theorem of Gaifman–Hales–Solovay // Fund. Math.—1967.—V. 61.—P. 29–32.
273. *Kurepa G.* Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo-distanciés // C. R. Acad. Sci.—1934.—V. 198.—P. 1563–1565.
274. *Kusraev A. G.* On Boolean valued convex analysis // Mathematische Optimierung. Theorie und Anwendungen. Wartburg/Eisenach.—1983.—P. 106–109.
275. *Kusraev A. G.* Dominated operators. IV // Siberian Adv. Math.—1995.—V. 5, No. 2.—P. 99–121.
276. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Nonstandard methods for Kantorovich spaces // Siberian Adv. Math.—1992.—V. 2, No. 2. —P. 114–152.
277. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Nonstandard methods in geometric functional analysis // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.—1992.—V. 151.—P. 91–105.
278. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Boolean-valued introduction to the theory of vector lattices // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.—1995.—V. 163.—P. 103–126.
279. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Nonstandard methods in functional analysis // Interaction Between Functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability Theory.—New York: Marcel Deccer Inc., 1995.—P. 301–306.
280. *Kutateladze S. S.* Nonstandard tools for convex analysis // Math. Japon.—1996.—V. 43, No. 2.—P. 391–410.
281. *Lacey H. E.* The Isometric Theory of Classical Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—x+270 p.
282. *Lance E. C.* Hilbert C^*-Modules. A Toolkit for Operator Algebraists.—Cambridge: Univ. Press, 1995.—ix+130 p.—(London Math. Soc. Lecture Note Series; 210.)
283. *Larsen R.* Banach Algebras. An Introduction.—New York: Marcel Dekker, Inc., 1973.—x+345 p.—(Pure Appl. Math.; 24.)
284. *Lawvere F. W.* Continuously variable sets: algebraic geometry = geometric logic // Proc. A. S. L. Logic Colloq., Bristol, 1973.—North-Holland, 1975.—P. 135–156.
285. *Levy A.* Definability in Axiomatic Set Theory I // Proc. of the International Congress on Logic, Methodology, and Philosophy of Science.—Amsterdam: North Holland, 1965.
286. *Levy A.* The definability of cardinal numbers// Found. Math., Sympos. Papers Commem. 60th Birthday K. Gödel, Columbus 1966.—1969.—P. 15–38.
287. *Levy A.* Definability in axiomatic set theory. II // Math. Logic Found. Set Theory, Proc. Int. Colloq., Jerusalem 1968.—1970.—P. 129–145.
288. *Levy A.* Basic Set Theory.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—xiv+391 p.
289. *Li N.* The Boolean-valued model of the axiom system of GB // Chinese Sci. Bull.—1991.—V. 36, No. 2.—P. 99–102.

290. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1973.

291. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. Vol. 1: Sequence Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977.—xiii+188 p.

292. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. Vol. 2: Function Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—x+243 p.

293. *Locher J. L.* (ed.) The World of M. C. Escher.—New York: Abradale Press, 1988.

294. *Lowen R.* Mathematics and fuzziness // Fuzzy Sets Theory and Applications (Louvain-la-Neuve, 1985), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., 177.—Reidel, Dordrecht, and Boston, 1986.—P. 3–38.

295. *Luxemburg W. A. J., de Pagter B.* Maharam extension of positive operators and f-algebras // Positivity.—2002.—V. 6, № 2.—P. 147–190.

296. *Luxemburg W. A. J., Schep A.* A Radon–Nikodým type theorem for positive operators and a dual // Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A.—1978.—V. 40.—P. 357–375.

297. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz Spaces. Vol. 1.—Amsterdam; London: North-Holland, 1971.—514 p.

298. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* The linear modulus of an order bounded linear transformation // Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch.—1971.—V. A74, No. 5.—P. 422–447.

299. *McPolin P. T. N., Wickstead A. W.* The order boundedness of band preserving operators on uniformly complete vector lattices // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.—1985.—V. 97, № 3.—P. 481–487.

300. *Maharam D.* The representation of abstract measure functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1949.—V. 65, No. 2.—P. 279–330.

301. *Maharam D.* Decompositions of measure algebras and spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1950.—V. 69, No. 1.—P. 142–160.

302. *Maharam D.* The representation of abstract integrals // Trans. Amer. Math. Soc.—1953.—V. 75, No. 1.—P. 154–184.

303. *Maharam D.* On kernel representation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc.—1955.—V. 79, No. 1.—P. 229–255.

304. *Maharam D.* On a theorem of von Neumann // Proc. Amer. Math. Soc.—1958.—V. 9.—P. 987–994.

305. *Maharam D.* On positive operators // Contemp. Math.—1984.—V. 26.—P. 263–277.

306. *Matthes K.* Uber die Ausdehnung $\aleph$-Homomorphismen Boolescher Algebren // Z. Math. Logik. Grundlag. Math.—1960.—V. 6.—P. 97–105.

307. *Matthes K.* Uber die Ausdehnung $\aleph$-Homomorphismen Boolescher Algebren. II // Z. Math. Logik. Grundlag. Math.—1961.—V. 7.—P. 16–19.

308. *MacLarty C.* Uses and abuses of the history of topos theory// Brit. J. Phil. Sci.—1990.—V. 41.—P. 351–375.

309. *Melter R.* Boolean valued rings and Boolean metric spaces // Arch. Math.—1964.—No. 15.—P. 354–363.

310. *Meyer M.* Le stabilisateur d'un espace vectoriel réticulé // C. R. Acad. Sci. Ser. A.—1976.—V. 283.—P. 249–250.

311. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1991.—xv+395 p.

312. *Mikkelsen C. J.* Lattice Theoretic and Logical Aspects of Elementary Topoi.—Aarhus: Aarhus Universitet, 1976.—iv+122 p.—(Various Publ. Ser.; 25.)
313. *Milvay C. J.* Banach sheaves // J. Pure Appl. Algebra.—1980.—V. 17, No. 1.—P. 69–84.
314. *Mitchell W.* Boolean topoi and the theory of sets // J. Pure Appl. Algebra.—1972.—V. 2.—P. 261–274.
315. *Molchanov I. S.* Set-valued estimators for mean bodies related to Boolean models // Statistics 28.—1996.—No. 1.—P. 43–56.
316. *Monk J. D., Bonnet R.* (eds.) Handbook of Boolean Algebras. Vol. 1–3.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1989.— xix+1367 p.
317. *Monteiro A.* Généralization d'un théorème de R. Sikorski sur les algèbres Bool // Bull. Sci. Math.—1965.—V. 89, No. 2.—P. 65–74.
318. *Murray F. J., von Neumann J.* On rings of operators. I // Ann. Math.—1936.—V. 37.—P. 116–229.
319. *Murray F. J., von Neumann J.* On rings of operators. II // Trans. Amer. Math. Soc.—1937.—V. 41.—P. 208–248.
320. *Murray F. J., von Neumann J.* On rings of operators. IV // Ann. Math.—1943.—V. 44.—P. 716–808.
321. *Nakano H.* Teilweise geordnete algebra // Japan J. Math. — 1950.— V. 17. — P. 425–511.
322. *Namba K.* Formal systems and Boolean valued combinatorics // Southeast Asian Conference on Logic (Singapore, 1981). Stud. Logic Found. Math., 111, Amsterdam; New York: North-Holland, 1983.—P. 115–132.
323. *Nelson E.* Notes on non-commutative integration // J. Funct.—1974.—No. 15.—P. 103–116.
324. *von Neumann J.* On rings of operators. III // Ann. Math. — 1940. — V. 41. — P. 94–161.
325. *von Neumann J.* Collected Works. Vol. 3: Rings of Operators.—New York, Oxford, London, and Paris: Pergamon Press, 1961.—ix+574 p.
326. *von Neumann J.* Collected Works. Vol. 4: Continuous Geometry and Other Topics.—Oxford; London; New York; Paris: Pergamon Press, 1962.—x+516 p.
327. *Nishimura H.* An approach to the dimension theory of continuous geometry from the standpoint of Boolean valued analysis // Publ. Res. Inst. Math. Sci.—1984.—V. 20, No. 5.—P. 1091–1101.
328. *Nishimura H.* Boolean valued decomposition theory of states // Publ. Res. Inst. Math. Sci.—1985.—V. 21, No. 5.—P. 1051–1058.
329. *Nishimura H.* Some applications of Boolean-valued set theory to abstract harmonic analysis on locally compact groups // Publ. Res. Inst. Math. Sci.—1985.—V. 21, No. 1.—P. 181–190.
330. *Nishimura H.* Heyting valued set theory and fibre bundles // Publ. Res. Inst. Math. Sci.—1988.—V. 24, No. 2.—P. 225–247.
331. *Nishimura H.* On the absoluteness of types in Boolean valued lattices // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1990.—V. 36, No. 3.—P. 241–246.

332. *Nishimura H.* Some connections between Boolean valued analysis and topological reduction theory for C^*-algebras // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1990.—V. 36, No. 5.—P. 471–479.
333. *Nishimura H.* Boolean valued Dedekind domains // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1991.—V. 37, No. 1.—P. 65–76.
334. *Nishimura H.* Boolean valued Lie algebras // J. Symbolic Logic.—1991.—V. 56, No. 2.—P. 731–741.
335. *Nishimura H.* Foundations of Boolean-valued algebraic geometry // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1991.—V. 37, No. 5.—P. 421–438.
336. *Nishimura H.* Some Boolean valued commutative algebra // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1991.—V. 37, No. 4.—P. 367–384.
337. *Nishimura H.* On a duality between Boolean valued analysis and topological reduction theory // Math. Logic Quart.—1993.—V. 39, No. 1.—P. 23–32.
338. *Nishimura H.* On the duality between Boolean-valued analysis and reduction theory under the assumption of separability // Internat. J. Theoret. Phys.—1993.—V. 32, No. 3.—P. 443–488.
339. *Nishimura H.* A Boolean-valued approach to Gleason's theorem // Rep. Math. Phys.—1994.—V. 34, No. 2.—P. 125–132.
340. *Nishimura H.* Boolean valued and Stone algebra valued measure theories // Math. Logic Quart.—1994.—V. 40, No. 1.—P. 69–75.
341. *Nöbeling G.* Grundlangen Der Analytischen Topologie.—Berlin: Springer-Verlag, 1954.—221 p.
342. *Ozawa M.* Boolean valued analysis and type I AW^*-algebras // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.—1983.—V. 59A, No. 8.—P. 368–371.
343. *Ozawa M.* Boolean valued interpretation of Hilbert space theory // J. Math. Soc. Japan.—1983.—V. 35, No. 4.—P. 609–627.
344. *Ozawa M.* A classification of type I AW^*-algebras and Boolean valued analysis // J. Math. Soc. Japan.—1984.—V. 36, No. 4.—P. 589–608.
345. *Ozawa M.* A transfer principle from von Neumann algebras to AW^*-algebras // J. London Math. Soc.—1985.—V. 32, No. 1. —P. 141–148.
346. *Ozawa M.* Nonuniqueness of the cardinality attached to homogeneous AW^*-algebras // Proc. Amer. Math. Soc.—1985.—V. 93.—P. 681–684.
347. *Ozawa M.* Boolean valued analysis approach to the trace problem of AW^*-algebras // J. London Math. Soc. —1986.—V. 33, No. 2.—P. 347–354.
348. *Ozawa M.* Embeddable AW^*-algebras and regular completions // J. London Math. Soc.—1986.—V. 34, No. 3.—P. 511–523.
349. *Ozawa M.* Boolean-valued interpretation of Banach space theory and module structures of von Neumann algebras // Nagoya Math. J.—1990.—V. 117.—P. 1–36.
350. *Paschke W. L.* Inner product spaces over B^*-algebras // Trans. Amer. Math. Soc.—1973.—V. 182.—P. 443–468.
351. *Pedersen G. K.* Analysis Now.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1995.—277 p.
352. *Phuong-Các N.* Generalized Köthe function spaces. I // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.—1969.—V. 65, No. 3.—P. 601–611.
353. *Pierce R. S.* Modules over commutative regular rings // Mem. Amer. Math. Soc.—1967.—No. 70.—112 p.

354. *Pinus A. G.* Boolean Constructions in Universal Algebras.—Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1993.—vii+350 p.
355. *Piser G., Xu Q.* Non-Commutative L^p-Spaces.—Paris, 2002.—57 p.
356. *Rema P.* S. Boolean metrization and topological spaces // Math. Japon.—1964.—V. 9, No. 9.—P. 19–30.
357. *Repicky M.* Cardinal characteristics of the real line and Boolean-valued models // Comment. Math. Univ. Carolin.—1992.—V. 33, No. 1.—P. 184.
358. *Rickart Ch.* General Theory of Banach Algebras.—Princeton: Van Nostrand, 1960.—xi+394 p.
359. *Riečan B.* An extension of the Daniel integration scheme // Mat. Čas.—1975.—V. 25, No. 3.—P. 211–219.
360. *Riesz F.* Sur la décomposition des opérations fonctionnelles // Atti Congresso Intern. Bologna, 1928.—1930.—V. 3.—P. 143–148.
361. *Rosser J. B.* Simplified Independence Proofs. Boolean Valued Models of Set Theory.—New York; London: Academic Press, 1969.—xv+217 p.
362. *Rudin W.* Functional Analysis.—New York: McGraw-Hill, Inc., 1991.—xviii+424 p.
363. *Russel B., Whitehead A. N.* Principa Mathematica. I–III.—Cambridge: Cambridge University Press, 1910–1913.
364. *Sakai S.* C^*-Algebras and W^*-Algebras.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.—256 p.
365. *Samuel P.* On universal mappings and free topological groups // Bull. Amer. Math. Soc.—1948.—V. 54.—P. 591.—598.
366. *Saracino D., Weispfenning V.* On algebraic curves over commutative regular rings // Model Theory and Algebra (a Memorial Tribute to Abraham Robinson).—New York etc.: Springer-Verlag, 1969.—P. 306–383.—(Lecture Notes in Math.; 498.)
367. *Schaefer H. H.* Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—376 p.
368. *Schochetman I. E.* Kernels and integral operators for continuous sums of Banach spaces // Mem. Amer. Math. Soc.—1978.—V. 14, No. 202.—P. 1–120.
369. *Schröder J.* Das Iterationsverfahren bei allgemeinierem Abshtandsbegriff // Math. Z.—1956.—Bd. 66.—S. 111–116.
370. *Schwarz H.-V.* Banach Lattices and Operators.—Leipzig: Teubner, 1984.—208 p.
371. *Segal I.* A non-commutative extension of abstract integrat // Ann. Math.—1953.—V. 57.—P. 401–457.
372. *Semadeni Zb.* Banach Spaces of Continuous Functions.—Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1971.—584 p.
373. *Shultz F. W.* On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces // J. Funct. Anal.—1979.—V. 31.—P. 360–376.
374. *Sikorskiĭ M. R.* Some applications of Boolean-valued models to study operators on polynormed spaces // Sov. Math.—1989.—V. 33, No. 2.—P. 106–110.
375. *Smith K.* Commutative regular rings and Boolean-valued fields // J. Symbolic Logic.—1984.—V. 49, No. 1.—P. 281–297.
376. *Solovay R. M.* New proof of a theorem of Gaifman and Hales // Bull. Amer. Math. Soc.—1966.—V. 72.—P. 282–284.

377. *Solovay R. M.* A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. of Math. (2).—1970.—V. 92, No. 2.—P. 1–56.
378. *Solovay R. M.* Real-valued measurable cardinals // Axiomatic Set Theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 13, Part 1, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967).—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1971.—P. 397–428.
379. *Solovay R., Tennenbaum S.* Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math.—1972.—V. 94, No. 2.—P. 201–245.
380. *Spivak M. D.* The Joy of TEX.— Providence: Amer. Math. Soc., 1990.—xv+309 p.
381. *Størmer E.* Jordan algebras of type I // Acta Math.—1966.—V. 115, No. 3–4.—P. 165–184.
382. *Sunder V. S.* An Invitation to Von Neumann Algebras.—New York etc.: Springer-Verlag, 1987.—171 p.
383. *Takesaki M.* Theory of Operator Algebras. Vol. 1.—New York: Springer-Verlag, 1979.—vii+415 p.
384. *Takeuti G.* Two Applications of Logic to Mathematics.—Tokyo; Princeton: Iwanami; Princeton Univ. Press, 1978.—137 p.
385. *Takeuti G.* A transfer principle in harmonic analysis // J. Symbolic Logic.—1979.—V. 44, No. 3.—P. 417–440.
386. *Takeuti G.* Boolean valued analysis // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—P. 714–731.—(Lecture Notes in Math.; 753.)
387. *Takeuti G.* Quantum set theory // Current Issues in Quantum Logic (Erice, 1979).—New York; London: Plenum Press, 1981.—P. 303–322.
388. *Takeuti G.* Boolean completion and m-convergence // Categorical Aspects of Topology and Analysis (Ottawa, Ont., 1980).—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1982.—P. 333–350.—(Lecture Notes in Math.; 915.)
389. *Takeuti G.* C^*-algebras and Boolean valued analysis // Japan. J. Math. (N.S.).—1983.—V. 9, No. 2.—P. 207–246.
390. *Takeuti G.* Von Neumann algebras and Boolean valued analysis // J. Math. Soc. Japan.—1983.—V. 35, No. 1.—P. 1–21.
391. *Takeuti G., Titani S.* Heyting-valued universes of intuitionistic set theory // Logic Symposia, Hakone 1979, 1980 (Hakone, 1979/1980).—Berlin; New York: Springer-Verlag, 1981.—P. 189–306.—(Lecture Notes in Math.; 891.)
392. *Takeuti G., Titani S.* Globalization of intuitionistic set theory // Ann. Pure Appl. Logic.—1987.—V. 33, No. 2.—P. 195–211.
393. *Takeuti G., Zaring W. M.* Introduction to Axiomatic Set Theory.—New York etc.: Springer-Verlag, 1971.—348 p.
394. *Takeuti G., Zaring W. M.* Axiomatic Set Theory.—New York: Springer-Verlag, 1973.—238 p.
395. *Tkadlec J.* Boolean orthoposets and two-valued Jauch–Piron states // Tatra Mt. Math. Publ.—1993.—No. 3.—P. 155–160.
396. *Topping D. M.* Jordan algebras of self-adjoint operators // Mem. Amer. Math. Soc.—1965.—Vol. 53.
397. *Venkataraman K.* Boolean valued almost periodic functions: existence of the mean // J. Indian Math. Soc. (N.S.).—1979.—V. 43, No. 1–4.—P. 275–283.

398. *Venkataraman K.* Boolean valued almost periodic functions on topological groups // J. Indian Math. Soc. (N.S.).—1984.—V. 48, No. 1–4.—P. 153–164.
399. *Vopěnka P.* General theory of $\bigtriangledown$-models // Comment. Math. Univ. Carolin.—1967.—V. 7, No. 1.—P. 147–170.
400. *Vopěnka P.* The limits of sheaves over extremally disconnected compact Hausdorff spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.—1967.—V. 15, No. 1.—P. 1–4.
401. *Wickstead A. W.* Representation and duality of multiplication operators on Archimedean Riesz spaces // Compositio Math.—1977.—V. 35, No. 3.—P. 225–238.
402. *Wong Y.-Ch., Ng K.-F.* Partially Ordered Topological Vector Spaces.—Oxford: Clarendon Press, 1973.—217 p.
403. *Wright J. D. M.* Vector lattice measures on locally compact spaces // Math. Z.—1971.—V. 120, No. 3.—P. 193–203.
404. *Wright J. D. M.* The solution of a problem of Sikorski and Mattes // Bull. London Math. Soc.—1971.—V. 3.—P. 52–54.
405. *Yamaguchi J.* Boolean $[0,1]$-valued continuous operators // Internat. J. Comput. Math.—1998.—V. 68, No. 1–2.—P. 71–79.
406. *Yedon F. J.* Non-commutative L_p-spaces // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.—1975.—V. 77.—P. 91–102.
407. *Yood B.* Banach Algebras—An Introduction.—Ottawa: Carleton Univ., 1988.—174 p.
408. *Zaanen A. C.* Riesz Spaces. Vol. 2. — Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—xi+720 p.
409. *Zaanen A. C.* Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1997.—312 p.
410. *Zakharov V. K., Mikhalev A. V.* The MacLane problem on the set-theoretic foundation for category theory: II // J. Math. Sci.—2003.—V. 114, No. 2.—P. 1067–1085.
411. *Zhang Jin-wen.* A unified treatment of fuzzy set theory and Boolean valued set theory fuzzy set structures and normal fuzzy set structures // J. Math. Anal. Appl.—1980.—V. 76, No. 1.—P. 297–301.
412. *Zhang Jin-wen.* Between fuzzy set theory and Boolean valued set theory // Fuzzy Information and Decision Processes.—Amsterdam; New York: North-Holland, 1982.—P. 143–147.

Именной указатель

Предметный указатель

Указатель символов

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел,
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел,
$\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел,
$\mathbb{R}$ — поле действительных чисел,
$\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

Оглавление

Introduction to Boolean Valued Analysis

A. G. KUSRAEV and S. S. KUTATELADZE

Preface

As the title implies, the present book treats *Boolean valued analysis*. This term signifies the technique of studying properties of an arbitrary mathematical object by means of comparison between its representations in two different set-theoretic models whose construction utilizes principally distinct Boolean algebras. As these models, we usually take the classical Cantorian paradise in the shape of the von Neumann universe and a specially-trimmed Boolean valued universe in which the conventional set-theoretic concepts and propositions acquire bizarre interpretations. Usage of two models for studying a single object is a family feature of the so-called *nonstandard methods of analysis*. For this reason, Boolean valued analysis means an instance of nonstandard analysis in common parlance.

Proliferation of Boolean valued analysis stems from the celebrated achievement of P. J. Cohen who proved in the beginning of the 1960s that the negation of the continuum hypothesis, CH, is consistent with the axioms of Zermelo–Fraenkel set theory, ZFC. This result by Cohen, together with consistency of CH with ZFC established earlier by K. Gödel, proves that CH is independent of the conventional axioms of ZFC.

The genuine value of the great step forward by Cohen could be understood better in connection with the serious difficulty explicated by J. Shepherdson and absent from the case settled by Gödel. The crux of the Shepherdson observation lies in impossibility of proving the consistency of (ZFC) + ($\neg$ CH) by means of standard models of set theory. Strictly speaking, we can never find a subclass of an arbitrary chosen representation of the von Neumann universe which models (ZFC) + ($\neg$ CH) provided that we use the available interpretation of membership. Cohen succeeded in inventing a new powerful method for constructing noninternal, *nonstandard*, models of ZFC. He coined the term *forcing*.The technique by Cohen invokes the axiom of existence of a standard transitive model of ZFC in company with the forcible and forceful transformation of the latter into an immanently nonstandard model by the method of forcing. His tricks fall in an outright contradiction with the routine mathematical intuition stemming "from our belief into a natural nearly physical model of the mathematical world" as Cohen phrased this himself.

Miraculously, the difficulties in comprehension of Cohen's results gained a perfect formulation long before they sprang into life. This was done in the famous talk "Real Function Theory: State of the Art" by N. N. Luzin at the All-Russia Congress of Mathematicians in 1927. Then Luzin said: "The first idea that might leap to mind is that the determination of the cardinality of the continuum is a matter of a free axiom like the parallel postulate of geometry. However, when we vary the parallel postulate, keeping intact the rest of the axioms of Euclidean geometry, we in fact change the precise meaning of the words we write or utter, that is, 'point,' 'straight line,' etc. What words are to change their meaning if we attempt at making the cardinality of the continuum movable along the scale of alephs, while constantly proving consistency of this movement? The cardinality of the continuum, if only we imagine the latter as a set of points, is some unique entity that must reside in the scale of alephs in the place which the cardinality of the continuum belongs to; no matter whether the determination of this place is difficult or even 'impossible for us, the human beings' as J. Hadamard might comment."

P. S. Novikov expressed a very typical attitude to the problem: "...it might be (and it is actually so in my opinion) that the result by Cohen conveys a purely negative message and reveals the termination of the development of 'naive' set theory in the spirit of Cantor."

Intention to obviate obstacles to mastering the technique and results by Cohen led D. Scott and R. Solovay to constructing the so-called Boolean valued models of ZFC which are not only visually attractive from the standpoint of classical mathematicians but also are fully capable of establishing consistency and independence theorems. P. Vopěnka constructed analogous models in the same period of the early sixties.

The above implies that the Boolean valued models, achieving the same ends as Cohen's forcing, must be nonstandard in some sense and possess some new features that distinguish them from the standard models.

Qualitatively speaking, the *notion of Boolean valued model involves a new conception of modeling* which might be referred to as *modeling by correspondence* or *long-distance modeling.* We explain the particularities of this conception as compared with the routine approach. Encountering two classical models of a single theory, we usually seek for a bijection between the universes of the models. If this bijection exist then we translate predicates and operations from one model to the other and speak about isomorphism between the models. Consequently, this conception of isomorphism implies a direct contact of the models which consists in witnessing to bijection of the universes of discourse.

Imagine that we are physically unable to compare the models pointwise simultaneously. Happily, we take an opportunity to exchange information with the owner of the other model using some means of communication, e.g., by having long-distance calls. While communicating, we easily learn that our interlocutor uses his model to operate on some objects that are the namesakes of ours, i.e., sets, membership, etc. Since we are interested in ZFC, we ask the interlocutor whether or not the axioms of ZFC are valid in his model. Manipulating the model, he returns a positive answer. After checking that he uses the same inference rules as we do, we cannot help but acknowledge his model to be a model of the theory we are all investigating. It is worth noting that this conclusion still leaves unknown for us the objects that make up his universe and the procedures he uses to distinguish between true and false propositions about these objects.

All in all, the *new conception of modeling implies not only refusal from identification of the universes of discourse but also admission of various procedures for verification of propositions.*

Chapter 1. Elements of Set Theory

The credo of naive set theory cherishes a dream about the "Cantorian paradise" which is the universe that contains "any many which can be thought of as one, that is, every totality of definite elements which can be united to a whole through a law" or "every collection into a whole M of definite and separate objects m of our perception or our thought."

The contemporary set theory studies realistic approximations to the ethereal ideal which are appropriate formal systems enabling us to operate on a wide spectrum of particular sets not leaving the comfortable room of soothing logical rigor. The essence of such a formalism lies in constructing a universe that "approximates from below" the world of naive sets so as to achieve the aim of current research. The corresponding axiomatic set theories open up ample opportunities to comprehend and corroborate in full detail the qualitative phenomenological principles that lie behind the standard and nonstandard mathematical models of today. ZFC, Zermelo–Fraenkel set theory, is most popular and elaborate. So, it is no wonder that our exposition proceeds mostly in the realm of ZFC.

In Chapter 1 we consider the formal technique for constructing universes of sets by some transfinite processes that lead to the so-called cumulative hierarchies. This technique is vital for Boolean valued analysis. Of profound importance is the detailed description of how the von Neumann universe grows from the empty set. So, we thoroughly analyze the status of classes of sets within the formal system stemming from J. von Neumann, K. Gödel, and P. Bernays and serving as a conservative extension of Zermelo–Fraenkel set theory.

Chapter 2. Elements of the Theory of Boolean Algebras

The key role of Boolean algebras in this book is clear from the title. In fact, the influence of Boolean algebras spreads far beyond the theme under presentation. Boolean algebras penetrate into not only every section of mathematics but also practically all chambers of the mental treasure trove of mankind. There are ample grounds to assert that the concept of Boolean algebra reflects something general that is omnipresent in all spheres of human life.

There is a wonderful immanent connection between the "events" of physics and the "sentences" of logic which was revealed by G. Boole (1815–1864) whose name is made immortal by the term "Boolean algebra." Boole algebraized the tribes of events and sentences in a form so terse and lapidary that it has enjoyed everyone from novice to master for more than 150 years.

It is impossible to appraise Boole's contribution to culture better than this was done by his famous compatriot, contemporary, and elder friend A. De Morgan: "Boole's system of logic is but one of many proofs of genius and patience combined.... That the symbolic processes of algebra, invented as tools of numerical calculation, should be competent to express every act of thought, and to furnish the grammar and dictionary of an all-containing system of logic, would not have been believed until it was proved."

This chapter contains the relevant preliminaries to Boolean algebra including the celebrated Stone Theorem. For the sake of diversity, we demonstrate it by using the Gelfand transform.

Chapter 3. Elements of Category Theory

Set theory rules in the present-day mathematics. The buffoon's role of "abstract nonsense" is assigned in mathematics to category theory. History and literature demonstrate to us that the relations between the ruler and the jester may be totally intricate and unpredictable. Something very similar transpires in the interrelations of set theory and category theory and the dependency of one of them on the other.

Alongside set theory, the theory of categories serves as a universal language of the modern mathematics. Moreover, it is category theory that one of the most ambitious projects of the twentieth century mathematics was realized within, the project of socializing set theory. This evoked topos theory which provides a profusion of categories of which classical set theory is an ordinary member. It is worth noting that Boolean valued models were extra stimuli in search of a category-theoretic foundation of mathematics.

In Chapter 3 we restrict exposition to sketching the prerequisites of category theory up to the key concepts of topos and Boolean topos.

Chapter 4. Boolean Valued Universes

It is the use of various rather unconventional models of set theory that unifies the available nonstandard methods of analysis. In particular, the technique of Boolean valued analysis bases on the properties of a certain cumulative hierarchy $\mathbb{V}^{(B)}$ whose every successive level comprises all functions with domain in the preceding levels and range in a complete Boolean algebra B fixed in advance.

Our main topic in Chapter 4 is the construction and study of this hierarchy; i.e., the Boolean valued universe $\mathbb{V}^{(B)}$.

The idea behind the construction of $\mathbb{V}^{(B)}$ is very simple. We first observe that the characteristic function of a set is a good substitute for the set itself. Travelling across the levels of the von Neumann universe and carrying out successive substitutions, we arrive to another representation of the von Neumann universe which consists only of two valued functions. Replacing the two element Boolean algebra $\mathbb{2}$ with an arbitrary Boolean algebra B and repeating the above construction, we arrive at the desired $\mathbb{V}^{(B)}$.

The subtlest aspects, deserving special attention, relate to elaboration of the sense in which we may treat $\mathbb{V}^{(B)}$ as a model of set theory. We expose in full detail the basic technique that lay grounds for Boolean valued analysis; i.e., the transfer, mixing, and maximum principles.

Considerations of logical rigor and expositional independence have requested an ample room for constructing a separated universe and interpreting NGB in $\mathbb{V}^{(B)}$. The reader, interested only in solid applications to analysis, may just cast a casual glance at these rather sophisticated fragments of exposition while getting first acquaintance with the content of this book.

Chapter 5. The Apparatus of Boolean Valued Analysis

The transfer and maximum principles enable us to carry out various constructions of the conventional mathematical practice inside every Boolean valued universe. Therein we encounter the fields of real and complex numbers, Banach spaces, different operators, etc. The objects, representing them, may be perceived to some extent as nonstandard representations of the original mathematical entities.

Therefore, viewing the model $\mathbb{V}^{(B)}$ as a nonstandard presentation of the mathematical universe of discourse and recalling that $\mathbb{V}^{(B)}$ is constructed within the von Neumann universe, we may peek in the Boolean valued world, discovering nonstandard objects in a standard disguise.

Skipping from one B to another, a keen researcher sees many hypostaces of a sole mathematical idea embodied in a set-theoretic formula. Comparing observations is a method for studying a concealed meaning of the formula. The method often shows that essentially different analytical objects are in fact just various appearances of the same concept. This reveals the endoteric reasons of many facts and enables us to clarify the internal reasons for many vague analogies and dim parallelism and also to open new opportunities to study old objects.

This reminds us of the celebrated cave of Plato. If a casual escapee decided to inform his fellow detainees on what he saw at large, he might build a few bonfires in the night. Then each entity will cast several shadows on the wall of the cave (rather than a single shadow suggested by Plato). Now the detainees acquired a possibility of finding the essence of unknown things from analyzing the collection of shadows bearing more information than a sole shadow of an entity.

Comparative analysis with the help of Boolean valued models proceeds usually in two stages which we may agree to call syntactic and semantic.

At the *syntactic stage*, the mathematical fragment under study (a definition, a construction, a property, etc.) is transformed into a formal text of the symbolic language of set theory, or, to be more precise, into a text in a suitable jargon. In this stage we often have to analyze the complexity of the text; in particular, it matters whether the whole text or some of its parts is a bounded formula.

The *semantic stage* consists in interpretation of a formal text inside a Boolean valued universe. In this stage we use the terms of the conventional set theory, i.e. the von Neumann universe $\mathbb{V}$, to interpret (decode or translate) some meaningful texts that contain truth about the objects of the Boolean valued universe $\mathbb{V}^{(B)}$. This is done by using especial operations on the elements and subsets of the von Neumann universe.

In Chapter 5 we consider the basic operations of Boolean valued analysis, i.e., the canonical embedding, descent, ascent, and immersion. The most important properties of these operations are conveniently expressed using the notions of category and functor.

Chapter 6. Functional Representation of Boolean Valued Universes

Various function spaces reside in functional analysis, and so the intention is natural of replacing an abstract Boolean valued system by some function analog, a model whose elements are functions and in which the basic logical operations are calculated "pointwise." An example of such a model is given by the class $\mathbb{V}^Q$ of all functions defined on a fixed nonempty set Q and acting into the class $\mathbb{V}$ of all sets. Truth values in the model $\mathbb{V}^Q$ are various subsets of Q and, in addition, the truth value

$[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!]$ of $\varphi(t_1,\dots,t_n)$ at functions $u_1,\dots,u_n \in \mathbb{V}^Q$ is calculated as follows:

$$[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] = \bigl\{q \in Q : \ \varphi\bigl(u_1(q),\dots,u_n(q)\bigr)\bigr\}.$$

In Chapter 6 we give a solution by A. G. Gutman and G. A. Losenkov to the above problem. To this end, we introduce and study their concept of continuous polyverse which is a continuous bundle of models of set theory. It is shown that the class of continuous sections of a continuous polyverse is a Boolean valued system satisfying all basic principles of Boolean valued analysis and, conversely, every Boolean valued algebraic system can be represented as the class of sections of a suitable continuous polyverse.

Chapter 7. Analysis of Algebraic Systems

Every Boolean valued universe has the collection of mathematical objects in full supply: available in plenty are all sets with extra structure: groups, rings, algebras, normed spaces, etc. Applying the descent functor to the established algebraic systems in a Boolean valued model, we distinguish bizarre entities or recognize old acquaintances, which leads to revealing the new facts of their life and structure.

This technique of research, known as *direct Boolean valued interpretation*, allows us to produce new theorems or, to be more exact, to extend the semantical content of the available theorems by means of slavish translation. The information we so acquire might fail to be vital, valuable, or intriguing, in which case the direct Boolean valued interpretation turns out to be a leisurely game.

It thus stands to reason to raise the following questions: What structures significant for mathematical practice are obtainable by the Boolean valued interpretation of the most common algebraic systems? What transfer principles hold true in this process? Clearly, the answers should imply specific objects whose particular features enable us to deal with their Boolean valued representation which, if understood duly, is impossible to implement for arbitrary algebraic systems.

In Chapter 5 we have shown that an abstract B-set U embeds in the Boolean valued universe $\mathbb{V}^{(B)}$ so that the Boolean distance between the members of U becomes the Boolean truth-value of the negation of their equality. The corresponding element of $\mathbb{V}^{(B)}$ is, by definition, the *Boolean valued representation* of U. In case the B-set U has some a priori structure we may try to furnish the Boolean valued representation of U with an analogous structure, intending to apply the technique of ascending and descending to studying the original structure of U. Consequently, the above questions may be treated as instances of the unique problem of searching a well-qualified Boolean valued representation of a B-set furnished with some additional structure.

Chapter 7 analyzes the problem for the main objects of general algebra. Located at the epicenter of exposition, the notion of an algebraic B-system refers to a nonempty B-set endowed with a few contractive operations and B-predicates, the latter meaning B-valued contractive mappings.

The Boolean valued representation of an algebraic B-system appears to be a conventional two-valued algebraic system of the same type. This means that an appropriate completion of each algebraic B-system coincides with the descent of some two-valued algebraic system inside $\mathbb{V}^{(B)}$. On the other hand, each two-valued algebraic system may be transformed into an algebraic B-system on distinguishing a complete Boolean algebra of congruences of the original system. In this event, the task is in order of finding the formulas holding true in direct or reverse transition from a B-system to a two-valued system. In other words, we have to seek here some versions of the transfer principle or the identity preservation principle of long standing in some branches of mathematics.

Chapter 8. Analysis of Groups, Rings, and Fields

This is a continuation of the previous chapter. We illustrate the general facts of Boolean valued analysis with particular algebraic systems in which complete Boolean algebras of congruences are connected with the relations of order and disjointness. We restrict exposition mainly to the descents of the systems under study and demonstrate the opportunities that are opened up by Boolean valued analysis.

Chapter 9. Analysis of Cardinals

This chapter occupies an especial place in the whole book. By now we only considered the Boolean valued universe $\mathbb{V}^{(B)}$ over an arbitrary complete Boolean algebra B. Moreover, we discussed only those properties and constructions that are practically independent of the choice of B. In actuality, many delicate mathematical properties of the members of $\mathbb{V}^{(B)}$ depends essentially on the structure of B. We show here how the choice of a Boolean algebra affects the specific properties of cardinals (and not only cardinals) in the corresponding Boolean valued universe.

It is shown in Chapter 5 that the canonical embedding of the von Neumann universe $\mathbb{V}$ to $\mathbb{V}^{(B)}$ sends ordinals to Boolean valued ordinals, preserving the order on ordinals. The same happens to cardinals provided that B enjoys the countable chain condition. However, the choice of B is available such that the canonical embedding "glue together" infinite cardinals; i.e., the standard names of two distinct infinite cardinals may have the same cardinality in an appropriate Boolean valued model. There are various mathematical constructions distorted under the canonical embedding. We discuss a few of them but focus exposition on the classical Gödel–Cohen solution of the continuum problem.

Chapter 10. Analysis of Vector Lattices

The Boolean valued inverse $\mathbb{V}^{(B)}$ associated with a fixed Boolean algebra B is one of the arenas of mathematical events. Indeed, by virtue of the transfer and maximum principles, $\mathbb{V}^{(B)}$ contains numbers and groups as well as the Lebesgue and Riemann integrals, with the Radon–Nikodým and Hahn–Banach theorems available by virtue of the transfer and maximum principles.

The elementary technique of ascending and descending which we become acquainted with when considering algebraic systems shows each of mathematical objects in $\mathbb{V}^{(B)}$ to be a representation of an analogous classical object with an additional structure determined by B. In particular, this is also true in regard to functional-analytical objects. In Chapter 10 we expose the facts that are associated with Boolean valued representation of the latter objects.

Our main topic is Banach spaces in Boolean valued universes. It turns out that these spaces are inseparable from the concepts of the theory of ordered vector spaces and, above all, with the Dedekind complete vector lattices which were introduced by L. V. Kantorovich at the beginning of the 1930s under the name of K-spaces. They are often referred to as *Kantorovich spaces* nowadays.

The fundamental result of Boolean valued analysis in regard to this aspect is Gordon's Theorem which reads as follows: *Each universally complete Kantorovich space is an interpretation of the reals in an appropriate Boolean valued model.* Conversely, each Archimedean vector lattice embeds in a Boolean valued model, becoming a vector sublattice of the reals viewed as such over some dense subfield of the reals.

Moreover, each theorem about the reals within Zermelo–Fraenkel set theory has an analog in the original Kantorovich space. Translation of theorems is carried out by appropriate general operations of Boolean valued analysis. We illustrate then technique of *Boolean valued transfer* by deriving the basic properties of Kantorovich spaces: representation as continuous or spectral functions, the Freudenthal spectral theorem, spectral integration, the functional calculus, etc.

Chapter 11. Analysis of Lattice Normed Spaces

In this chapter we consider the structure and properties of a vector space with some norm taking values in a vector lattice. Such a vector space is called a *lattice normed space*. The most important peculiarities of these spaces are connected with decomposability. Use of decomposability allows us in particular to distinguish a complete Boolean algebra of linear projections in a lattice normed space which is isomorphic to the Boolean algebra of band projections of the norm lattice. Most typical in analysis are the lattice normed spaces of continuous or measurable functions.

In much the same way as many structural properties of a Kantorovich space are some properties of the reals in an appropriate Boolean valued model, the basic properties of a lattice normed space presents the Boolean valued interpretations of the relevant properties of normed spaces. The most principal connections are reflected by the three facts:

(1) The internal Banach spaces and external universally complete Banach–Kantorovich spaces are bijective under the procedure of bounded descent from a Boolean valued model.

(2) Each lattice normed space is realizable as a dense subspace of a Banach space viewed a vector space over some field, e.g. the rationals, in an appropriate Boolean valued model.

(3) Each Banach space X is a result of the bounded descent of some Banach space in a Boolean valued model if and only if X includes a complete Boolean algebra of norm one projections which possesses the cyclicity property. In other words, X is a Dedekind complete lattice normed space with a mixed norm.

These facts lie behind the approach to involutive algebras which we pursue in Chapter 12.

Chapter 12. Analysis of Banach Algebras

The theory of Banach algebras is one of the most attractive traditional sections of functional analysis. Chapter 12 presents the basic results of Boolean valued analysis of involutive Banach algebras and Jordan Banach algebras.

The possibility of applying Boolean valued analysis to operator algebras rests on the following observation: If the center of an algebra is properly qualified and perfectly located then it becomes a one dimensional subalgebra after immersion in a suitable Boolean valued universe. This might lead to a simpler algebra. On the other hand, the transfer principle implies that the scope of the formal theory of the initial algebra is the same as that of its Boolean valued representation.

Exposition focuses on the analysis of AW^*-algebras and JB-algebras, i.e. Baer C^*-algebras and Jordan–Banach algebras. These algebras are realized in a Boolean valued model as AW^*-factors and JB-factors. The problem of representation of these objects as operator algebras leas to studying Kaplansky–Hilbert modules.

The dimension of a Hilbert space inside a Boolean valued model is a Boolean valued cardinal which is naturally called the Boolean dimension of the Kaplansky–Hilbert module that is the descent of the original Hilbert space. The cardinal shift reveals itself: some isomorphic Kaplansky–Hilbert modules may fail to have all bases of the same cardinality. This implies that a type I AW^*-algebra may generally split in a direct sum of homogeneous subalgebras in many ways. This was conjectured by I. Kaplansky as far back as in 1953.

Leaning on the results about the Boolean valued immersion of Kaplansky–Hilbert modules, we derive some functional representations of these objects. To put it more precisely, we prove that each AW^*-module is unitarily equivalent to the direct sum of some homogeneous AW^*-modules consisting of continuous vector functions ranging in a Hilbert space. An analogous representation holds for an arbitrary type I AW^*-algebra on replacing continuous vector functions with operator valued functions continuous in the strong operator topology.

We call an AW^*-algebra *embeddable* if it is $*$-isomorphic with the double commutant of some type I AW^*-algebra. Each embeddable AW^*-algebra admits a Boolean valued representation, becoming a von Neumann algebra or factor. We give several characterizations for embeddable AW^*-algebras. In particular, we prove that an AW^*-algebra A is embeddable if and only if the center valued normal states of A separate A. We also consider similar problems for the JB-algebras, a kind of real nonassociative analogs of C^*-algebras.

Audience

The book is intended for the classical analyst seeking new powerful tools and for the model theorist in search of challenging applications of nonstandard models of set theory.